第三版前言

华东师范大学数学系编写的《数学分析》上、下册经过国家教委组织的专家评审，列入"九五"教委级重点教材；并承高等学校数学和力学指导委员会基础数学教学指导组对教材修订提出具体指导意见，我系数学分析编写组对本书在第二版使用基础上进行修订.

此次修订前我们广泛征求了各使用院校的意见，召开了使用教材情况的座谈会，许多具有丰富教学经验的教师对本教材修改提供了许多积极、中肯的意见.在此基础上，我们在现行数学分析教学大纲的范围内对一些内容进行适当调整和增删；同时考虑到近代数学分析教材发展潮流，适度地反映这方面的进展情况，以适应对21世纪新教材的需求.

关于实数理论，不少同类教材由小数出发叙述实数理论，这种方式比较容易理解，并且与中学数学教学衔接得比较紧密.我们在第一章中采用由小数引进实数的方法，并由此证明确界原理，希望这样处理有利于读者掌握这一实数基本原理.

在单变量微分学中，除按传统方式由速度和曲线的切线引入导数概念外，同时也由极值问题引入稳定点概念，并使微分中值定理与其应用结合得更为紧密.

积分理论方面，在引入定积分基本概念后，提前出现牛顿—莱布尼茨公式，这样能较早接触定积分计算.对于可积分条件先作直观描述，并用来证明某些函数类的可积性，难度较大的可积性三个充要条件放到该章最后一节，可根据需要选用.根据使用院校意见，反常积分和含参量积分各自独立成章.

二重积分的变量变换公式在较强的条件下，利用格林公式进行证明；一般条件下的重积分变换公式采用连续模一致逼近的方法导出，对希望了解一般条件下严格证明的读者可能有益，这个证明放在重积分最后一节.

在欧美、俄罗斯数学分析教材中对向量值函数微分学和外微分形式相当重视，在应用数学中也日见其重要性.在前二版有关内容的基础上，我们使用迭代法证明反函数定理，并由此证明隐函数定理及求导法，使得相应内容比较容易接受；外积运用了浅近的解释，使其与重积分变量变换公式相联系.上述两部分内容以"流形上微积分学初阶"为题构成第二十三章内容，供选学用.

对于加"*"的章节，教学中可灵活选用，也可作为读者进一步阅读的内容或作为选修课的内容，以使本书适合多种层次的需求.

附录Ⅰ 微积分学简史.由张奠宙教授作了修订,读者可从此附录了解微积分学发展的线索.

附录Ⅱ 实数理论.采用戴德金分划由有理数集的分划叙述实数完备性比较直观、优美,仍是附录的重要组成部分.但用小数讲述实数理论与实用更靠近,在附录最后添加“无限小数四则运算的定义”与正文相呼应.

附录Ⅲ 积分表.

在这次修订中,我们审查了全部习题,适当进行了调整和补充,希望能更好符合教学的需要.

这次修订由吴良森任主编.

上册第一、二、三、四、七章由宋国栋编写;第五、六章由庞学诚编写;第八、九、十、十一章由毛羽辉编写,上册由毛羽辉负责编写组织及修改.

下册第十二、十三、十四、十五章由胡善文编写;第十六、十七、十八、二十三章由吴良森编写;第十九、二十、二十一、二十二章由魏国强编写,下册由魏国强负责编写组织.

最后由吴良森统一整理.庞学诚、魏国强分别审阅了上、下册的稿件.

程其襄教授、陈昌平教授、张奠宙教授阅读了第二十三章主要内容的初稿,并提出了宝贵的意见,对他们的鼓励和支持深表感谢.

郑英元教授对修订提了许多积极的建议.

高等学校数学和力学指导委员会成员,吉林大学孙善利教授对本书修改提供了宝贵的意见.

陕西师范大学、华南师范大学、南京师范大学、江西师范大学、广西师范大学、常熟高等专科学校等院校数学系对教材修改也都提出过仔细的意见,在此致以深切的谢意.

华东理工大学谢国瑞教授和交通大学孙薇荣教授仔细审阅了本书上册的稿件,高等教育出版社高尚华编审审阅了下册的稿件,提出许多宝贵意见,在此表示感谢.

第三版中还会有许多不足之处,恳切希望读者批评指正.

编者

1999年9月

再版的话

本书自1980年出版发行以来，由于它在取材、体系、可读性诸方面较为切合我国教学实际，而被许多兄弟院校所采用，并于1987年国家教育委员会举办的全国优秀教材评选中获全国优秀奖. 近几年，许多学校在数学教学改革中，更新了一些课程，对数学分析提出了许多新的要求. 基于这些情况，我们在这次再版中，除订正初版中的某些疏漏外，在不影响本书原有体系、格局的前提下，对某些内容作了适当的增删和调整，使全书内容更充实，结构更合理，且有更大的选择性，以期适应各类学校师生的需要.

修改的主要内容有:

在第一章精简某些与中学数学相重复的函数概念，增加实数集有关的一些内容，如有界集，确界和确界原理等.

在极限理论方面，把出发点改为“确界原理”(原来是“单调有界原理”)，并在第二章用它证明单调有界定理，第四章用它证明实指数幂的性质，最后在第八章完成对实数完备性的几个等价命题的证明，相应地，在附录Ⅱ实数理论中，也改用戴德金分划说定义实数，并证明了确界原理(原来采用柯西列定义实数，虽有不少优点，但不够直观，不易理解). 此外，子列概念提前到第二章，第八章“极限与连续性(续)”(原为第七章)在内容和次序上也稍作调整.

对于微分学，在单元部分，把原来的第六章中值定理与导数应用分为两章. 在新的第六章“微分学基本定理与不定式极限”增加了导数极限定理与达布定理(小字排印)，用以揭示导函数的性质;在新的第七章“运用导数研究函数性态”加强了日益显得重要的凸函数概念. 在多元部分，除对原有内容作不同程度精简外，主要增加了第十九章“向量函数微分学”，以便在更一般形式上讨论多元函数理论，使读者对经典导数概念的认识得以深化. 这一章目前暂作选学材料，期望今后能逐步用向量函数的方式取代传统内容成为多元函数微分学的主体.

在积分学方面，于定积分中补充了第二积分中值定理(小字排印). 压缩了反常积分与含参量积分的内容，并把它分别并入定积分与重积分各章中. 为便于重积分部分的教学，在内容与结构上也稍作调整，其中第二十章主要讲述二、三重积分的概念、计算与应用，在第二十一章除对二重积分中某些问题作进一步讨论外，还介绍了 n 重积分(小字排印)和含参量非正常积分. 此外，我们删去了“反常重积分”与“外微分与一般斯托克斯公式”两节.

关于级数部分,在新版中删去了对傅里叶级数一致收敛性的进一步讨论.

张奠宙教授为本书写了“微积分学简史”(附录Ⅰ).我们认为,知道一点微积分的来龙去脉,对每一位数学教育工作者来说是必要和有益的.

在这次修订中,我们重新审查了本书的全部习题,并进行了调整与补充,以便更加符合教学的需要.各节横线以上的习题仍然是必做题,每册书末都附有计算题答案.

在新版中,用记号□表示命题证明或例题求解的结束.上册增加了附录Ⅲ“积分表”,每册末尾增设了名词和人名索引,以供读者检索.

这次修订工作由程其襄、郑英元、毛羽辉和宋国栋等四人完成,程其襄教授任主编,郑英元负责全书的统一整理工作.高等教育出版社郑洪深同志为本书的初版和再版做了许多深入细致的工作.我系数学分析教学组成员对本书的修订工作提出过许多积极的建议.本书自出版以来深得广大读者的关心与支持.在此,我们一并致以深切的谢意,并希望读者对本书给予批评与指正.

编　者

上册:1987年12月完成初稿,1990年2月完成修改稿.

下册:1988年6月完成初稿,1990年6月完成修改稿.

编者的话（初版）

本书是根据1977年高等学校理科数学教材大纲讨论会所制定的《数学分析》大纲编写的. 全书分上、下两册，可作为高等师范院校数学系教学用书，以及其他高等院校有关专业的教学参考书.

关于本书的使用兹作以下一些说明：在极限问题的处理上，虽一开始就采用 $\varepsilon-\delta$ 定义，但若干较难的理论证明则放到微分学之后. 实数理论作为附录放在上册的末尾. 有关集合的基本概念，目前尚未在中学里全面普及，仍在附录Ⅰ中作了简要的介绍. 本书有部分内容用小号字排印，在实际教学中可视情况选用. 本书各节都附有适量的习题，并把它们分为基本题与选作题两类，中间用一道横线分开，横线之后的习题和各章的总练习题，读者可在教师指导下挑选一部分进行练习. 书末并附有计算题的答案.

本书由程其襄教授主编，编写组写出初稿后，经程其襄、周彭年、郑英元修改定稿(郑英元执笔整理). 先后参加本书编写工作的有：陈昌平、陈美廉、徐钧涛、曹伟杰、杨庆中、黄丽萍、张奠宙、宋国栋等同志. 此外，林克伦、华煜铣、顾鹤荣等同志也参加过一些工作.

北京师范大学、武汉大学担任本书主审，先后参加审稿的单位有：上海师范学院、安徽师范大学、吉林师范大学、曲阜师范学院、西藏师范学院、陕西师范大学、贵阳师范学院、徐州师范学院、新乡师范学院以及四川师范学院、华中师范学院、华南师范学院、江西师范学院、昆明师范学院、南京师范学院等. 甘肃师范大学的同志也对本书上册提出过仔细的修改意见. 在审查过程中，大家对原稿提出了许多宝贵的意见和建议，我们曾根据这些意见作过许多重大的修改，特此表示衷心的感谢.

由于我们水平有限，恳切希望读者对本书的缺点错误给予批评指正.

编者

1979.11

又及，本书最后定稿时，曾照一九八〇年五月在上海举行的高等学校理科数学教材编审委员会审订的《数学分析》大纲作了修订.

编者

1980.9

责任编辑 高尚华
封面设计 张　楠
责任绘图 郝　林
版式设计 马静如
责任校对 马桂兰
责任印制 杨　明



目 录

第一章 实数集与函数

第二章 数列极限

第三章 函数极限

第四章 函数的连续性

第五章 导数和微分

第六章　微分中值定理及其应用

第七章　实数的完备性

第八章 不定积分

第九章 定 积 分

第十章 定积分的应用

第十一章 反常积分

第一章　实数集与函数

§1 实　　数

数学分析研究的基本对象是定义在实数集上的函数.为此,我们先简要叙述实数的有关概念.

一　实数及其性质

在中学数学课程中,我们知道实数由有理数与无理数两部分组成.**有理数**可用分数形式$\frac{p}{q}$(p、q 为整数,$q\neq 0$)表示,也可用有限十进小数或无限十进循环小数来表示;而无限十进不循环小数则称为**无理数**.有理数和无理数统称为**实数**.

为了以下讨论的需要,我们把有限小数(包括整数)也表示为无限小数.对此我们作如下规定:对于正有限小数(包括正整数)x,当 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 时,其中 $0\leqslant a_i\leqslant 9$,$i=1,2,\cdots,n$,$a_n\neq 0$,$a_0$ 为非负整数,记

$$x = a_0.a_1a_2\cdots(a_n-1)999\,9\cdots,$$

而当 $x=a_0$ 为正整数时,则记

$$x = (a_0-1).999\,9\cdots,$$

例如2.001记为2.000 999 9…;对于负有限小数(包括负整数)y,则先将 $-y$ 表示为无限小数,再在所得无限小数之前加负号,例如 -8 记为 $-7.999\,9\cdots$;又规定数0表示为0.000 0….于是,任何实数都可用一个确定的无限小数来表示.

我们已经熟知比较两个有理数大小的方法.现定义两个实数的大小关系.

定义1　给定两个非负实数

$$x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,\quad y = b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots,$$

其中 a_0,b_0 为非负整数,$a_k,b_k(k=1,2,\cdots)$为整数,$0\leqslant a_k\leqslant 9$,$0\leqslant b_k\leqslant 9$.若有

$$a_k = b_k,k = 0,1,2,\cdots,$$

则称 x 与 y 相等,记为 $x=y$;若 $a_0>b_0$ 或存在非负整数 l,使得

$$a_k = b_k(k = 0,1,2,\cdots,l)\text{ 而 }a_{l+1} > b_{l+1},$$

则称 x 大于 y 或 y 小于 x,分别记为 $x>y$ 或 $y<x$.

对于负实数 x,y,若按上述规定分别有 $-x=-y$ 与 $-x>-y$,则分别称 $x=y$ 与 $x<y$(或 $y>x$).另外,自然规定任何非负实数大于任何负实数.

以下给出通过有限小数来比较两个实数大小的等价条件.为此,先给出如下定义.

定义 2 设 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$为非负实数.称有理数

$$x_n = a_0.a_1a_2\cdots a_n$$

为实数 x 的 **n 位不足近似**,而有理数

$$\overline{x_n} = x_n + \frac{1}{10^n}$$

称为 x 的 **n 位过剩近似**,$n=0,1,2,\cdots$.

对于负实数 $x=-a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$,其 n 位不足近似与过剩近似分别规定为

$$x_n = -a_0.a_1a_2\cdots a_n - \frac{1}{10^n} \text{ 与 } \overline{x_n} = -a_0.a_1a_2\cdots a_n.$$

注 不难看出,实数 x 的不足近似 x_n 当 n 增大时不减,即有 $x_0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots$,而过剩近似$\overline{x_n}$当 n 增大时不增,即有$\overline{x_0}\geqslant\overline{x_1}\geqslant\overline{x_2}\geqslant\cdots$.

我们有以下的

命题 设 $x=a_0.a_1a_2\cdots$ 与 $y=b_0.b_1b_2\cdots$为两个实数,则 $x>y$ 的等价条件是:存在非负整数 n,使得

$$x_n > \overline{y_n},$$

其中 x_n 表示 x 的 n 位不足近似,$\overline{y_n}$表示 y 的 n 位过剩近似.

关于这个命题的证明,以及关于实数的四则运算法则的定义,可参阅本书附录Ⅱ第八节.

例 1 设 x、y 为实数,$x<y$.证明:存在有理数 r 满足

$$x < r < y.$$

证 由于 $x<y$,故存在非负整数 n,使得$\overline{x_n}<y_n$.令

$$r = \frac{1}{2}(\overline{x_n} + y_n),$$

则 r 为有理数,且有

$$x \leqslant \overline{x_n} < r < y_n \leqslant y,$$

即得 $x<r<y$. □

为方便起见,通常将全体实数构成的集合记为 $\mathbf{R}$,即

$$\mathbf{R} = \{x \mid x \text{ 为实数}\}.$$

实数有如下一些主要性质:

1. 实数集 $\mathbf{R}$ 对加、减、乘、除(除数不为 0)四则运算是封闭的,即任意两个

实数的和、差、积、商(除数不为 0)仍然是实数.

2. 实数集是有序的,即任意两实数 a、b 必满足下述三个关系之一:$a<b$,$a=b$,$a>b$.

3. 实数的大小关系具有传递性,即若 $a>b$,$b>c$,则有 $a>c$.

4. 实数具有阿基米德(Archimedes)性,即对任何 a、$b\in\mathbf{R}$,若 $b>a>0$,则存在正整数 n,使得 $na>b$.

5. 实数集 $\mathbf{R}$ 具有稠密性,即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数,且既有有理数(见例 1),也有无理数.

6. 如果在一直线(通常画成水平直线)上确定一点 O 作为原点,指定一个方向为正向(通常把指向右方的方向规定为正向),并规定一个单位长度,则称此直线为**数轴**.任一实数都对应数轴上唯一的一点;反之,数轴上的每一点也都唯一地代表一个实数.于是,实数集 $\mathbf{R}$ 与数轴上的点有着一一对应关系.在本书以后的叙述中,常把“实数 a”与“数轴上的点 a”这两种说法看作具有相同的含义.

例 2　设 a、$b\in\mathbf{R}$.证明:若对任何正数 ε 有 $a<b+\varepsilon$,则 $a\leqslant b$.

证　用反证法.倘若结论不成立,则根据实数集的有序性,有 $a>b$.令 $\varepsilon=a-b$,则 ε 为正数且 $a=b+\varepsilon$,但这与假设 $a<b+\varepsilon$ 相矛盾.从而必有 $a\leqslant b$. □

关于实数的定义与性质的详细论述,有兴趣的读者可参阅本书附录Ⅱ.

二　绝对值与不等式

实数 a 的**绝对值**定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

从数轴上看,数 a 的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离.

实数的绝对值有如下一些性质:

1. $|a|=|-a|\geqslant 0$;当且仅当 $a=0$ 时有 $|a|=0$.

2. $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$.

3. $|a|<h\Leftrightarrow -h<a<h$;$|a|\leqslant h\Leftrightarrow -h\leqslant a\leqslant h$ $(h>0)$.

4. 对于任何 a、$b\in\mathbf{R}$ 有如下的**三角形不等式**:

$$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|.$$

5. $|ab|=|a||b|$.

6. $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$ $(b\neq 0)$.

下面只证明性质 4,其余性质由读者自行证明.

由性质 2 有

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|,\ -|b|\leqslant b\leqslant|b|.$$

两式相加后得到

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|.$$

根据性质3,上式等价于

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|. \tag{1}$$

将(1)式中 b 换成 $-b$,(1)式右边不变,即得 $|a-b|\leqslant|a|+|b|$,这就证明了性质4不等式的右半部分.又由 $|a|=|a-b+b|$,据(1)式有

$$|a|\leqslant|a-b|+|b|.$$

从而得

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|. \tag{2}$$

将(2)式中 b 换成 $-b$,即得 $|a|-|b|\leqslant|a+b|$.性质4得证. □

习　　题

1. 设 a 为有理数,x 为无理数.证明:
   (1) $a+x$ 是无理数; (2)当 $a\neq0$ 时,ax 是无理数.
2. 试在数轴上表示出下列不等式的解:
   (1) $x(x^2-1)>0$; (2) $|x-1|<|x-3|$;
   (3) $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geqslant\sqrt{3x-2}$.
3. 设 a、$b\in\mathbf{R}$.证明:若对任何正数 ε 有 $|a-b|<\varepsilon$,则 $a=b$.
4. 设 $x\neq0$,证明 $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geqslant2$,并说明其中等号何时成立.
5. 证明:对任何 $x\in\mathbf{R}$ 有
   (1) $|x-1|+|x-2|\geqslant1$; (2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant2$.
6. 设 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$($\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数的集合).证明

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|.$$

你能说明此不等式的几何意义吗?

---

7. 设 $x>0,b>0,a\neq b$.证明 $\dfrac{a+x}{b+x}$ 介于1与 $\dfrac{a}{b}$ 之间.
8. 设 p 为正整数.证明:若 p 不是完全平方数,则 $\sqrt{p}$ 是无理数.
9. 设 a、b 为给定实数.试用不等式符号(不用绝对值符号)表示下列不等式的解:
   (1) $|x-a|<|x-b|$; (2) $|x-a|<x-b$; (3) $|x^2-a|<b$.

§2　数集·确界原理

本节中我们先定义 $\mathbf{R}$ 中两类重要的数集——区间与邻域,然后讨论有界集

并给出确界定义和确界原理.

一 区间与邻域

设 a、$b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$.我们称数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 为**开区间**,记作 (a,b);数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**,记作 $[a,b]$;数集 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 和 $\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 都称为**半开半闭区间**,分别记作 $[a,b)$ 和 $(a,b]$.以上这几类区间统称为**有限区间**.从数轴上来看,开区间 (a,b) 表示 a、b 两点间所有点的集合,闭区间 $[a,b]$ 比开区间 (a,b) 多两个端点,半开半闭区间 $[a,b)$ 比开区间 (a,b) 多一个端点 a 等.

满足关系式 $x\geqslant a$ 的全体实数 x 的集合记作 $[a,+\infty)$,这里符号 ∞ 读作"无穷大",$+\infty$ 读作"正无穷大".类似地,我们记

$$(-\infty,a]=\{x\mid x\leqslant a\},(a,+\infty)=\{x\mid x>a\},$$

$$(-\infty,a)=\{x\mid x<a\},(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R},$$

其中 $-\infty$ 读作"负无穷大".以上这几类数集都称为**无限区间**.有限区间和无限区间统称为**区间**.

设 $a\in\mathbf{R}$,$\delta>0$.满足绝对值不等式 $|x-a|<\delta$ 的全体实数 x 的集合称为**点 a 的 δ 邻域**,记作 $U(a;\delta)$,或简单地写作 $U(a)$,即有

$$U(a;\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta).$$

点 a 的空心 δ 邻域定义为

$$U^{\circ}(a;\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\},$$

它也可简单地记作 $U^{\circ}(a)$.注意,$U^{\circ}(a;\delta)$ 与 $U(a;\delta)$ 的差别在于:$U^{\circ}(a;\delta)$ 不包含点 a.

此外,我们还常用到以下几种邻域:

点 a 的 δ 右邻域 $U_+(a;\delta)=[a,a+\delta)$,简记为 $U_+(a)$;

点 a 的 δ 左邻域 $U_-(a;\delta)=(a-\delta,a]$,简记为 $U_-(a)$;

($U_-(a)$ 与 $U_+(a)$ 去除点 a 后,分别为**点 a 的空心 δ 左、右邻域**,简记为 $U^{\circ}_-(a)$ 与 $U^{\circ}_+(a)$.)

∞ 邻域 $U(\infty)=\{x\mid |x|>M\}$,其中 M 为充分大的正数(下同);

$+\infty$ 邻域 $U(+\infty)=\{x\mid x>M\}$;**$-\infty$ 邻域** $U(-\infty)=\{x\mid x<-M\}$.

二 有界集·确界原理

定义 1 设 S 为 $\mathbf{R}$ 中的一个数集.若存在数 $M(L)$,使得对一切 $x\in S$,都有 $x\leqslant M(x\geqslant L)$,则称 S 为**有上界(下界)的数集**,数 $M(L)$ 称为 S 的一个**上界(下界)**.

若数集 S 既有上界又有下界，则称 S 为**有界集**.若 S 不是有界集，则称 S 为**无界集**.

例 1 证明数集 $\mathbf{N}_+=\{n\mid n$ 为正整数$\}$有下界而无上界.

证 显然，任何一个不大于 1 的实数都是 $\mathbf{N}_+$ 的下界，故 $\mathbf{N}_+$ 为有下界的数集.

为证 $\mathbf{N}_+$ 无上界，按照定义只须证明：对于无论多么大的数 M，总存在某个正整数 $n_0(\in\mathbf{N}_+)$，使得 $n_0>M$.事实上，对任何正数 M(无论多么大)，取 $n_0=[M]+1$[1]，则 $n_0\in\mathbf{N}_+$，且 $n_0>M$.这就证明了 $\mathbf{N}_+$ 无上界. □

读者还可自行证明：任何有限区间都是有界集，无限区间都是无界集；由有限个数组成的数集是有界集.

若数集 S 有上界，则显然它有无穷多个上界，而其中最小的一个上界常常具有重要的作用，称它为数集 S 的上确界.同样，有下界数集的最大下界，称为该数集的下确界.下面给出数集的上确界和下确界的精确定义.

定义 2 设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集.若数 η 满足：

(i) 对一切 $x\in S$，有 $x\leqslant\eta$，即 η 是 S 的上界；

(ii) 对任何 $\alpha<\eta$，存在 $x_0\in S$，使得 $x_0>\alpha$，即 η 又是 S 的最小上界，

则称数 η 为数集 S 的**上确界**，记作

$$\eta=\sup S^{②}.$$

定义 3 设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集.若数 ξ 满足：

(i) 对一切 $x\in S$，有 $x\geqslant\xi$，即 ξ 是 S 的下界；

(ii) 对任何 $\beta>\xi$，存在 $x_0\in S$，使得 $x_0<\beta$，即 ξ 又是 S 的最大下界，

则称数 ξ 为数集 S 的**下确界**，记作

$$\xi=\inf S.$$

上确界与下确界统称为**确界**.

例 2 设 $S=\{x\mid x$ 为区间$(0,1)$中的有理数$\}$.试按上、下确界的定义验证：$\sup S=1$，$\inf S=0$.

解 先验证 $\sup S=1$：

(i) 对一切 $x\in S$，显然有 $x\leqslant1$，即 1 是 S 的上界.

(ii) 对任何 $\alpha<1$，若 $\alpha\leqslant0$，则任取 $x_0\in S$ 都有 $x_0>\alpha$；若 $\alpha>0$，则由有理数集在实数集中的稠密性，在$(\alpha,1)$中必有有理数 x_0，即存在 $x_0\in S$，使得 $x_0>\alpha$.

类似地可验证 $\inf S=0$. □

读者还可自行验证：闭区间$[0,1]$的上、下确界分别为 1 和 0；对于数集

① $[x]$表示不超过数 x 的最大整数，例如$[2.9]=2$，$[-4.1]=-5$.

② sup 是拉丁文 supremum(上确界)一词的简写；下面的 inf 是拉丁文 infimum(下确界)一词的简写.

$E=\left\{\frac{(-1)^n}{n}\middle| n=1,2,\cdots\right\}$,有 $\sup E=\frac{1}{2}$,$\inf E=-1$;正整数集 $\mathbf{N}_+$ 有下确界 $\inf \mathbf{N}_+=1$,而没有上确界.

注 1 由上(下)确界的定义可见,若数集 S 存在上(下)确界,则一定是唯一的.又若数集 S 存在上、下确界,则有 $\inf S\leqslant \sup S$.

注 2 从上面一些例子可见,数集 S 的确界可能属于 S,也可能不属于 S.

例 3 设数集 S 有上确界.证明

$$\eta=\sup S\in S\Leftrightarrow \eta=\max S^{①}.$$

证 $\Rightarrow$) 设 $\eta=\sup S\in S$,则对一切 $x\in S$ 有 $x\leqslant\eta$,而 $\eta\in S$,故 η 是数集 S 中最大的数,即 $\eta=\max S$.

$\Leftarrow$) 设 $\eta=\max S$,则 $\eta\in S$;下面验证 $\eta=\sup S$:

(i) 对一切 $x\in S$,有 $x\leqslant\eta$,即 η 是 S 的上界;

(ii) 对任何 $\alpha<\eta$,只须取 $x_0=\eta\in S$,则 $x_0>\alpha$.从而满足 $\eta=\sup S$ 的定义. □

关于数集确界的存在性,我们给出如下确界原理.

定理 1.1(确界原理) 设 S 为非空数集.若 S 有上界,则 S 必有上确界;若 S 有下界,则 S 必有下确界.

证 我们只证明关于上确界的结论,后一结论可类似地证明.

为叙述的方便起见,不妨设 S 含有非负数.由于 S 有上界,故可找到非负整数 n,使得

1) 对于任何 $x\in S$ 有 $x<n+1$;

2) 存在 $a_0\in S$,使 $a_0\geqslant n$.

对半开区间 $[n,n+1)$ 作 10 等分,分点为 $n.1,n.2,\cdots,n.9$,则存在 $0,1,2,\cdots,9$ 中的一个数 n_1,使得

1) 对于任何 $x\in S$ 有 $x<n.n_1+\frac{1}{10}$;

2) 存在 $a_1\in S$,使 $a_1\geqslant n.n_1$.

再对半开区间 $\left[n.n_1,n.n_1+\frac{1}{10}\right)$ 作 10 等分,则存在 $0,1,2,\cdots,9$ 中的一个数 n_2,使得

1) 对于任何 $x\in S$ 有 $x<n.n_1n_2+\frac{1}{10^2}$;

2) 存在 $a_2\in S$,使 $a_2\geqslant n.n_1n_2$.

---

① 记号 max 是 maximum(最大)一词的简写,$\eta=\max S$ 表示数 η 是数集 S 中最大的数.以下将出现的记号 min 是 minimum(最小)一词的简写,$\min S$ 表示数集 S 中最小的数.

继续不断地 10 等分在前一步骤中所得到的半开区间,可知对任何 $k=1,2,\cdots$,存在 $0,1,2,\cdots,9$ 中的一个数 n_k,使得

1) 对于任何 $x\in S$ 有 $x<n.n_1n_2\cdots n_k+\frac{1}{10^k}$; (1)

2) 存在 $a_k\in S$,使 $a_k\geqslant n.n_1n_2\cdots n_k$.

将上述步骤无限地进行下去,得到实数 $\eta=n.n_1n_2\cdots n_k\cdots$. 以下证明 $\eta=\sup S$. 为此只需证明:

(i) 对一切 $x\in S$ 有 $x\leqslant\eta$;(ii)对任何 $\alpha<\eta$,存在 $a'\in S$ 使 $\alpha<a'$.

倘若结论(i)不成立,即存在 $x\in S$ 使 $x>\eta$,则可找到 x 的 k 位不足近似 x_k,使

$$x_k>\bar{\eta}_k=n.n_1n_2\cdots n_k+\frac{1}{10^k},$$

从而得

$$x>n.n_1n_2\cdots n_k+\frac{1}{10^k},$$

但这与不等式(1)相矛盾.于是(i)得证.

现设 $\alpha<\eta$,则存在 k 使 η 的 k 位不足近似 $\eta_k>\bar{\alpha}_k$,即

$$n.n_1n_2\cdots n_k>\bar{\alpha}_k.$$

根据数 η 的构造,存在 $a'\in S$ 使 $a'\geqslant\eta_k$,从而有

$$a'\geqslant\eta_k>\bar{\alpha}_k\geqslant\alpha,$$

即得到 $\alpha<a'$. 这说明(ii)成立. □

在本书中确界原理是极限理论的基础,读者应给予充分的重视.

例 4 设 A、B 为非空数集,满足:对一切 $x\in A$ 和 $y\in B$ 有 $x\leqslant y$. 证明:数集 A 有上确界,数集 B 有下确界,且

$$\sup A\leqslant\inf B. \tag{2}$$

证 由假设,数集 B 中任一数 y 都是数集 A 的上界,A 中任一数 x 都是 B 的下界,故由确界原理推知数集 A 有上确界,数集 B 有下确界.

现证不等式(2). 对任何 $y\in B$,y 是数集 A 的一个上界,而由上确界的定义知,$\sup A$ 是数集 A 的最小上界,故有 $\sup A\leqslant y$. 而此式又表明数 $\sup A$ 是数集 B 的一个下界,故由下确界定义证得 $\sup A\leqslant\inf B$. □

例 5 设 A、B 为非空有界数集,$S=A\cup B$. 证明:

(i) $\sup S=\max\{\sup A,\sup B\}$;

(ii) $\inf S=\min\{\inf A,\inf B\}$.

证 由于 $S=A\cup B$ 显然也是非空有界数集,因此 S 的上、下确界都存在.

(i) 对任何 $x\in S$,有 $x\in A$ 或 $x\in B\Rightarrow x\leqslant\sup A$ 或 $x\leqslant\sup B$,从而有 $x\leqslant$

$\max\{\sup A,\sup B\}$，故得 $\sup S\leqslant\max\{\sup A,\sup B\}$.

另一方面，对任何 $x\in A$，有 $x\in S\Rightarrow x\leqslant\sup S\Rightarrow\sup A\leqslant\sup S$；同理又有 $\sup B\leqslant\sup S$. 所以 $\sup S\geqslant\max\{\sup A,\sup B\}$.

综上，即证得 $\sup S=\max\{\sup A,\sup B\}$.

(ii) 可类似地证明. □

若把 $+\infty$ 和 $-\infty$ 补充到实数集中，并规定任一实数 a 与 $+\infty$、$-\infty$ 的大小关系为：$a<+\infty$，$a>-\infty$，$-\infty<+\infty$，则确界概念可扩充为：若数集 S 无上界，则定义 $+\infty$ 为 S 的**非正常上确界**，记作 $\sup S=+\infty$；若 S 无下界，则定义 $-\infty$ 为 S 的**非正常下确界**，记作 $\inf S=-\infty$. 相应地，前面定义 2 和定义 3 中所定义的确界分别称为**正常上、下确界**.

在上述扩充意义下，我们有

推广的确界原理 任一非空数集必有上、下确界(正常的或非正常的).

例如，对于正整数集 $\mathbf{N}_+$ 有 $\inf\mathbf{N}_+=1$，$\sup\mathbf{N}_+=+\infty$；对于数集

$$S=\{y\mid y=2-x^2,x\in\mathbf{R}\}\tag{3}$$

有 $\inf S=-\infty$，$\sup S=2$.

习 题

1. 用区间表示下列不等式的解：

   (1) $|1-x|-x\geqslant0$； (2) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\leqslant6$；

   (3) $(x-a)(x-b)(x-c)>0$(a,b,c 为常数，且 $a<b<c$)；

   (4) $\sin x\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 设 S 为非空数集. 试对下列概念给出定义：

   (1) S 无上界； (2) S 无界.

3. 试证明由(3)式所确定的数集 S 有上界而无下界.

4. 求下列数集的上、下确界，并依定义加以验证：

   (1) $S=\{x\mid x^2<2\}$； (2) $S=\{x\mid x=n!,n\in\mathbf{N}_+\}$；

   (3) $S=\{x\mid x$ 为 $(0,1)$ 内的无理数$\}$；

   (4) $S=\left\{x\mid x=1-\dfrac{1}{2^n},n\in\mathbf{N}_+\right\}$.

5. 设 S 为非空有下界数集. 证明：

$$\inf S=\xi\in S\Leftrightarrow\xi=\min S.$$

---

6. 设 S 为非空数集，定义 $S^-=\{x\mid -x\in S\}$. 证明：

   (1) $\inf S^-=-\sup S$； (2) $\sup S^-=-\inf S$.

7. 设 A、B 皆为非空有界数集，定义数集

$$A+B=\{z\mid z=x+y,x\in A,y\in B\}.$$

证明：(1)$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$；　(2)$\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

8. 设 $a>0,a\neq1$，x 为有理数. 证明

$$a^x=\begin{cases}\sup\{a^r \mid r\text{ 为有理数},r<x\},\text{当 }a>1,\\ \inf\{a^r \mid r\text{ 为有理数},r<x\},\text{当 }a<1.\end{cases}$$

§3　函数概念

关于函数概念，在中学数学中我们已有了初步的了解，本节将对此作进一步的讨论.

一　函数的定义

定义 1　给定两个实数集 D 和 M，若有对应法则 f，使对 D 内每一个数 x，都有唯一的一个数 $y\in M$ 与它相对应，则称 f 是定义在数集 D 上的**函数**，记作

$$\begin{aligned}f:D&\to M,\\ x&\mapsto y.\end{aligned}\tag{1}$$

数集 D 称为函数 f 的**定义域**，x 所对应的数 y，称为 f 在点 x 的**函数值**，常记为 $f(x)$. 全体函数值的集合

$$f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}(\subset M)$$

称为函数 f 的**值域**.

(1) 中第一式"$D\to M$"表示按法则 f 建立数集 D 到 M 的函数关系；第二式"$x\mapsto y$"表示这两个数集中元素之间的对应关系，也可记为"$x\mapsto f(x)$". 习惯上，我们称此函数关系中的 x 为**自变量**，y 为**因变量**.

关于函数的定义，我们作如下几点说明：

1. 定义 1 中的实数集 M 常以 $\mathbf{R}$ 来代替，于是定义域 D 和对应法则 f 就成为确定函数的两个主要因素. 所以，我们也常用

$$y=f(x),x\in D$$

表示一个函数. 由此，我们说某两个函数相同，是指它们有相同的定义域和对应法则. 如果两个函数对应法则相同而定义域不同，那么这两个函数仍是不相同的. 例如 $f(x)=1,x\in\mathbf{R}$ 和 $g(x)=1,x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ 是不相同的两个函数. 另一方面，两个相同的函数，其对应法则的表达形式可能不同，例如

$$\varphi(x)=|x|,x\in\mathbf{R}\text{ 和 }\psi(x)=\sqrt{x^2},x\in\mathbf{R}.$$

2. 我们在中学数学中已经知道，表示函数的主要方法是公式法，即用数学运算式子来表示函数. 这时，函数的定义域常取使该运算式子有意义的自变量值的全体，通常称为**存在域**. 在这种情况下，函数的定义域(即存在域)D 可省略不写，而只用对应法则 f 来表示一个函数，此时可简单地说"函数 $y=f(x)$"或"函数 f".

3. 函数 f 给出了 x 轴上的点集 D 到 y 轴上点集 M 之间的**单值对应**，也称为**映射**. 对于 $a\in D$，$f(a)$称为映射 f 下 a 的**象**，a 则称为$f(a)$的**原象**.

4. 在函数定义中，对每一个 $x\in D$，只能有唯一的一个 y 值与它对应，这样定义的函数称为**单值函数**. 若同一个 x 值可以对应多于一个的y 值，则称这种函数为**多值函数**. 在本书范围内，我们只讨论单值函数.

二　函数的表示法

在中学课程里，我们已经知道函数的表示法主要有三种，即解析法（或称公式法）、列表法和图象法.

有些函数在其定义域的不同部分用不同的公式表达，这类函数通常称为**分段函数**. 例如，函数

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

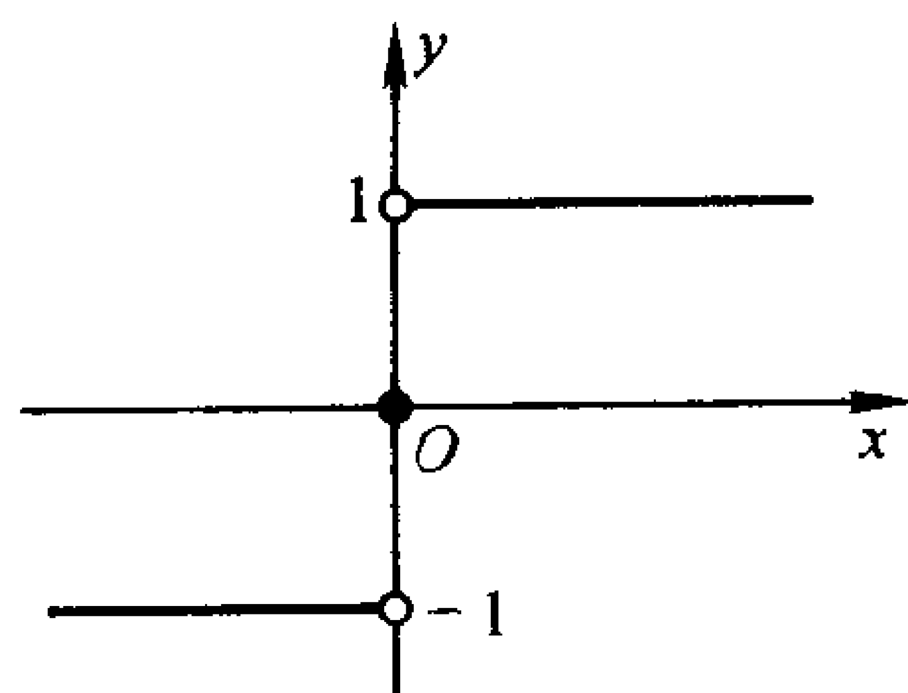


图 1-1

是分段函数，称为**符号函数**，其图象如图 1-1 所示. 又如函数 $f(x)=|x|$也可用如下的分段函数形式来表示：

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

它还可表示为 $f(x)=x\operatorname{sgn} x$.

函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 又可用如下有序数对的集合：

$$G=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

来表示. 在坐标平面上，集合 G 的每一个元素(x,y)表示平面上的一个点，因而集合 G 在坐标平面上描绘出这个函数的图象. 这就是用图象法表示函数的依据.

有些函数难以用解析法、列表法或图象法来表示，只能用语言来描述. 如定义在 $\mathbf{R}$ 上的狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

和定义在$[0,1]$上的黎曼(Riemann)函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{当 } x=\dfrac{p}{q}\left(p,q\in\mathbf{N}_+,\dfrac{p}{q}\text{ 为既约真分数}\right),\\ 0, & \text{当 } x=0,1 \text{ 和}(0,1)\text{ 内的无理数}.\end{cases}$$

三　函数的四则运算

给定两个函数 $f,x\in D_1$ 和 $g,x\in D_2$，记 $D=D_1\cap D_2$，并设 $D\neq\varnothing$. 我们定

义 f 与 g 在 D 上的和、差、积运算如下：

$$F(x)=f(x)+g(x),x\in D,$$
$$G(x)=f(x)-g(x),x\in D,$$
$$H(x)=f(x)g(x),x\in D.$$

若在 D 中剔除使 $g(x)=0$ 的 x 值，即令

$$D^*=D_1\cap\{x\mid g(x)\neq 0,x\in D_2\}\neq\varnothing,$$

可在 D^* 上定义 f 与 g 的商的运算如下：

$$L(x)=\frac{f(x)}{g(x)},x\in D^*.$$

注 若 $D=D_1\cap D_2=\varnothing$，则 f 与 g 不能进行四则运算．例如，设

$$f(x)=\sqrt{1-x^2},x\in D_1=\{x\mid |x|\leqslant 1\},$$
$$g(x)=\sqrt{x^2-4},x\in D_2=\{x\mid |x|\geqslant 2\},$$

由于 $D_1\cap D_2=\varnothing$，所以表达式

$$f(x)+g(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-4}$$

是没有意义的．

以后为叙述方便，函数 f 与 g 的和、差、积、商常分别写作

$$f+g,f-g,fg,\frac{f}{g}.$$

四 复合函数

设有两函数

$$\begin{aligned}y&=f(u),u\in D,\\u&=g(x),x\in E.\end{aligned}\tag{2}$$

记 $E^*=\{x\mid g(x)\in D\}\cap E$．若 $E^*\neq\varnothing$，则对每一个 $x\in E^*$，可通过函数 g 对应 D 内唯一的一个值 u，而 u 又通过函数 f 对应唯一的一个值 y．这就确定了一个定义在 E^* 上的函数，它以 x 为自变量，y 为因变量，记作

$$y=f(g(x)),x\in E^* \text{ 或 } y=(f\circ g)(x),x\in E^*,$$

称为函数 f 和 g 的**复合函数**．并称 f 为**外函数**，g 为**内函数**，(2)式中的 u 为**中间变量**．函数 f 和 g 的复合运算也可简单地写作 $f\circ g$．

例 1 函数 $y=f(u)=\sqrt{u}$，$u\in D=[0,+\infty)$ 与函数 $u=g(x)=1-x^2$，$x\in E=\mathbf{R}$ 的复合函数为

$$y=f(g(x))=\sqrt{1-x^2} \quad \text{或} \quad (f\circ g)(x)=\sqrt{1-x^2},$$

其定义域 $E^*=[-1,1]\subset E$． □

复合函数也可由多个函数相继复合而成．例如，由三个函数 $y=\sin u$，$u=$

$\sqrt{v}$与$v=1-x^2$(它们的定义域取为各自的存在域)相继复合而得的复合函数为

$$y=\sin\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,1].$$

注　当且仅当$E^*\neq\varnothing$(即$D\cap g(E)\neq\varnothing$)时,函数$f$与$g$才能进行复合.例如,以$y=f(u)=\arcsin u, u\in D=[-1,1]$为外函数,$u=g(x)=2+x^2, x\in E=\mathbf{R}$为内函数,就不能进行复合.这是因为外函数的定义域$D=[-1,1]$与内函数的值域$g(E)=[2,+\infty)$不相交.

五　反函数

函数$y=f(x)$的自变量x与因变量y的关系往往是相对的.有时我们不仅要研究y随x而变化的状况,也要研究x随y而变化的状况.对此,我们引入反函数概念.

设函数

$$y=f(x), x\in D \tag{3}$$

满足:对于值域$f(D)$中的每一个值y,D中有且只有一个值x使得

$$f(x)=y,$$

则按此对应法则得到一个定义在$f(D)$上的函数,称这个函数为f的**反函数**,记作

$$f^{-1}: f(D)\to D,$$
$$y\mapsto x$$

或

$$x=f^{-1}(y), y\in f(D). \tag{4}$$

注1　函数f有反函数,意味着f是D与$f(D)$之间的一个一一映射.我们称f^{-1}为映射f的**逆映射**,它把集合$f(D)$映射到集合D,即把$f(D)$中的每一个值$f(a)$对应到D中唯一的一个值a.这时称a为逆映射f^{-1}下$f(a)$的象,而$f(a)$则是a在逆映射f^{-1}下的原象.

从上述讨论还可看到,函数f也是函数f^{-1}的反函数.或者说,f与f^{-1}互为反函数.并有

$$f^{-1}(f(x))\equiv x, x\in D,$$
$$f(f^{-1}(y))\equiv y, y\in f(D).$$

注2　在反函数f^{-1}的表示式(4)中,是以y为自变量,x为因变量.若按习惯仍用x作为自变量的记号,y作为因变量的记号,则函数(3)的反函数(4)可改写为

$$y=f^{-1}(x), x\in f(D). \tag{5}$$

例如,按习惯记法,函数$y=ax+b(a\neq0)$,$y=a^x(a>0,a\neq1)$与$y=\sin x$,

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$的反函数分别是

$$y = \frac{x-b}{a}, y = \log_a x \text{ 与 } y = \arcsin x.$$

应该注意，尽管反函数 f^{-1}的表示式(4)与(5)的形式不同，但它们仍表示同一个函数，因为它们的定义域都是 $f(D)$，对应法则都是 f^{-1}，只是所用变量的记号不同而已.

六 初等函数

在中学数学中，读者已经熟悉基本初等函数有以下六类：

常量函数 $y=c$ （c 是常数）；

幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数）；

指数函数 $y=a^{x}(a>0, a\neq 1)$；

对数函数 $y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$；

三角函数 $y=\sin x$（正弦函数），$y=\cos x$（余弦函数），
$y=\tan x$（正切函数），$y=\cot x$（余切函数）；

反三角函数

$y=\arcsin x$（反正弦函数），$y=\arccos x$（反余弦函数），
$y=\arctan x$（反正切函数），$y=\operatorname{arccot} x$（反余切函数）.

这里我们要指出，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 和指数函数 $y=a^{x}$ 都涉及乘幂，而在中学数学课程中只给出了有理指数乘幂的定义. 下面我们借助确界来定义无理指数幂，使它与有理指数幂一起构成实指数乘幂，并保持有理指数幂的基本性质.

定义 2 给定实数 $a>0, a\neq 1$. 设 x 为无理数，我们规定

$$a^{x} = \begin{cases} \sup\limits_{r<x}\{a^{r} \mid r \text{ 为有理数}\}, \text{当 } a>1 \text{ 时}, & (6) \\ \inf\limits_{r<x}\{a^{r} \mid r \text{ 为有理数}\}, \text{当 } 0<a<1 \text{ 时}. & (7) \end{cases}$$

注 1 对任一无理数 x，必有有理数 r_0，使 $x<r_0$，则当有理数 $r<x$ 时有 $r<r_0$，从而由有理数乘幂的性质，当 $a>1$ 时有 $a^{r}<a^{r_0}$. 这表明非空数集

$$\{a^{r} \mid r<x, r \text{ 为有理数}\}$$

有一个上界 a^{r_0}. 由确界原理，该数集有上确界，所以(6)式右边是一个确定的数. 同理，当 $0<a<1$ 时(7)式右边也是一个定数.

注 2 由 §2 习题 8 可知，当 x 为有理数时，同样可按(6)式和(7)式来表示 a^{x}，而且与我们以前所熟知的有理数乘幂的概念是一致的. 这样，无论 x 是有理数还是无理数，a^{x} 都可用(6)式和(7)式来统一表示.

定义 3 由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所得到的函数，

统称为**初等函数**.

不是初等函数的函数,称为**非初等函数**.如在本节第二段中给出的狄利克雷函数和黎曼函数,都是非初等函数.

习　　题

1. 试作下列函数的图象:

(1) $y=x^2+1$;　　(2) $y=(x+1)^2$;

(3) $y=1-(x+1)^2$;　　(4) $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$;

(5) $y=\begin{cases}3x, & |x|>1,\\ x^3, & |x|<1,\\ 3, & |x|=1.\end{cases}$

2. 试比较函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 分别当 $a=2$ 和 $a=\frac{1}{2}$ 时的图象.

3. 根据图 1-2 写出定义在[0,1]上的分段函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的解析表示式.

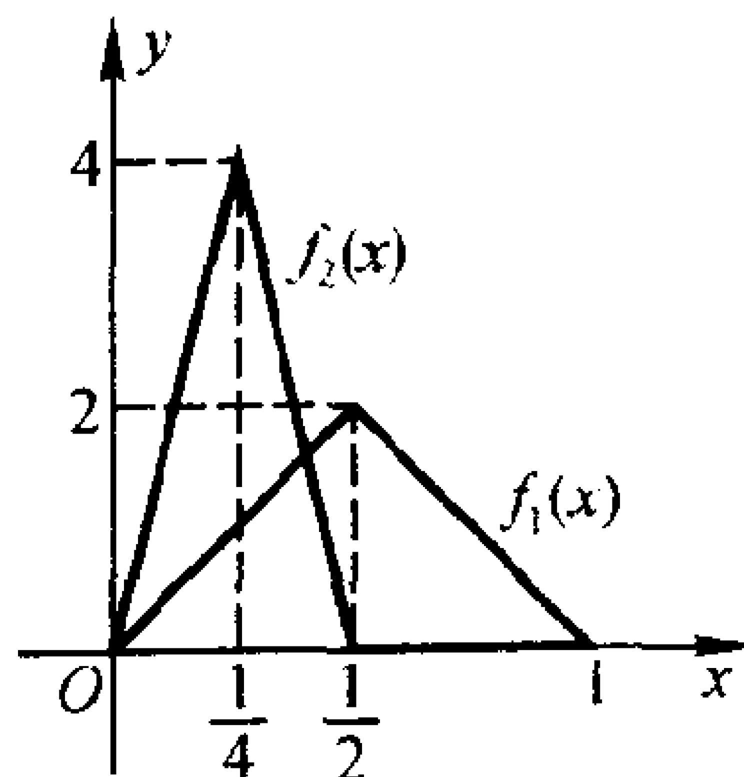


图 1-2

4. 确定下列初等函数的存在域:

(1) $y=\sin(\sin x)$;　　(2) $y=\lg(\lg x)$;

(3) $y=\arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$;　　(4) $y=\lg\left(\arcsin\frac{x}{10}\right)$.

5. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}2+x, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0.\end{cases}$$

求:(1) $f(-3), f(0), f(1)$;(2) $f(\Delta x)-f(0), f(-\Delta x)-f(0)$ $(\Delta x>0)$.

6. 设函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$,求

$f(2+x), f(2x), f(x^2), f(f(x)), f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$.

7. 试问下列函数是由哪些基本初等函数复合而成:

(1) $y=(1+x)^{20}$;　　(2) $y=(\arcsin x^2)^2$;

(3) $y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$;　　(4) $y=2^{\sin^2 x}$.

8. 在什么条件下,函数

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

的反函数就是它本身?

---

9. 试作函数 $y=\arcsin(\sin x)$ 的图象.

10. 试问下列等式是否成立:

(1) $\tan(\arctan x)=x, x\in \mathbf{R}$;

(2) $\arctan(\tan x)=x, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

11. 试问 $y=|x|$是初等函数吗?

12. 证明关于函数 $y=[x]$的如下不等式:

(1) 当 $x>0$ 时,$1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant 1$;

(2) 当 $x<0$ 时,$1\leqslant x\left[\frac{1}{x}\right]<1-x$.

§4 具有某些特性的函数

在本节中,我们将介绍以后常用到的几类具有某些特性的函数.

一 有界函数

定义 1 设 f 为定义在 D 上的函数.若存在数 $M(L)$,使得对每一个 $x\in D$ 有

$$f(x)\leqslant M\ (f(x)\geqslant L),$$

则称 f 为 D 上的**有上(下)界函数**,$M(L)$称为 f 在 D 上的一个**上(下)界**.

根据定义,f 在 D 上有上(下)界,意味着值域 $f(D)$是一个有上(下)界的数集.又若 $M(L)$为 f 在 D 上的上(下)界,则任何大于(小于)$M(L)$的数也是 f 在 D 上的上(下)界.

定义 2 设 f 为定义在 D 上的函数.若存在正数 M,使得对每一个 $x\in D$ 有

$$|f(x)|\leqslant M, \tag{1}$$

则称 f 为 D 上的**有界函数**.

根据定义,f 在 D 上有界,意味着值域 $f(D)$是一个有界集.又按定义不难验证:f 在 D 上有界的充要条件是 f 在 D 上既有上界又有下界.(1)式的几何意义是:若 f 为 D 上的有界函数,则 f 的图象完全落在直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

例如,正弦函数 $\sin x$ 和余弦函数 $\cos x$ 为 $\mathbf{R}$ 上的有界函数,因为对每一个 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $|\sin x|\leqslant 1$ 和 $|\cos x|\leqslant 1$.

关于函数 f 在数集 D 上无上界、无下界或无界的定义,可按上述相应定义的否定说法来叙述.例如,设 f 为定义在 D 上的函数,若对任何 M(无论 M 多大),都存在 $x_0\in D$,使得 $f(x_0)>M$,则称 f 为 D 上的**无上界函数**.

作为练习,读者可自行写出无下界函数与无界函数的定义.

例1 证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 为 $(0,1]$ 上的无上界函数.

证 对任何正数 M,取 $(0,1]$ 上一点 $x_0=\dfrac{1}{M+1}$,则有

$$f(x_0)=\frac{1}{x_0}=M+1>M.$$

故按上述定义,f 为 $(0,1]$ 上的无上界函数. □

前面已经指出,f 在其定义域 D 上有上界,是指值域 $f(D)$ 为有上界的数集.于是由确界原理,数集 $f(D)$ 有上确界.通常,我们把 $f(D)$ 的上确界记为 $\sup\limits_{x\in D}f(x)$,并称之为 f 在 D 上的上确界.类似地,若 f 在其定义域 D 上有下界,则 f 在 D 上的下确界记为 $\inf\limits_{x\in D}f(x)$.

例2 设 f,g 为 D 上的有界函数.证明:

(i) $\inf\limits_{x\in D}f(x)+\inf\limits_{x\in D}g(x)\leqslant\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$;

(ii) $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\leqslant\sup\limits_{x\in D}f(x)+\sup\limits_{x\in D}g(x)$.

证 (i)对任何 $x\in D$ 有

$$\inf_{x\in D}f(x)\leqslant f(x),\inf_{x\in D}g(x)\leqslant g(x)\Rightarrow\inf_{x\in D}f(x)+\inf_{x\in D}g(x)\leqslant f(x)+g(x).$$

上式表明,数 $\inf\limits_{x\in D}f(x)+\inf\limits_{x\in D}g(x)$ 是函数 $f+g$ 在 D 上的一个下界,从而

$$\inf_{x\in D}f(x)+\inf_{x\in D}g(x)\leqslant\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}.$$

(ii) 可类似地证明(略). □

注 例2中的两个不等式,其严格的不等号有可能成立.例如,设

$$f(x)=x,g(x)=-x,x\in[-1,1],$$

则有 $\inf\limits_{|x|\leqslant1}f(x)=\inf\limits_{|x|\leqslant1}g(x)=-1$, $\sup\limits_{|x|\leqslant1}f(x)=\sup\limits_{|x|\leqslant1}g(x)=1$,而

$$\inf_{|x|\leqslant1}\{f(x)+g(x)\}=\sup_{|x|\leqslant1}\{f(x)+g(x)\}=0.$$

二 单调函数

定义3 设 f 为定义在 D 上的函数.若对任何 $x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时,总有

(i) $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称 f 为 D 上的**增函数**,特别当成立严格不等式 $f(x_1)<f(x_2)$ 时,称 f 为 D 上的**严格增函数**;

(ii) $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称 f 为 D 上的**减函数**,特别当成立严格不等式 $f(x_1)>f(x_2)$ 时,称 f 为 D 上的**严格减函数**;

增函数和减函数统称为**单调函数**,严格增函数和严格减函数统称为**严格单调函数**.

例3 函数 $y=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格增的.因为对任何 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,当 $x_1<x_2$

时总有

$$x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)\left[\left(x_2 + \frac{x_1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2\right] > 0,$$

即 $x_1^3 < x_2^3$. □

例4 函数 $y=[x]$在 $\mathbf{R}$ 上是增的. 因为对任何 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 当 $x_1 < x_2$ 时显然有$[x_1] \leqslant [x_2]$. 但此函数在 $\mathbf{R}$ 上不是严格增的,若取 $x_1=0, x_2=\frac{1}{2}$,则有$[x_1]=[x_2]=0$,即定义中所要求的严格不等式不成立. 此函数的图象如图 1-3 所示. □

严格单调函数的图象与任一平行于 x 轴的直线至多有一个交点,这一特性保证了它必定具有反函数.

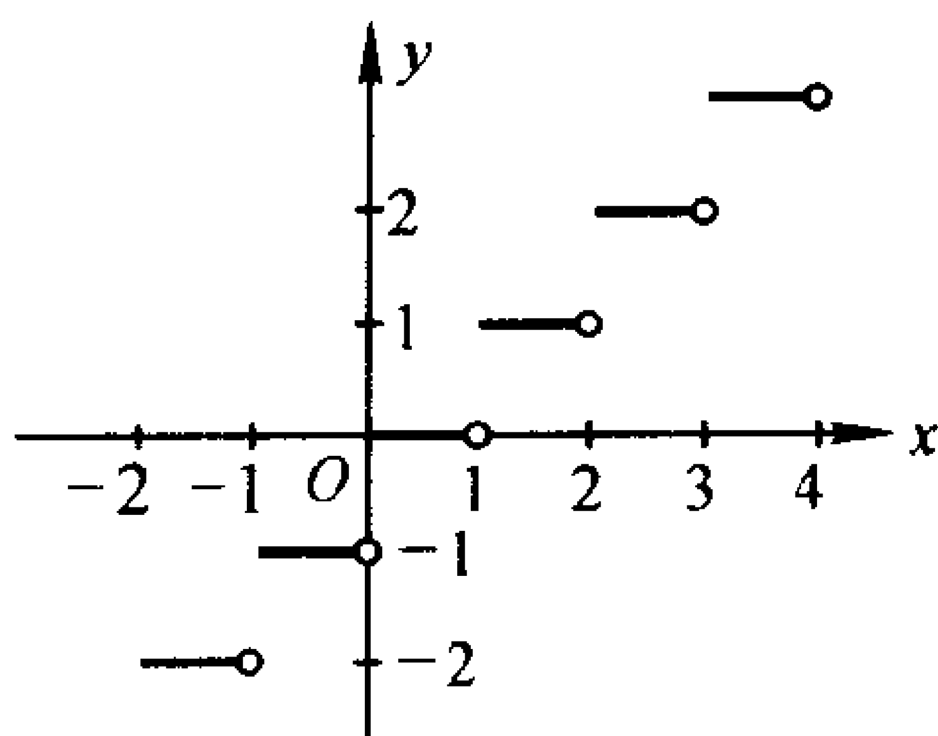


图 1-3

定理 1.2 设 $y=f(x), x \in D$ 为严格增(减)函数,则 f 必有反函数f^{-1},且 f^{-1}在其定义域$f(D)$上也是严格增(减)函数.

证 设 f 在D 上严格增. 对任一 $y \in f(D)$,有 $x \in D$ 使$f(x)=y$. 下面证明这样的 x 只能有一个. 事实上,对于 D 内任一$x_1 \neq x$,由 f 在D 上的严格增性,当 $x_1 < x$ 时$f(x_1) < y$,当 $x_1 > x$ 时有$f(x_1) > y$,总之 $f(x_1) \neq y$. 这就说明,对每一个 $y \in f(D)$,都只存在唯一的一个 $x \in D$,使得 $f(x)=y$,从而函数 f 存在反函数$x=f^{-1}(y)$, $y \in f(D)$.

现证 f^{-1}也是严格增的. 任取 $y_1, y_2 \in f(D), y_1 < y_2$. 设 $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$,则 $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$. 由 $y_1 < y_2$ 及 f 的严格增性,显然有 $x_1 < x_2$,即 $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. 所以反函数 f^{-1}是严格增的. □

例5 函数 $y=x^2$ 在$(-\infty, 0)$上是严格减的,有反函数(按习惯记法)$y=-\sqrt{x}, x \in (0, +\infty)$; $y=x^2$ 在$[0, +\infty)$上是严格增的,有反函数 $y=\sqrt{x}, x \in [0, +\infty)$。但 $y=x^2$ 在整个定义域 $\mathbf{R}$ 上不是单调的,也不存在反函数. □

上节中我们给出了实指数幂的定义,从而将指数函数

$$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$$

的定义域拓广到整个实数集 $\mathbf{R}$. 下面证明指数函数在 $\mathbf{R}$ 上的严格单调性.

例6 证明: $y=a^x$ 当$a>1$ 时在 $\mathbf{R}$ 上严格增;当$0<a<1$ 时在 $\mathbf{R}$ 上严格递减.

证 设 $a>1$. 给定 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 < x_2$. 由有理数集的稠密性,可取到有理数 r_1, r_2,使 $x_1 < r_1 < r_2 < x_2$(参见 §1 例 1),故有

$$a^{x_1} = \sup_{r < x_1} \{a^r \mid r \text{ 为有理数}\} \leqslant a^{r_1}$$

$$< a^{r_2} \leqslant \sup_{r<x_2}\{a^r \mid r \text{ 为有理数}\} = a^{x_2},$$

这就证明了 a^x 当 $a>1$ 时在 $\mathbf{R}$ 上严格递增.

类似地可证 a^x 当 $0<a<1$ 时在 $\mathbf{R}$ 上严格递减. □

注　由例 6 及定理 1.2 还可得出结论:对数函数 $y=\log_a x$ 当 $a>1$ 时在 $(0,+\infty)$ 上严格递增,当 $0<a<1$ 时在 $(0,+\infty)$ 上严格递减.另外,在第四章中将证明关于实指数幂的一个基本性质 $(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta}$(定理 4.10),从而相应地有

$$\log_a x^\alpha = \alpha\log_a x\,(a>0, a\neq 1, x\in\mathbf{R}^+, \alpha\in\mathbf{R}). \tag{2}$$

三　奇函数和偶函数

定义 4　设 D 为对称于原点的数集,f 为定义在 D 上的函数.若对每一个 $x\in D$ 有

$$f(-x) = -f(x)\ (f(-x) = f(x)),$$

则称 f 为 D 上的**奇(偶)函数**.

从函数图形上看,奇函数的图象关于原点对称,偶函数的图象则关于 y 轴对称.

例如,正弦函数 $y=\sin x$ 和正切函数 $y=\tan x$ 是奇函数,余弦函数 $y=\cos x$ 是偶函数,符号函数 $y=\operatorname{sgn} x$ 是奇函数(见图 1-1).而函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数,也不是偶函数,因若取 $x_0=\frac{\pi}{4}$,则 $f(x_0)=\sqrt{2}$,$f(-x_0)=0$,显然既不成立 $f(-x_0)=-f(x_0)$,也不成立 $f(-x_0)=f(x_0)$.

四　周期函数

设 f 为定义在数集 D 上的函数.若存在 $\sigma>0$,使得对一切 $x\in D$ 有 $f(x\pm\sigma)=f(x)$,则称 f 为**周期函数**,σ 称为 f 的一个**周期**.显然,若 σ 为 f 的周期,则 $n\sigma$(n 为正整数)也是 f 的周期.若在周期函数 f 的所有周期中有一个最小的周期,则称此最小周期为 f 的**基本周期**,或简称**周期**.

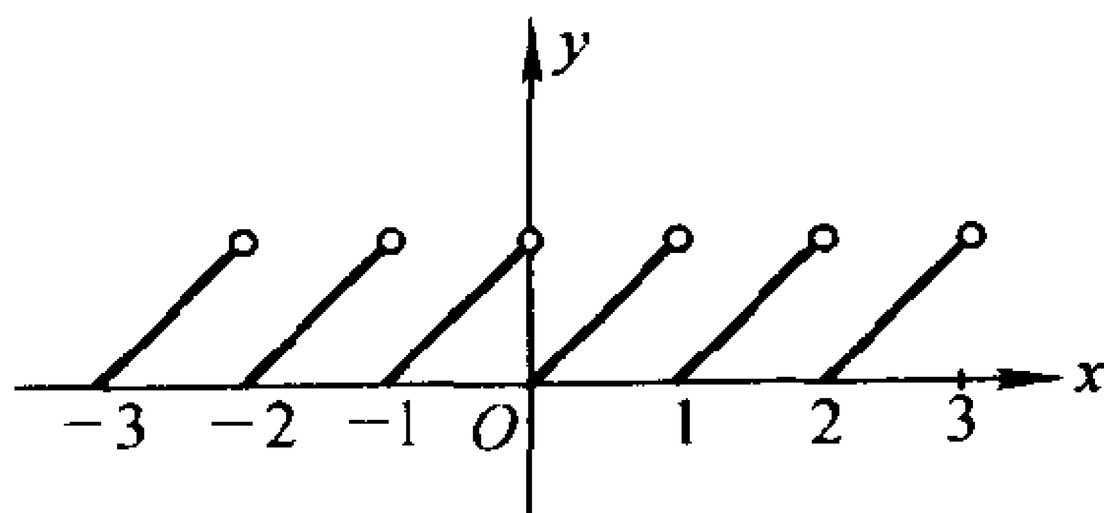


图 1-4

例如,$\sin x$ 的周期为 2π,$\tan x$ 的周期为 π.函数

$$f(x) = x-[x], x\in\mathbf{R}$$

的周期为 1(见图 1-4).常量函数 $f(x)=c$ 是以任何正数为周期的周期函数,但不存在基本周期.

习　　题

1. 证明 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的有界函数.

2. (1) 叙述无界函数的定义;

(2) 证明 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 为 $(0,1)$ 上的无界函数;

(3) 举出函数 f 的例子,使 f 为闭区间 $[0,1]$ 上的无界函数.

3. 证明下列函数在指定区间上的单调性:

(1) $y=3x-1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递增;

(2) $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上严格递增;

(3) $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上严格递减.

4. 判别下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\frac{1}{2}x^4+x^2-1$;　　(2) $f(x)=x+\sin x$;

(3) $f(x)=x^2e^{-x^2}$;　　(4) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

5. 求下列函数的周期:

(1) $\cos^2 x$;　(2) $\tan 3x$;　(3) $\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{3}$.

6. 设函数 f 定义在 $[-a,a]$ 上,证明:

(1) $F(x)=f(x)+f(-x)$, $x\in[-a,a]$ 为偶函数;

(2) $G(x)=f(x)-f(-x)$, $x\in[-a,a]$ 为奇函数;

(3) f 可表示为某个奇函数与某个偶函数之和.

---

7. 设 f、g 为定义在 D 上的有界函数,满足

$$f(x)\leqslant g(x),x\in D.$$

证明:(1) $\sup\limits_{x\in D}f(x)\leqslant\sup\limits_{x\in D}g(x)$;　(2) $\inf\limits_{x\in D}f(x)\leqslant\inf\limits_{x\in D}g(x)$.

8. 设 f 为定义在 D 上的有界函数,证明:

(1) $\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\inf\limits_{x\in D}f(x)$;　(2) $\inf\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\sup\limits_{x\in D}f(x)$.

9. 证明: $\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上无界,而在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内任一闭区间 $[a,b]$ 上有界.

10. 讨论狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1,\text{当 } x \text{ 为有理数},\\0,\text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

的有界性、单调性与周期性.

11. 证明: $f(x)=x+\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上严格增.

12. 设定义在 $[a,+\infty)$ 上的函数 f 在任何闭区间 $[a,b]$ 上有界. 定义 $[a,+\infty)$ 上的函

数：

$$m(x)=\inf_{a\leqslant y\leqslant x}f(y),M(x)=\sup_{a\leqslant y\leqslant x}f(y).$$

试讨论 $m(x)$与 $M(x)$的图象,其中

(1) $f(x)=\cos x,x\in[0,+\infty)$; (2) $f(x)=x^2,x\in[-1,+\infty)$.

总 练 习 题

1. 设 $a,b\in\mathbf{R}$,证明：

(1) $\max\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$;

(2) $\min\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$.

2. 设 f 和 g 都是 D 上的初等函数.定义

$$M(x)=\max\{f(x),g(x)\},m(x)=\min\{f(x),g(x)\},x\in D.$$

试问 $M(x)$和 $m(x)$是否为初等函数?

3. 设函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$,求：

$$f(-x),f(x+1),f(x)+1,f\left(\frac{1}{x}\right),\frac{1}{f(x)},f(x^2),f(f(x)).$$

4. 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$,求 $f(x)$.

5. 利用函数 $y=[x]$求解：

(1) 某系各班级推选学生代表,每 5 人推选 1 名代表,余额满 3 人可增选 1 名.写出可推选代表数 y 与班级学生数 x 之间的函数关系(假设每班学生数为 30~50 人);

(2) 正数 x 经四舍五入后得整数 y,写出 y 与 x 之间的函数关系.

6. 已知函数 $y=f(x)$的图象,试作下列各函数的图象：

(1) $y=-f(x)$; (2) $y=f(-x)$; (3) $y=-f(-x)$;

(4) $y=|f(x)|$; (5) $y=\operatorname{sgn}f(x)$;

(6) $y=\frac{1}{2}[|f(x)|+f(x)]$; (7) $y=\frac{1}{2}[|f(x)|-f(x)]$.

7. 已知函数 f 和 g 的图象,试作下列函数的图象：

(1) $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$; (2) $\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$.

8. 设 f、g 和 h 为增函数,满足

$$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x),x\in\mathbf{R}.$$

证明：$f(f(x))\leqslant g(g(x))\leqslant h(h(x))$.

9. 设 f 和 g 为区间(a,b)上的增函数,证明第 7 题中定义的函数 $\varphi(x)$和 $\psi(x)$也都是(a,b)上的增函数.

10. 设 f 为$[-a,a]$上的奇(偶)函数.证明：若 f 在$[0,a]$上增,则 f 在$[-a,0]$上增(减).

11. 证明：

(1) 两个奇函数之和为奇函数,其积为偶函数;

(2) 两个偶函数之和与积都为偶函数;

(3) 奇函数与偶函数之积为奇函数.

12. 设 f,g 为 D 上的有界函数. 证明:

(1) $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\leqslant\inf\limits_{x\in D}f(x)+\sup\limits_{x\in D}g(x)$;

(2) $\sup\limits_{x\in D}f(x)+\inf\limits_{x\in D}g(x)\leqslant\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$.

13. 设 f,g 为 D 上的非负有界函数. 证明:

(1) $\inf\limits_{x\in D}f(x)\cdot\inf\limits_{x\in D}g(x)\leqslant\inf\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}$;

(2) $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}\leqslant\sup\limits_{x\in D}f(x)\cdot\sup\limits_{x\in D}g(x)$.

14. 将定义在 $[0,+\infty)$ 上的函数 f 延拓到 $\mathbf{R}$ 上,使延拓后的函数为(i)奇函数;(ii)偶函数. 设

(1) $f(x)=\sin x+1$;

(2) $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{1-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^3, & x>1.\end{cases}$

15. 设 f 为定义在 $\mathbf{R}$ 上以 h 为周期的函数,a 为实数. 证明:若 f 在 $[a,a+h]$ 上有界,则 f 在 $\mathbf{R}$ 上有界.

16. 设 f 在区间 I 上有界. 记

$$M=\sup_{x\in I}f(x),\quad m=\inf_{x\in I}f(x).$$

证明

$$\sup_{x',x''\in I}|f(x')-f(x'')|=M-m.$$

第二章 数列极限

§1 数列极限概念

若函数 f 的定义域为全体正整数集合 $\mathbf{N}_+$，则称

$$f:\mathbf{N}_+\to\mathbf{R} \quad 或 \quad f(n),\ n\in\mathbf{N}_+$$

为**数列**.因正整数集 $\mathbf{N}_+$ 的元素可按由小到大的顺序排列，故数列 $f(n)$ 也可写作

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots,$$

或简单地记为 $\{a_n\}$，其中 a_n 称为该数列的**通项**.

关于数列极限，先举一个我国古代有关数列的例子.

例 1 古代哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》引用过一句话："一尺之棰，日取其半，万世不竭"，其含义是：一根长为一尺的木棒，每天截下一半，这样的过程可以无限制地进行下去.

把每天截下部分的长度列出如下(单位为尺)：

第一天截下$\frac{1}{2}$，第二天截下$\frac{1}{2^2}$，……，第 n 天截下$\frac{1}{2^n}$，……这样就得到一个数列

$$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots \text{或} \left\{\frac{1}{2^n}\right\}.$$

不难看出，数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$的通项$\frac{1}{2^n}$随着 n 的无限增大而无限地接近于 0.一般地说，对于数列$\{a_n\}$，若当 n 无限增大时 a_n 能无限地接近某一个常数 a，则称此数列为收敛数列，常数 a 称为它的极限.不具有这种特性的数列就不是收敛数列.

收敛数列的特性是"随着 n 的无限增大，a_n 无限地接近某一常数 a".这就是说，当 n 充分大时，数列的通项 a_n 与常数 a 之差的绝对值可以任意小.下面我们给出收敛数列及其极限的精确定义.

定义 1 设$\{a_n\}$为数列，a 为定数.若对任给的正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时有

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

则称**数列**$\{a_n\}$**收敛于** a，定数 a 称为数列$\{a_n\}$的**极限**，并记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a^{①}, \text{或 } a_n \to a(n\to\infty),$$

读作“当 n 趋于无穷大时，a_n 的极限等于 a 或 a_n 趋于 a”.

若数列 $\{a_n\}$ 没有极限，则称 $\{a_n\}$ 不收敛，或称 $\{a_n\}$ 为**发散数列**.

定义 1 常称为**数列极限的** $\varepsilon-N$ **定义**. 下面举例说明如何根据 $\varepsilon-N$ 定义来验证数列极限.

例 2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=0$，这里 α 为正数.

证 由于

$$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right| = \frac{1}{n^\alpha},$$

故对任给的 $\varepsilon>0$，只要取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，便有

$$\frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{N^\alpha} < \varepsilon \quad \text{即} \left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right| < \varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=0$. □

例 3 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2-3} = 3.$$

分析 由于

$$\left|\frac{3n^2}{n^2-3}-3\right| = \frac{9}{n^2-3} \leqslant \frac{9}{n} \quad (n\geqslant 3). \tag{1}$$

因此，对任给的 $\varepsilon>0$，只要 $\dfrac{9}{n}<\varepsilon$，便有

$$\left|\frac{3n^2}{n^2-3}-3\right| < \varepsilon, \tag{2}$$

即当 $n>\dfrac{9}{\varepsilon}$ 时，(2)式成立. 又由于(1)式是在 $n\geqslant 3$ 的条件下成立的，故应取

$$N = \max\left\{3, \frac{9}{\varepsilon}\right\}. \tag{3}$$

证 任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\max\left\{3,\dfrac{9}{\varepsilon}\right\}$. 据分析，当 $n>N$ 时有(2)式成立. 于是本题得证. □

注 本例在求 N 的过程中，(1)式中运用了适当放大的方法，这样求 N 就比较方便. 但应注意这种放大必须“适当”，以根据给定的 ε 能确定出 N. 又(3)式

① 记号 lim 是拉丁文 limes(极限)一词的前三个字母. 由于 n 限于取正整数，所以在表示数列极限的记号中把 $n\to+\infty$ 简单地写作 $n\to\infty$.

给出的 N 不一定是正整数. 一般地,在定义 1 中 N 不一定限于正整数,而只要它是正数即可.

例 4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$,这里 $|q|<1$.

证 若 $q=0$,则结果是显然的. 现设 $0<|q|<1$. 记 $h=\frac{1}{|q|}-1$,则 $h>0$. 我们有

$$|q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{(1+h)^n},$$

并由 $(1+h)^n \geqslant 1+nh$ 得到

$$|q|^n \leqslant \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh}. \tag{4}$$

对任给的 $\varepsilon>0$,只要取 $N=\frac{1}{\varepsilon h}$,则当 $n>N$ 时,由(4)式得 $|q^n-0|<\varepsilon$. 这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$. □

当 $q=\frac{1}{2}$ 时,就是前面例 1 的结果.

注 本例还可利用对数函数 $y=\lg x$ 的严格增性来证明(见第一章 §4 例 6 的注及(2)式),简述如下:

对任给的 $\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<1$),为使 $|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon$,只要

$$n\lg|q| < \lg\varepsilon \quad 即\ n > \frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|} \quad (这里也假定\ 0<|q|<1).$$

于是,只要取 $N=\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$ 即可.

例 5 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$,其中 $a>0$.

证 当 $a=1$ 时,结论显然成立. 现设 $a>1$. 记 $\alpha=a^{\frac{1}{n}}-1$,则 $\alpha>0$. 由

$$a=(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha = 1+n(a^{\frac{1}{n}}-1)$$

得

$$a^{\frac{1}{n}}-1 \leqslant \frac{a-1}{n}. \tag{5}$$

任给 $\varepsilon>0$,由(5)式可见,当 $n>\frac{a-1}{\varepsilon}=N$ 时,就有 $a^{\frac{1}{n}}-1<\varepsilon$,即 $|a^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$. 对于 $0<a<1$ 的情形,其证明留给读者. □

关于数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义,通过以上几个例子,读者已有了初步的认识. 对此还应着重注意下面几点:

1. **ε 的任意性** 定义 1 中正数 ε 的作用在于衡量数列通项 a_n 与定数 a 的接近程度,ε 愈小,表示接近得愈好;而正数 ε 可以任意地小,说明 a_n 与 a 可以

接近到任何程度.然而,尽管 ε 有其任意性,但一经给出,就暂时地被确定下来,以便依靠它来求出 N.又 ε 既是任意小的正数,那么 $\frac{\varepsilon}{2}$,3ε 或 ε^2 等等同样也是任意小的正数,因此定义 1 中不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$ 中的 ε 可用 $\frac{\varepsilon}{2}$,3ε 或 ε^2 等来代替.同时,正由于 ε 是任意小正数,我们可限定 ε 小于一个确定的正数(如在例 4 的注给出的证明方法中限定 $\varepsilon<1$).另外,定义 1 中的 $|a_n-a|<\varepsilon$ 也可改写成 $|a_n-a|\leqslant\varepsilon$.

2. N 的相应性　一般说,N 随 ε 的变小而变大,由此常把 N 写作 $N(\varepsilon)$,来强调 N 是依赖于 ε 的;但这并不意味着 N 是由 ε 所唯一确定的,因为对给定的 ε,比如当 $N=100$ 时能使得当 $n>N$ 时有 $|a_n-a|<\varepsilon$,则 $N=101$ 或更大时此不等式自然也成立.这里重要的是 N 的存在性,而不在于它的值的大小.另外,定义 1 中的 $n>N$ 也可改写成 $n\geqslant N$.

3. 从几何意义上看,"当 $n>N$ 时有 $|a_n-a|<\varepsilon$"意味着:所有下标大于 N 的项 a_n 都落在邻域 $U(a;\varepsilon)$ 内;而在 $U(a;\varepsilon)$ 之外,数列 $\{a_n\}$ 中的项至多只有 N 个(有限个).反之,任给 $\varepsilon>0$,若在 $U(a;\varepsilon)$ 之外数列 $\{a_n\}$ 中的项只有有限个,设这有限个项的最大下标为 N,则当 $n>N$ 时有 $a_n\in U(a;\varepsilon)$,即当 $n>N$ 时有 $|a_n-a|<\varepsilon$.由此,我们可写出数列极限的一种等价定义如下:

定义 1′　任给 $\varepsilon>0$,若在 $U(a;\varepsilon)$ 之外数列 $\{a_n\}$ 中的项至多只有有限个,则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于极限 a.

由定义 1′可知,若存在某 $\varepsilon_0>0$,使得数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个项落在 $U(a;\varepsilon_0)$ 之外,则 $\{a_n\}$ 一定不以 a 为极限.

例 6　证明 $\{n^2\}$ 和 $\{(-1)^n\}$ 都是发散数列.

证　对任何 $a\in\mathbf{R}$,取 $\varepsilon_0=1$,则数列 $\{n^2\}$ 中所有满足 $n>a+1$ 的项(有无穷多个)显然都落在 $U(a;\varepsilon_0)$ 之外,故 $\{n^2\}$ 不以任何数 a 为极限,即 $\{n^2\}$ 为发散数列.

至于数列 $\{(-1)^n\}$,当 $a=1$ 时取 $\varepsilon_0=1$,则在 $U(a;\varepsilon_0)$ 之外有 $\{(-1)^n\}$ 中的所有奇数项;当 $a\neq1$ 时取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}|a-1|$,则在 $U(a;\varepsilon_0)$ 之外有 $\{(-1)^n\}$ 中的所有偶数项.所以 $\{(-1)^n\}$ 不以任何数 a 为极限,即 $\{(-1)^n\}$ 为发散数列. □

例 7　设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$,作数列 $\{z_n\}$ 如下:

$$\{z_n\}:x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_n,y_n,\cdots.$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

证　因 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$,故对任给的 $\varepsilon>0$,数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 中落在 $U(a;\varepsilon)$ 之外的项都至多只有有限个.所以数列 $\{z_n\}$ 中落在 $U(a;\varepsilon)$ 之外的项

也至多只有有限个.故由定义1′,证得$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.　□

例8　设$\{a_n\}$为给定的数列,$\{b_n\}$为对$\{a_n\}$增加、减少或改变有限项之后得到的数列.证明:数列$\{b_n\}$与$\{a_n\}$同时为收敛或发散,且在收敛时两者的极限相等.

证　设$\{a_n\}$为收敛数列,且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.按定义1′,对任给的$\varepsilon>0$,数列$\{a_n\}$中落在$U(a;\varepsilon)$之外的项至多只有有限个.而数列$\{b_n\}$是对$\{a_n\}$增加、减少或改变有限项之后得到的,故从某一项开始,$\{b_n\}$中的每一项都是$\{a_n\}$中确定的一项,所以$\{b_n\}$中落在$U(a;\varepsilon)$之外的项也至多只有有限个.这就证得$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

现设$\{a_n\}$发散.倘若$\{b_n\}$收敛,则因$\{a_n\}$可看成是对$\{b_n\}$增加、减少或改变有限项之后得到的数列,故由刚才所证,$\{a_n\}$收敛,矛盾.所以当$\{a_n\}$发散时$\{b_n\}$也发散.　□

在所有收敛数列中,有一类重要的数列,称为无穷小数列,其定义如下:

定义2　若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,则称$\{a_n\}$为**无穷小数列**.

前面例1、2、4中的数列都是无穷小数列.由无穷小数列的定义,读者不难证明如下命题:

定理2.1　数列$\{a_n\}$收敛于a的充要条件是:$\{a_n - a\}$为无穷小数列.

习　题

1.设$a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$, $n=1,2,\cdots,a=0$.

(1)对下列ε分别求出极限定义中相应的N:

$$\varepsilon_1 = 0.1,\quad \varepsilon_2 = 0.01,\quad \varepsilon_3 = 0.001;$$

(2)对$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$可找到相应的$N$,这是否证明了$a_n$趋于0?应该怎样做才对;

(3)对给定的ε是否只能找到一个N?

2.按$\varepsilon-N$定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{2n^2-1}=\frac{3}{2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$;　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}=0$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0\quad(a>1)$.

3.根据例2,例4和例5的结果求出下列极限,并指出哪些是无穷小数列:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}$;　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}$;　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2^n}}$;　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{10}$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$.

4. 证明:若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则对任一正整数$k$,有$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+k}=a$.

5. 试用定义1′证明:

(1) 数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$不以1为极限;(2)数列$\{n^{(-1)^n}\}$发散.

6. 证明定理2.1,并应用它证明数列$\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$的极限是1.

---

7. 证明:若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.当且仅当$a$为何值时反之也成立?

8. 按$\varepsilon-N$定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$,其中

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}, & n\text{ 为偶数},\\ \dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

§2　收敛数列的性质

收敛数列有如下一些重要性质:

定理2.2(唯一性)　若数列$\{a_n\}$收敛,则它只有一个极限.

证　设a是$\{a_n\}$的一个极限.我们证明:对任何数$b\neq a$,b不是$\{a_n\}$的极限.事实上,若取$\varepsilon_0=\frac{1}{2}|b-a|$,则按定义1′,在$U(a;\varepsilon_0)$之外至多只有$\{a_n\}$中有限个项,从而在$U(b;\varepsilon_0)$内至多只有$\{a_n\}$中有限个项,所以$b$不是$\{a_n\}$的极限.这就证明了收敛数列只能有一个极限.　□

一个收敛数列一般含有无穷多个数,而它的极限只是一个数.我们单凭这一个数就能精确地估计出几乎全体项的大小.以下收敛数列的一些性质,大都基于这一事实.

定理2.3(有界性)　若数列$\{a_n\}$收敛,则$\{a_n\}$为有界数列,即存在正数M,使得对一切正整数n有

$$|a_n|\leqslant M.$$

证　设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.取$\varepsilon=1$,存在正数$N$,对一切$n>N$有

$$|a_n-a|<1\quad\text{即}\quad a-1<a_n<a+1.$$

记

$$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,|a-1|,|a+1|\},$$

则对一切正整数 n 都有 $|a_n|\leqslant M$. □

注 有界性只是数列收敛的必要条件,而非充分条件.例如数列 $\{(-1)^n\}$ 有界,但它并不收敛(见§1 例 6).

定理 2.4(保号性) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$(或 <0),则对任何 $a'\in(0,a)$(或 $a'\in(a,0)$),存在正数 N,使得当 $n>N$ 时有 $a_n>a'$(或 $a_n<a'$).

证 设 $a>0$.取 $\varepsilon=a-a'(>0)$,则存在正数 N,使得当 $n>N$ 时有 $a_n>a-\varepsilon=a'$,这就证得结果.对于 $a<0$ 的情形,也可类似地证明. □

注 在应用保号性时,经常取 $a'=\frac{a}{2}$.

定理 2.5(保不等式性) 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为收敛数列.若存在正数 N_0,使得当 $N>N_0$ 时有 $a_n\leqslant b_n$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$.任给 $\varepsilon>0$,分别存在正数 N_1 与 N_2,使得当 $n>N_1$ 时有

$$a-\varepsilon<a_n, \tag{1}$$

当 $n>N_2$ 时有

$$b_n<b+\varepsilon. \tag{2}$$

取 $N=\max\{N_0,N_1,N_2\}$,则当 $n>N$ 时,按假设及不等式(1)和(2)有

$$a-\varepsilon<a_n\leqslant b_n<b+\varepsilon,$$

由此得到 $a<b+2\varepsilon$.由 ε 的任意性推得 $a\leqslant b$(参见第一章§1 例 2),即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. □

请读者自行思考:如果把定理 2.5 中的条件 $a_n\leqslant b_n$ 换成严格不等式 $a_n<b_n$,那么能否把结论换成 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}b_n$?

例 1 设 $a_n\geqslant0(n=1,2,\cdots)$.证明:若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}. \tag{3}$$

证 由定理 2.5 可得 $a\geqslant0$.

若 $a=0$,则由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,任给 $\varepsilon>0$,存在正数 N,使得当 $n>N$ 时有 $a_n<\varepsilon^2$,从而 $\sqrt{a_n}<\varepsilon$ 即 $|\sqrt{a_n}-0|<\varepsilon$,故有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=0$.

若 $a>0$,则有

$$|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|=\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\leqslant\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a}}.$$

任给 $\varepsilon>0$,由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,存在正数 N,使得当 $n>N$ 时有

$$|a_n-a|<\sqrt{a}\varepsilon,$$

从而$|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|<\varepsilon$.(3)式得证. □

定理 2.6(迫敛性) 设收敛数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都以a为极限,数列$\{c_n\}$满足:存在正数N_0,当$n>N_0$时有

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n, \tag{4}$$

则数列$\{c_n\}$收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=a$.

证 任给$\varepsilon>0$,由$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=a$,分别存在正数$N_1$与$N_2$,使得当$n>N_1$时有

$$a-\varepsilon<a_n, \tag{5}$$

当$n>N_2$时有

$$b_n<a+\varepsilon. \tag{6}$$

取$N=\max\{N_0,N_1,N_2\}$,则当$n>N$时,不等式(4)、(5)、(6)同时成立,即有

$$a-\varepsilon<a_n \leqslant c_n \leqslant b_n<a+\varepsilon.$$

从而有$|c_n-a|<\varepsilon$,这就证得所要的结果. □

定理 2.6 不仅给出了判定数列收敛的一种方法,而且也提供了一个求极限的工具.

例 2 求数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的极限.

解 记$a_n=\sqrt[n]{n}=1+h_n$,这里$h_n>0\ (n>1)$,则有

$$n=(1+h_n)^n>\frac{n(n-1)}{2}h_n^2.$$

由上式得 $0<h_n<\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}\ (n>1)$,从而有

$$1 \leqslant a_n=1+h_n \leqslant 1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}. \tag{7}$$

数列$\left\{1+\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}\right\}$是收敛于1的,因对任给的$\varepsilon>0$,取$N=1+\dfrac{2}{\varepsilon^2}$,则当$n>N$时有$\left|1+\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}-1\right|<\varepsilon$.于是,不等式(7)的左右两边的极限皆为1,故由迫敛性证得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. □

在求数列极限时,常需要使用极限的四则运算法则.

定理 2.7(四则运算法则) 若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$为收敛数列,则$\{a_n+b_n\}$,$\{a_n-b_n\}$,$\{a_n\cdot b_n\}$也都是收敛数列,且有

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

特别当b_n为常数c时有

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+c)=\lim_{n\to\infty}a_n+c,\lim_{n\to\infty}ca_n=c\lim_{n\to\infty}a_n.$$

若再假设 $b_n\neq0$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq0$，则 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 也是收敛数列，且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}a_n\Big/\lim_{n\to\infty}b_n.$$

证 由于 $a_n-b_n=a_n+(-1)b_n$ 及 $\dfrac{a_n}{b_n}=a_n\cdot\dfrac{1}{b_n}$，因此我们只须证明关于和、积与倒数运算的结论即可.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则对任给的 $\varepsilon>0$，分别存在正数 N_1 与 N_2，使得

$$|a_n-a|<\varepsilon,\text{当 } n>N_1,$$

$$|b_n-b|<\varepsilon,\text{当 } n>N_2.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时上述两不等式同时成立，从而有

1. $|(a_n+b_n)-(a+b)|\leqslant|a_n-a|+|b_n-b|<2\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b.$

2. $$|a_nb_n-ab|=|(a_n-a)b_n+a(b_n-b)|\leqslant|a_n-a||b_n|+|a||b_n-b|. \tag{8}$$

由收敛数列的有界性定理，存在正数 M，对一切 n 有 $|b_n|<M$. 于是，当 $n>N$ 时由(8)式可得

$$|a_nb_n-ab|<(M+|a|)\varepsilon.$$

由 ε 的任意性，这就证得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=ab$.

3. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\neq0$，根据收敛数列的保号性，存在正数 N_3，使得当 $n>N_3$ 时有 $|b_n|>\dfrac{1}{2}|b|$. 取 $N'=\max\{N_2,N_3\}$，则当 $n>N'$ 时有

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\frac{|b_n-b|}{|b_nb|}<\frac{2|b_n-b|}{b^2}<\frac{2\varepsilon}{b^2}.$$

由 ε 的任意性，这就证得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{b}$. □

例3 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_mn^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1n+a_0}{b_kn^k+b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1n+b_0},$$

其中 $m\leqslant k$，$a_m\neq0$，$b_k\neq0$.

解 以 n^{-k} 同乘分子分母后，所求极限式化为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_mn^{m-k}+a_{m-1}n^{m-1-k}+\cdots+a_1n^{1-k}+a_0n^{-k}}{b_k+b_{k-1}n^{-1}+\cdots+b_1n^{1-k}+b_0n^{-k}}.$$

由§1例2知，当 $\alpha>0$ 时有 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{-\alpha}=0$. 于是，当 $m=k$ 时，上式除了分子分母

的第一项分别为 a_m 与 b_k 外,其余各项的极限皆为 0,故此时所求的极限等于 $\frac{a_m}{b_m}$;当 $m<k$ 时,由于 $n^{m-k}\to 0\ (n\to\infty)$,故此时所求的极限等于 0. 综上所述,得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n+a_0}{b_k n^k+b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1 n+b_n}=\begin{cases}\frac{a_m}{b_m}, & k=m,\\ 0, & k>m.\end{cases}$$ □

例 4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+1}$,其中 $a\neq -1$.

解 若 $a=1$,则显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+1}=\frac{1}{2}$;

若 $|a|<1$,则由 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$ 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+1}=\lim_{n\to\infty}a^n\Big/(\lim_{n\to\infty}a^n+1)=0;$$

若 $|a|>1$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{a^n}}=\frac{1}{1+0}=1.$$ □

例 5 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

解 $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$,

由 $1+\frac{1}{n}\to 1\ (n\to\infty)$ 及例 1 得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}.$$ □

最后,我们给出数列的子列概念和关于子列的一个重要定理.

定义 1 设 $\{a_n\}$ 为数列,$\{n_k\}$ 为正整数集 $\mathbf{N}_+$ 的无限子集,且 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$,则数列

$$a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k},\cdots$$

称为数列 $\{a_n\}$ 的一个**子列**,简记为 $\{a_{n_k}\}$.

注 1 由定义1可见,$\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 的各项都选自 $\{a_n\}$,且保持这些项在 $\{a_n\}$ 中的先后次序. $\{a_{n_k}\}$ 中的第 k 项是 $\{a_n\}$ 中的第 n_k 项,故总有 $n_k\geqslant k$. 实际上 $\{n_k\}$ 本身也是正整数列 $\{n\}$ 的子列.

例如,子列 $\{a_{2k}\}$ 由数列 $\{a_n\}$ 的所有偶数项所组成,而子列 $\{a_{2k-1}\}$ 则由 $\{a_n\}$

的所有奇数项所组成. 又$\{a_n\}$本身也是$\{a_n\}$的一个子列,此时 $n_k=k,k=1,2,\cdots$.

注2 数列$\{a_n\}$本身以及$\{a_n\}$去掉有限项后得到的子列,称为$\{a_n\}$的**平凡子列**;不是平凡子列的子列,称为$\{a_n\}$的**非平凡子列**. 例如$\{a_{2k}\}$和$\{a_{2k-1}\}$都是$\{a_n\}$的非平凡子列. 由上节例8可知:数列$\{a_n\}$与它的任一平凡子列同为收敛或发散,且在收敛时有相同的极限.

定理2.8 数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是:$\{a_n\}$的任何非平凡子列都收敛.

证 必要性 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,$\{a_{n_k}\}$是$\{a_n\}$的任一子列. 任给$\varepsilon>0$,存在正数$N$,使得当$k>N$时有$|a_k-a|<\varepsilon$. 由于$n_k\geqslant k$,故当$k>N$时更有$n_k>N$,从而也有$|a_{n_k}-a|<\varepsilon$,这就证明了$\{a_{n_k}\}$收敛(且与$\{a_n\}$有相同的极限).

充分性 考虑$\{a_n\}$的非平凡子列$\{a_{2k}\}$,$\{a_{2k-1}\}$与$\{a_{3k}\}$. 按假设,它们都收敛. 由于$\{a_{6k}\}$既是$\{a_{2k}\}$,又是$\{a_{3k}\}$的子列,故由刚才证明的必要性,

$$\lim_{k\to\infty}a_{2k}=\lim_{k\to\infty}a_{6k}=\lim_{k\to\infty}a_{3k}. \tag{9}$$

又$\{a_{6k-3}\}$既是$\{a_{2k-1}\}$又是$\{a_{3k}\}$的子列,同样可得

$$\lim_{k\to\infty}a_{2k-1}=\lim_{k\to\infty}a_{3k}. \tag{10}$$

(9)式与(10)式给出

$$\lim_{k\to\infty}a_{2k}=\lim_{k\to\infty}a_{2k-1}.$$

所以由上节例7可知$\{a_n\}$收敛. □

由定理2.8的证明可见,若数列$\{a_n\}$的任何非平凡子列都收敛,则所有这些子列与$\{a_n\}$必收敛于同一个极限. 于是,若数列$\{a_n\}$有一个子列发散,或有两个子列收敛而极限不相等,则数列$\{a_n\}$一定发散. 例如数列$\{(-1)^n\}$,其偶数项组成的子列$\{(-1)^{2n}\}$收敛于1,而奇数项组成的子列$\{(-1)^{2k-1}\}$收敛于-1,从而$\{(-1)^n\}$发散. 再如数列$\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$,它的奇数项组成的子列$\left\{\sin\frac{2k-1}{2}\pi\right\}$即为$\{(-1)^{k-1}\}$,由于这个子列发散,故数列$\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$发散. 由此可见,定理2.8是判断数列发散的有力工具.

习 题

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2+1}{4n^3+2n+3}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2n}{n^2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{10})$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}$.

2. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，且$a<b$. 证明：存在正数$N$，使得当$n>N$时有$a_n<b_n$.

3. 设$\{a_n\}$为无穷小数列，$\{b_n\}$为有界数列，证明：$\{a_nb_n\}$为无穷小数列.

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\dfrac{1}{n}}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

5. 设$\{a_n\}$与$\{b_n\}$中一个是收敛数列，另一个是发散数列. 证明$\{a_n\pm b_n\}$是发散数列. 又问$\{a_nb_n\}$和$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$($b_n\neq 0$)是否必为发散数列？

6. 证明以下数列发散：

(1) $\left\{(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\right\}$;　(2) $\{n^{(-1)^n}\}$;　(3) $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{4}\right\}$.

---

7. 判断以下结论是否成立(若成立，说明理由；若不成立，举出反例)：

(1) 若$\{a_{2k-1}\}$和$\{a_{2k}\}$都收敛，则$\{a_n\}$收敛；

(2) 若$\{a_{3k-2}\}$，$\{a_{3k-1}\}$和$\{a_{3k}\}$都收敛，且有相同极限，则$\{a_n\}$收敛.

8. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\,\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]$，$0<\alpha<1$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha)(1+\alpha^2)\cdots(1+\alpha^{2^n})$，$|\alpha|<1$.

9. 设$a_1,a_2,\cdots,a_m$为m个正数，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$$

10. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[na_n]}{n}=a$;

(2) 若$a>0$，$a_n>0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

§3 数列极限存在的条件

在研究比较复杂的数列极限问题时，通常先考察该数列是否有极限(极限的存在性问题)；若有极限，再考虑如何计算此极限(极限值的计算问题). 这是极限理论的两个基本问题. 在实际应用中，解决了数列$\{a_n\}$极限的存在性问题之后，即使极限值的计算较为困难，但由于当 n 充分大时，a_n 能充分接近其极限 a，故可用 a_n 作为 a 的近似值. 本节将重点讨论极限的存在性问题.

为了确定某个数列是否存在极限，当然不可能将每个实数依定义一一验证，根本的办法是直接从数列本身的特征来作出判断.

首先讨论单调数列，其定义与单调函数相仿. 若数列$\{a_n\}$的各项满足关系式

$$a_n \leqslant a_{n+1} \quad (a_n \geqslant a_{n+1}),$$

则称$\{a_n\}$为**递增(递减)数列**. 递增数列和递减数列统称为**单调数列**. 如$\left\{\frac{1}{n}\right\}$为递减数列，$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$与$\{n^2\}$为递增数列，而$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$则不是单调数列.

定理 2.9(单调有界定理) 在实数系中，有界的单调数列必有极限.

证 不妨设$\{a_n\}$为有上界的递增数列. 由确界原理，数列$\{a_n\}$有上确界，记 $a=\sup\{a_n\}$. 下面证明 a 就是$\{a_n\}$的极限. 事实上，任给 $\varepsilon>0$，按上确界的定义，存在数列$\{a_n\}$中某一项 a_N，使得 $a-\varepsilon<a_N$. 又由$\{a_n\}$的递增性，当 $n\geqslant N$ 时有

$$a-\varepsilon<a_N\leqslant a_n.$$

另一方面，由于 a 是$\{a_n\}$的一个上界，故对一切 a_n 都有 $a_n\leqslant a<a+\varepsilon$. 所以当 $n\geqslant N$ 时有

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon,$$

这就证得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 同理可证有下界的递减数列必有极限，且其极限即为它的下确界. □

例 1 设

$$a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}, n=1,2,\cdots,$$

其中实数 $\alpha\geqslant 2$. 证明数列$\{a_n\}$收敛.

证 显然$\{a_n\}$是递增的，下证$\{a_n\}$有上界. 事实上，

$$a_n\leqslant 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leqslant 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=2-\frac{1}{n}<2,\quad n=1,2,\cdots.$$

于是由单调有界定理，$\{a_n\}$收敛. □

例2 证明数列

$$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n个根号},\cdots$$

收敛，并求其极限.

证 记 $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$，易见数列$\{a_n\}$是递增的. 现用数学归纳法来证明$\{a_n\}$有上界.

显然 $a_1=\sqrt{2}<2$. 假设 $a_n<2$，则有 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}=2$，从而对一切 n 有 $a_n<2$，即$\{a_n\}$有上界.

由单调有界定理，数列$\{a_n\}$有极限，记为 a. 由于

$$a_{n+1}^2=2+a_n,$$

对上式两边取极限得 $a^2=2+a$，即有

$$(a+1)(a-2)=0，解得\ a=-1\ 或\ a=2.$$

由数列极限的保不等式性，$a=-1$ 是不可能的，故有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}=2.$$ □

例3 设 S 为有界数集. 证明：若 $\sup S=a\overline{\in}S$，则存在严格递增数列$\{x_n\}\subset S$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证 因 a 是S的上确界，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $x\in S$，使得 $x>a-\varepsilon$. 又因 $a\overline{\in}S$，故 $x<a$，从而有

$$a-\varepsilon<x<a.$$

现取 $\varepsilon_1=1$，则存在 $x_1\in S$，使得

$$a-\varepsilon_1<x_1<a.$$

再取 $\varepsilon_2=\min\left\{\frac{1}{2},a-x_1\right\}>0$，则存在 $x_2\in S$，使得

$$a-\varepsilon_2<x_2<a,$$

且有 $x_2>a-\varepsilon_2\geqslant a-(a-x_1)=x_1$.

一般地，按上述步骤得到 $x_{n-1}\in S$ 之后，取 $\varepsilon_n=\min\left\{\frac{1}{n},a-x_{n-1}\right\}$，则存在 $x_n\in S$，使得

$$a-\varepsilon_n<x_n<a,$$

且有 $x_n > a-\varepsilon_n \geqslant a-(a-x_{n-1}) = x_{n-1}$.

上述过程无限地进行下去,得到数列 $\{x_n\}\subset S$,它是严格递增数列,且满足

$$a-\varepsilon_n < x_n < a < a+\varepsilon_n \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon_n \leqslant \frac{1}{n},\ n=1,2,\cdots.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. □

例 4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在.

证[①] 先建立一个不等式. 设 $b>a>0$,对任一正整数 n 有

$$b^{n+1}-a^{n+1} < (n+1)b^n(b-a),$$

整理后得不等式

$$a^{n+1} > b^n[(n+1)a-nb]. \tag{1}$$

以 $a=1+\frac{1}{n+1}$, $b=1+\frac{1}{n}$ 代入(1)式. 由于

$$(n+1)a-nb = (n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-n\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,$$

故有

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

这就证明了 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 为递增数列.

再以 $a=1$, $b=1+\frac{1}{2n}$ 代入(1)式,得

$$(n+1)a-nb = (n+1)-n\left(1+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2},$$

故有

$$1 > \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\frac{1}{2} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4.$$

上式对一切正整数 n 都成立,即对一切偶数 n 有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4$. 联系到该数列的单调性,可知对一切正整数 n 都有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4$,即数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 有上界. 于是由单调有界定理推知数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是收敛的. □

通常用拉丁字母 e 代表该数列的极限,即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e},$$

它是一个无理数(待证),其前十三位数字是

$$\mathrm{e}\approx 2.718\ 281\ 828\ 459.$$

---

① 这里的证法引自 Amer. Math. Monthly, 1974, Vol. 81, No. 9, 1 011～1 012.

以 e 为底的对数称为**自然对数**,通常记

$$\ln x = \log_e x.$$

单调有界定理只是数列收敛的充分条件.下面给出在实数系中数列收敛的充分必要条件.

定理 2.10(柯西(Cauchy)收敛准则) 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是:对任给的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得当 $n,m>N$ 时有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

这个定理从理论上完全解决了数列极限的存在性问题,它的证明将在第七章给出.

柯西收敛准则的条件称为**柯西条件**,它反映这样的事实:收敛数列各项的值愈到后面,彼此愈是接近,以至充分后面的任何两项之差的绝对值可小于预先给定的任意小正数.或者形象地说,收敛数列的各项越到后面越是"挤"在一起.另外,柯西收敛准则把 $\varepsilon-N$ 定义中 a_n 与 a 的关系换成了 a_n 与 a_m 的关系,其好处在于无需借助数列以外的数 a,只要根据数列本身的特征就可以鉴别其(收)敛(发)散性.

例 5 证明:任一无限十进小数 $\alpha=0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$ 的 n 位不足近似($n=1,2,\cdots$)所组成的数列

$$\frac{b_1}{10},\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2},\cdots,\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\cdots+\frac{b_n}{10^n},\cdots \tag{2}$$

满足柯西条件(从而必收敛),其中 b_k 为 $0,1,2,\cdots,9$ 中的一个数,$k=1,2,\cdots$.

证 记 $a_n=\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\cdots+\frac{b_n}{10^n}$.不妨设 $n>m$,则有

$$\begin{aligned}|a_n-a_m| &= \frac{b_{m+1}}{10^{m+1}}+\frac{b_{m+2}}{10^{m+2}}+\cdots+\frac{b_n}{10^n}\\ &\leqslant \frac{9}{10^{m+1}}\left(1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^{n-m-1}}\right)\\ &= \frac{1}{10^m}\left(1-\frac{1}{10^{n-m}}\right)<\frac{1}{10^m}<\frac{1}{m}.\end{aligned}$$

对任给的 $\varepsilon>0$,取 $N=\frac{1}{\varepsilon}$,则对一切 $n>m>N$ 有

$$|a_n-a_m|<\varepsilon.$$

这就证明了数列(2)满足柯西条件. □

习 题

1. 利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$.

2．试问下面的解题方法是否正确：

求 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n$.

解　设 $a_n=2^n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 由于 $a_n=2a_{n-1}$，两边取极限($n\to\infty$)得 $a=2a$，所以 $a=0$.

3．证明下列数列极限存在并求其值：

(1) 设 $a_1=\sqrt{2}, a_{n+1}=\sqrt{2a_n}, n=1,2,\cdots$；

(2) 设 $a_1=\sqrt{c}\ (c>0), a_{n+1}=\sqrt{c+a_n},\ n=1,2,\cdots$；

(3) $a_n=\frac{c^n}{n!}\ (c>0),\ n=1,2,\cdots$.

4．利用 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 为递增数列的结论，证明 $\left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\right\}$ 为递增数列.

5．应用柯西收敛准则，证明以下数列 $\{a_n\}$ 收敛：

(1) $a_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$；

(2) $a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$.

6．证明：若单调数列 $\{a_n\}$ 含有一个收敛子列，则 $\{a_n\}$ 收敛.

7．证明：若 $a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

8．证明：若 $\{a_n\}$ 为递增(递减)有界数列，则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\sup\{a_n\}(\inf\{a_n\}).$$

又问逆命题成立否？

9．利用不等式

$$b^{n+1}-a^{n+1}>(n+1)a^n(b-a), b>a>0$$

证明：$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 为递减数列，并由此推出 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 为有界数列.

10．证明：$\left|\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right|<\frac{3}{n}$

提示：利用上题可知 $\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$；又易证 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\frac{3}{n}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

11．给定两正数 a_1 与 $b_1(a_1>b_1)$，作出其等差中项 $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$ 与等比中项 $b_2=\sqrt{a_1b_1}$，一般地令

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\ b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},\ n=1,2,\cdots.$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 皆存在且相等.

12. 设$\{a_n\}$为有界数列，记

$$\bar{a}_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\},\ \underline{a}_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}.$$

证明：(1) 对任何正整数 n，$\bar{a}_n \geqslant \underline{a}_n$；

(2) $\{\bar{a}_n\}$为递减有界数列，$\{\underline{a}_n\}$为递增有界数列，且对任何正整数 n, m 有 $\bar{a}_n \geqslant \underline{a}_m$；

(3) 设 $\bar{a}$ 和 $\underline{a}$ 分别是$\{\bar{a}_n\}$和$\{\underline{a}_n\}$的极限，则 $\bar{a} \geqslant \underline{a}$；

(4) $\{a_n\}$收敛的充要条件是 $\bar{a} = \underline{a}$.

总 练 习 题

1. 求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+3^n}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5}{e^n}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

2. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 q^n = 0\ (|q|<1)$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg n}{n^\alpha} = 0\ (\alpha \geqslant 1)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

3. 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$（又问由此等式能否反过来推出$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$）；

(2) 若 $a_n > 0\ (n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

4. 应用上题的结论证明下列各题：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n} = 0$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1\ (a>0)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$；　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n} = 1$；

(7) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = a\ (b_n>0)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n} = a$；

(8) 若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a_{n-1}) = d$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n} = d$.

5. 证明：若$\{a_n\}$为递增数列，$\{b_n\}$为递减数列，且

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0,$$

则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 与$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 都存在且相等.

6. 设数列$\{a_n\}$满足：存在正数 M，对一切 n 有

$$A_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_n - a_{n-1}| \leqslant M.$$

证明：数列$\{a_n\}$与$\{A_n\}$都收敛.

7. 设 $a>0,\sigma>0,a_1=\frac{1}{2}\left(a+\frac{\sigma}{a}\right),a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{\sigma}{a_n}\right),n=1,2,\cdots$.

证明:数列$\{a_n\}$收敛,且其极限为$\sqrt{\sigma}$.

8. 设 $a_1>b_1>0$,记

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\quad b_n=\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}},\ n=2,3,\cdots.$$

证明:数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的极限都存在且等于$\sqrt{a_1b_1}$.

9. 按柯西收敛准则叙述数列$\{a_n\}$发散的充要条件,并用它证明下列数列$\{a_n\}$是发散的:

(1) $a_n=(-1)^n n$; (2) $a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$; (3) $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

10. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$.记

$$S_n=\max\{a_n,b_n\},T_n=\min\{a_n,b_n\},\ n=1,2,\cdots.$$

证明:(1) $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\max\{a,b\}$;(2) $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\min\{a,b\}$.

提示:参考第一章总练习题 1.

第三章　函 数 极 限

§1　函数极限概念

一　x 趋于∞时函数的极限

设函数 f 定义在 $[a,+\infty)$ 上，类似于数列情形，我们研究当自变量 x 趋于 $+\infty$ 时，对应的函数值能否无限地接近于某个定数 A. 例如，对于函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，从图象上可见，当 x 无限增大时，函数值无限地接近于 0；而对于函数 $g(x)=\arctan x$，则当 x 趋于 $+\infty$ 时函数值无限地接近于 $\frac{\pi}{2}$. 我们称这两个函数当 x 趋于 $+\infty$ 时有极限. 一般地，当 x 趋于 $+\infty$ 时函数极限的精确定义如下：

定义 1　设 f 为定义在 $[a,+\infty)$ 上的函数，A 为定数. 若对任给的 $\varepsilon>0$，存在正数 $M\ (\geqslant a)$，使得当 $x>M$ 时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称**函数 f 当 x 趋于 $+\infty$ 时以 A 为极限**，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to+\infty).$$

在定义 1 中正数 M 的作用与数列极限定义中的 N 相类似，表明 x 充分大的程度；但这里所考虑的是比 M 大的所有实数 x，而不仅仅是正整数 n. 因此，当 $x\to+\infty$ 时函数 f 以 A 为极限意味着：A 的任意小邻域内必含有 f 在 $+\infty$ 的某邻域内的全部函数值.

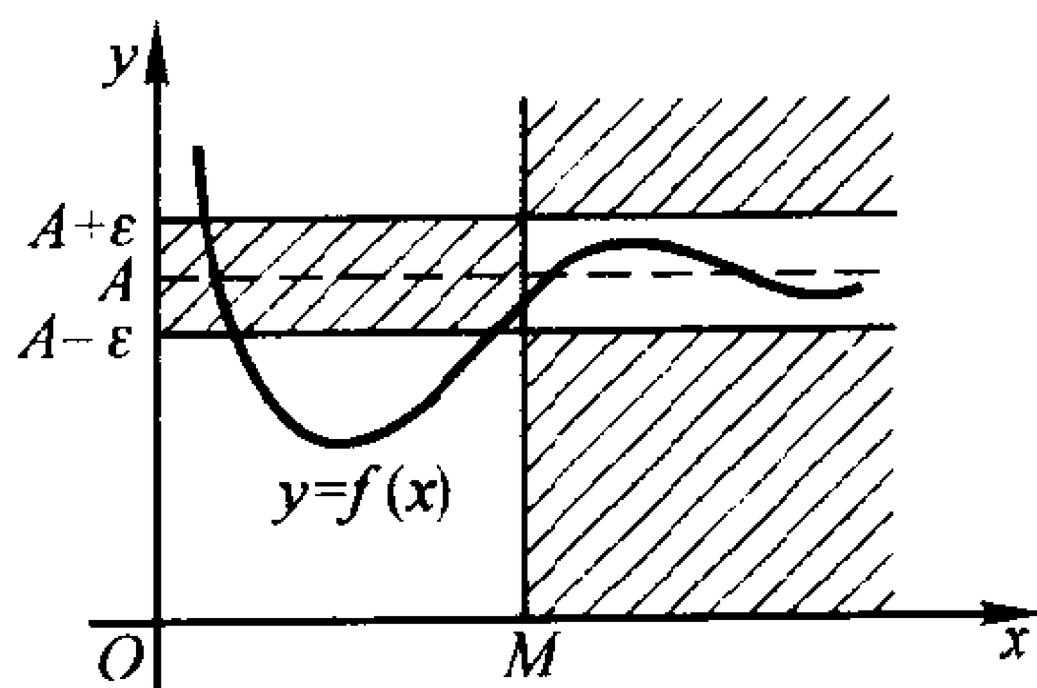


图　3－1

定义 1 的几何意义如图 3－1 所示，对任给的 $\varepsilon>0$，在坐标平面上平行于 x 轴的两条直线 $y=A+\varepsilon$ 与 $y=A-\varepsilon$，围成以直线 $y=A$ 为中心线、宽为 2ε 的带形区域；定义中的"当 $x>M$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$"表示：在直线 $x=M$ 的右方，曲线 $y=f(x)$ 全部落在这个带形区域之内. 如果正数 ε 给得小一点，即当带形区域更窄一点，那么直线 $x=M$ 一般要往右平移；但无论带形区域如何窄，总存在这样的正数 M，使得曲线 $y=f(x)$ 在直线 $x=M$ 的

右边部分全部落在这更窄的带形区域内.

现设 f 为定义在 $U(-\infty)$或 $U(\infty)$上的函数,当 $x\to-\infty$或 $x\to\infty$时,若函数值 $f(x)$能无限地接近某定数 A,则称 f 当 $x\to-\infty$或 $x\to\infty$时以 A 为极限,分别记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to-\infty);$$
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

这两种函数极限的精确定义与定义 1 相仿,只须把定义 1 中的"$x>M$"分别改为"$x<-M$"或"$|x|>M$"即可.

读者不难证明:若 f 为定义在 $U(\infty)$上的函数,则

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A. \tag{1}$$

例1 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

证 任给 $\varepsilon>0$,取 $M=\frac{1}{\varepsilon}$,则当 $|x|>M$ 时有

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{|x|}<\frac{1}{M}=\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. □

例2 证明: 1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$.

证 任给 $\varepsilon>0$,由于

$$\left|\arctan x-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right|<\varepsilon \tag{2}$$

等价于 $-\varepsilon-\frac{\pi}{2}<\arctan x<\varepsilon-\frac{\pi}{2}$,而此不等式的左半部分对任何 x 都成立,所以只要考察其右半部分 x 的变化范围.为此,先限制 $\varepsilon<\frac{\pi}{2}$,则有

$$x<\tan\left(\varepsilon-\frac{\pi}{2}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right).$$

故对任给的正数 $\varepsilon\ \left(<\frac{\pi}{2}\right)$,只须取 $M=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$,则当 $x<-M$ 时便有(2)式成立.这就证明了 1).类似地可证 2). □

注 由结论(1)可知,当 $x\to\infty$时 $\arctan x$ 不存在极限.

二 x 趋于 x_0 时函数的极限

设 f 为定义在点 x_0 的某个空心邻域 $U^\circ(x_0)$内的函数.现在讨论当 x 趋于 $x_0(x\neq x_0)$时,对应的函数值能否趋于某个定数 A.这类函数极限的精确定义如下:

定义 2(函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义) 设函数 f 在点 x_0 的某个空心邻域 $U^{\circ}(x_0;\delta')$ 内有定义，A 为定数.若对任给的 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta(<\delta')$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 f 当 x 趋于 x_0 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

下面我们举例说明如何应用 $\varepsilon-\delta$ 定义来验证这种类型的函数极限.请读者特别注意以下各例中 δ 的值是怎样确定的.

例 3 设 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，证明 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$.

证 由于当 $x\neq 2$ 时，

$$|f(x)-4|=\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|=|x+2-4|=|x-2|,$$

故对给定的 $\varepsilon>0$，只要取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时有 $|f(x)-4|<\varepsilon$.这就证明了 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$. □

例 4 证明：1) $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$；2) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

证 先建立一个不等式：当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时有

$$\sin x<x<\tan x. \tag{3}$$

事实上，在如图 3-2 的单位圆内，当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，显然有

$$S_{\triangle OAD}<S_{扇形OAD}<S_{\triangle OAB},$$

即 $\dfrac{1}{2}\sin x<\dfrac{1}{2}x<\dfrac{1}{2}\tan x$，由此立得(3)式.

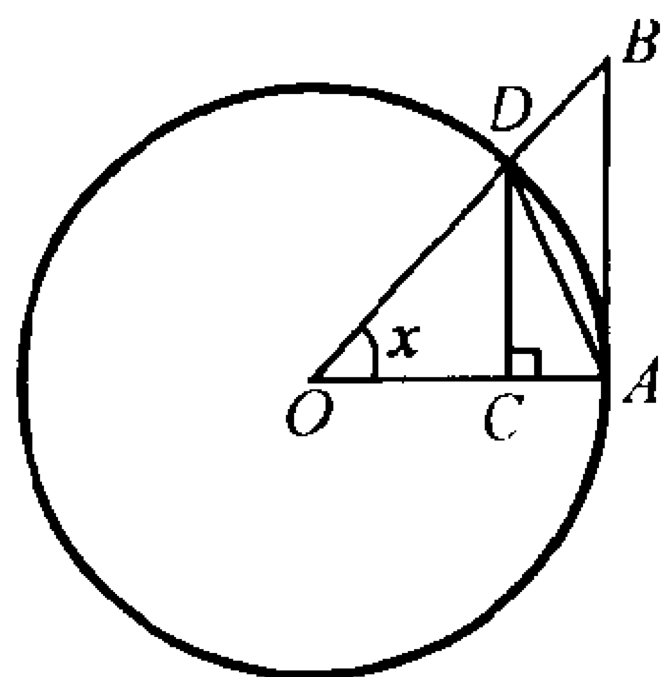


图 3-2

又当 $x\geqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时有 $\sin x\leqslant 1<x$，故对一切 $x>0$ 都有 $\sin x<x$；当 $x<0$ 时，由 $\sin(-x)<-x$ 得 $-\sin x<-x$.综上，我们又得到不等式

$$|\sin x|\leqslant|x|,\ x\in\mathbf{R}, \tag{4}$$

其中等号仅当 $x=0$ 时成立.

现证 1).由(4)式得

$$|\sin x-\sin x_0|=2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leqslant|x-x_0|.$$

对任给的 $\varepsilon>0$，只要取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，就有

$$|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$. 2) 的证明留给读者作为练习。 □

例 5 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{2}{3}$.

证 当 $x\neq 1$ 时有

$$\left|\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{x+1}{2x+1}-\frac{2}{3}\right|=\frac{|x-1|}{3|2x+1|}.$$

若限制 x 于 $0<|x-1|<1$ (此时 $x>0$),则 $|2x+1|>1$. 于是,对任给的 $\varepsilon>0$,只要取 $\delta=\min\{3\varepsilon,1\}$,则当 $0<|x-1|<\delta$ 时,便有

$$\left|\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\frac{2}{3}\right|<\frac{|x-1|}{3}<\varepsilon.$$ □

例6 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x_0^2}$ ($|x_0|<1$).

证 由于 $|x|\leqslant 1$, $|x_0|<1$,因此

$$|\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x_0^2}|=\frac{|x_0^2-x^2|}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x_0^2}}$$

$$\leqslant\frac{|x+x_0||x-x_0|}{\sqrt{1-x_0^2}}\leqslant\frac{2|x-x_0|}{\sqrt{1-x_0^2}}.$$

于是,对任给的 $\varepsilon>0$(不妨设 $0<\varepsilon<1$),取

$$\delta=\frac{\sqrt{1-x_0^2}}{2}\varepsilon,$$

则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,就有 $|\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x_0^2}|<\varepsilon$. □

应用 $\varepsilon-\delta$ 定义还立刻可得

$$\lim_{x\to x_0}c=c,\quad \lim_{x\to x_0}x=x_0,$$

这里 c 为常数,x_0 为给定实数.

通过以上各个例子,读者对函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义应能体会到下面几点:

1. 定义 2 中的正数 δ,相当于数列极限 $\varepsilon-N$ 定义中的 N,它依赖于 ε,但也不是由 ε 所唯一确定. 一般来说,ε 愈小,δ 也相应地要小一些,而且把 δ 取得更小些也无妨. 如在例 3 中可取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ 或 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$ 等等.

2. 定义中只要求函数 f 在 x_0 的某一空心邻域内有定义,而一般不考虑 f 在点 x_0 处的函数值是否有定义,或者取什么值. 这是因为,对于函数极限我们所研究的是当 x 趋于 x_0 过程中函数值的变化趋势. 如在例 3 中,函数 f 在点 $x=2$ 是没有定义的,但当 $x\to 2$ 时 f 的函数值趋于一个定数.

3. 定义 2 中的不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 等价于 $x\in U^{\circ}(x_0;\delta)$,而不等式

$|f(x)-A|<\varepsilon$ 等价于$f(x)\in U(A;\varepsilon)$. 于是，$\varepsilon-\delta$ 定义又可写成：

任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对一切 $x\in U^\circ(x_0;\delta)$有 $f(x)\in U(A;\varepsilon)$. 或更简单地表为：

任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 $f(U^\circ(x_0;\delta))\subset U(A;\varepsilon)$.

4. $\varepsilon-\delta$ 定义的几何意义如图 3－3 所示. 对任给的 $\varepsilon>0$，在坐标平面上画一条以直线 $y=A$ 为中心线、宽为 2ε 的横带，则必存在以直线 $x=x_0$ 为中心线、宽为 2δ 的竖带，使函数 $y=f(x)$的图象在该竖带中的部分全部落在横带内，但点$(x_0,f(x_0))$可能例外(或无意义).

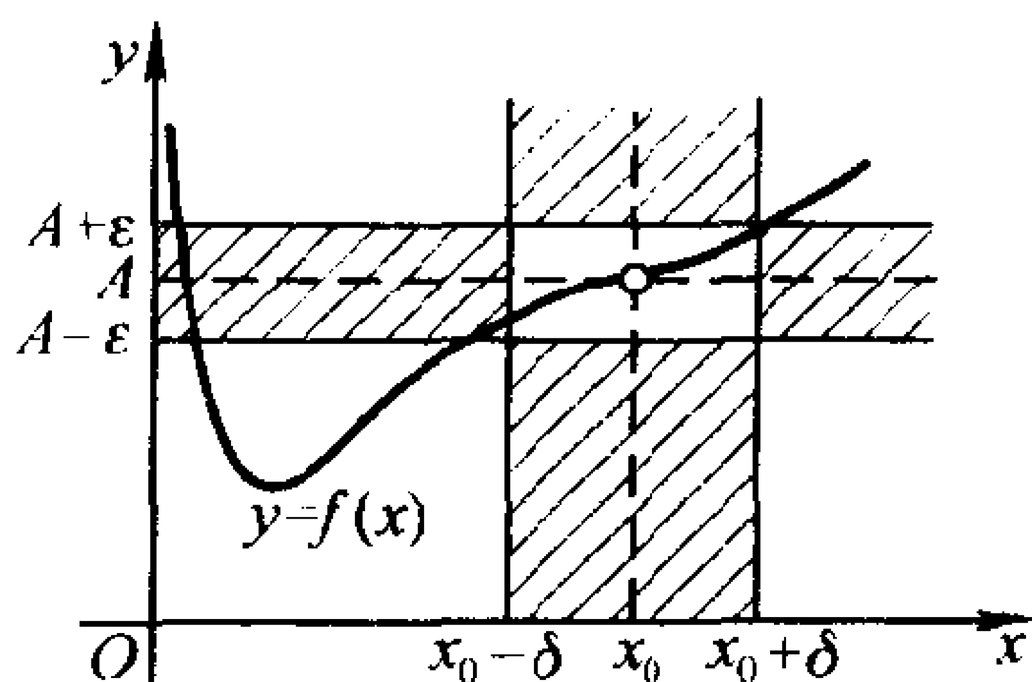


图　3－3

下面我们讨论单侧极限.

有些函数在其定义域上某些点左侧与右侧的解析式不同(如分段函数定义域上的某些点)，或函数在某些点仅在其一侧有定义(如在定义区间端点处)，这时函数在那些点上的极限只能单侧地给出定义.

例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x, & x<0\end{cases}\tag{5}$$

当 $x>0$ 而趋于 0 时，应按 $f(x)=x^2$ 来考察函数值的变化趋势；当 $x<0$ 而趋于 0 时，则应按 $f(x)=x$ 来考察. 又如函数$\sqrt{1-x^2}$在其定义区间$[-1,1]$端点 $x=\pm1$ 处的极限，也只能在点 $x=-1$ 的右侧和点 $x=1$ 的左侧来分别讨论.

定义 3　设函数 f 在$U_+^\circ(x_0;\delta')$ (或 $U_-^\circ(x_0;\delta')$)内有定义，A 为定数. 若对任给的 $\varepsilon>0$，存在正数 δ $(<\delta')$，使得当 $x_0<x<x_0+\delta$ (或 $x_0-\delta<x<x_0$)时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称数 A 为函数f 当x 趋于x_0^+(或 x_0^-)时的**右(左)极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A\ \left(\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\right)$$

或

$$f(x)\to A(x\to x_0^+)\ \left(f(x)\to A(x\to x_0^-)\right).$$

右极限与左极限统称为**单侧极限**. f 在点x_0 的右极限与左极限又分别记为

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)\quad 与\quad f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-}f(x).$$

按定义 3 容易验证函数(5)在 $x=0$ 处的左、右极限分别为

$$f(0-0)=\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}x=0,$$
$$f(0+0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x^2=0.$$

同样还可验证符号函数 $\operatorname{sgn} x$ 在 $x=0$ 处的左、右极限分别为

$$\lim_{x\to0^-}\operatorname{sgn} x=\lim_{x\to0^-}(-1)=-1,\ \lim_{x\to0^+}\operatorname{sgn} x=\lim_{x\to0^+}1=1.$$

例7 讨论函数$\sqrt{1-x^2}$在定义区间端点 ±1 处的单侧极限.

解 由于$|x|\leqslant1$,故有

$$1-x^2=(1+x)(1-x)\leqslant2(1-x).$$

任给 $\varepsilon>0$,当 $2(1-x)<\varepsilon^2$ 时,就有

$$\sqrt{1-x^2}<\varepsilon. \tag{6}$$

于是取 $\delta=\frac{\varepsilon^2}{2}$,则当 $0<1-x<\delta$ 即 $1-\delta<x<1$ 时,(6)式成立. 这就推出 $\lim_{x\to1^-}\sqrt{1-x^2}=0$. 类似地可得 $\lim_{x\to(-1)^+}\sqrt{1-x^2}=0$. □

关于函数极限 $\lim_{x\to x_0}f(x)$ 与相应的左、右极限之间的关系,有下述定理:

定理 3.1 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A.$

这个定理的证明留给读者.

应用定理 3.1,除了可验证函数极限的存在(如对函数(3)有$\lim_{x\to0}f(x)=0$),还常可说明某些函数极限的不存在,如前面提到的符号函数 $\operatorname{sgn} x$,由于它在 $x=0$ 处的左、右极限不相等,所以$\lim_{x\to0}\operatorname{sgn} x$ 不存在.

习　　题

1. 按定义证明下列极限:

(1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+5}{x}=6$;　(2) $\lim_{x\to2}(x^2-6x+10)=2$;

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5}{x^2-1}=1$;　(4) $\lim_{x\to2^-}\sqrt{4-x^2}=0$;

(5) $\lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

2. 根据定义 2 叙述 $\lim_{x\to x_0}f(x)\neq A$.
3. 设 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$,证明$\lim_{h\to0}f(x_0+h)=A$.
4. 证明:若 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$. 当且仅当 A 为何值时反之也成立?
5. 证明定理 3.1.
6. 讨论下列函数在 $x\to0$ 时的极限或左、右极限:

(1) $f(x)=\frac{|x|}{x}$;　　(2) $f(x)=[x]$;

(3) $f(x)=\begin{cases}2^x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ 1+x^2, & x<0.\end{cases}$

7. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,证明 $\lim\limits_{x\to0^+}f\left(\frac{1}{x}\right)=A$.

---

8. 证明:对黎曼函数 $R(x)$ 有 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0, x_0\in[0,1]$(当 $x_0=0$ 或 1 时,考虑单侧极限).

§2　函数极限的性质

在§1中我们引入了下述六种类型的函数极限:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$;　2) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$;　3) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$;　5) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$;　6) $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$.

它们具有与数列极限相类似的一些性质,下面以第4)种类型的极限为代表来叙述并证明这些性质.至于其他类型极限的性质及其证明,只要相应地作些修改即可.

定理 3.2(唯一性)　若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则此极限是唯一的.

证　设 A、B 都是 f 当 $x\to x_0$ 时的极限,则对任给的 $\varepsilon>0$,分别存在正数 δ_1 与 δ_2,使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \tag{1}$$

当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时有

$$|f(x)-B|<\varepsilon. \tag{2}$$

取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$,则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,(1)式与(2)式同时成立,故有

$$\begin{aligned}|A-B|&=|(f(x)-A)-(f(x)-B)|\\&\leqslant|f(x)-A|+|f(x)-B|<2\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性得 $A=B$.这就证明了极限是唯一的.　□

定理 3.3(局部有界性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则 f 在 x_0 的某空心邻域 $U^\circ(x_0)$ 内有界.

证　设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.取 $\varepsilon=1$,则存在 $\delta>0$,使得对一切 $x\in U^\circ(x_0;\delta)$ 有

$$|f(x)-A|<1\Rightarrow|f(x)|<|A|+1.$$

这就证明了 f 在 $U^\circ(x_0;\delta)$ 内有界.　□

定理 3.4(局部保号性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$(或 <0),则对任何正数 $r<A$

(或 $r<-A$),存在 $U^{\circ}(x_0)$,使得对一切 $x\in U^{\circ}(x_0)$有

$$f(x)>r>0(\text{或 } f(x)<-r<0).$$

证 设 $A>0$,对任何 $r\in(0,A)$,取 $\varepsilon=A-r$,则存在 $\delta>0$,使得对一切 $x\in U^{\circ}(x_0;\delta)$有

$$f(x)>A-\varepsilon=r,$$

这就证得结论.对于 $A<0$ 的情形可类似地证明. □

注 在以后应用局部保号性时,常取 $r=\frac{A}{2}$.

定理 3.5(保不等式性) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都存在,且在某邻域 $U^{\circ}(x_0;\delta')$ 内有 $f(x)\leqslant g(x)$,则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\leqslant\lim_{x\to x_0}g(x). \tag{3}$$

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则对任给的 $\varepsilon>0$,分别存在正数 δ_1 与 δ_2,使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时有

$$A-\varepsilon<f(x), \tag{4}$$

当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时有

$$g(x)<B+\varepsilon. \tag{5}$$

令 $\delta=\min\{\delta',\delta_1,\delta_2\}$,则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 与(4)、(5)两式同时成立,于是有

$$A-\varepsilon<f(x)\leqslant g(x)<B+\varepsilon,$$

从而 $A<B+2\varepsilon$.由 ε 的任意性推出 $A\leqslant B$,即(3)式成立. □

定理 3.6(迫敛性) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$,且在某 $U^{\circ}(x_0;\delta')$ 内有

$$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x), \tag{6}$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$.

证 按假设,对任给的 $\varepsilon>0$,分别存在正数 δ_1 与 δ_2,使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时有

$$A-\varepsilon<f(x), \tag{7}$$

当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时有

$$g(x)<A+\varepsilon. \tag{8}$$

令 $\delta=\min\{\delta',\delta_1,\delta_2\}$,则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,不等式(6)、(7)、(8)同时成立,故有

$$A-\varepsilon<f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)<A+\varepsilon,$$

由此得 $|h(x)-A|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$. □

定理 3.7(四则运算法则) 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都存在,则函数

$f\pm g, f\cdot g$ 当 $x\to x_0$ 时极限也存在，且

1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

又若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$，则 f/g 当 $x\to x_0$ 时极限存在，且有

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\Big/\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

这个定理的证明类似于数列极限中的相应定理，留给读者作为练习.

利用函数极限的迫敛性与四则运算法则，我们可从一些简单的函数极限出发，计算较复杂的函数极限.

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

解 由第一章§3 习题 13，当 $x>0$ 时有

$$1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant 1,$$

而 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=1$，故由迫敛性得

$$\lim_{x\to 0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]=1.$$

另一方面，当 $x<0$ 时有 $1\leqslant x\left[\dfrac{1}{x}\right]<1-x$，故由迫敛性又可得

$$\lim_{x\to 0^-}x\left[\frac{1}{x}\right]=1.$$

综上，我们求得 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$. □

例 2 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(x\tan x-1)$.

解 由 $x\tan x=x\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 及§1 例 4 所得的

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x,$$

并按四则运算法则有

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(x\tan x-1)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}x\cdot\frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x}-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}1=\frac{\pi}{4}-1.$$ □

例3 求 $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$.

解 当 $x+1\neq 0$ 时有

$$\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}=\frac{(x+1)(x-2)}{x^3+1}=\frac{x-2}{x^2-x+1}.$$

故所求极限等于

$$\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x^2-x+1}=\frac{-1-2}{(-1)^2-(-1)+1}=-1. \qquad □$$

例4 证明 $\lim_{x\to0}a^x=1\ (a>1)$.

证 任给 $\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<1$),为使

$$|a^x-1|<\varepsilon, \tag{9}$$

即 $1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon$,利用对数函数 $\log_a x$(当 $a>1$ 时)的严格增性,只要

$$\log_a(1-\varepsilon)<x<\log_a(1+\varepsilon).$$

于是,令

$$\delta=\min\{\log_a(1+\varepsilon),-\log_a(1-\varepsilon)\},$$

则当 $0<|x|<\delta$ 时,就有(9)式成立,从而证得结论. □

习　　题

1. 求下列极限:

(1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}2(\sin x-\cos x-x^2)$;　(2) $\lim_{x\to0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

(3) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;　(4) $\lim_{x\to0}\frac{(x-1)^3+(1-3x)}{x^2+2x^3}$;

(5) $\lim_{x\to1}\frac{x^n-1}{x^m-1}$ (n,m 为正整数);　(6) $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

(7) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{a^2+x}-a}{x}$ $(a>0)$;　(8) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}$.

2. 利用迫敛性求极限:

(1) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\cos x}{x}$;　(2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-4}$.

3. 设 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim_{x\to x_0}g(x)=B$. 证明:

(1) $\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

(2) $\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=AB$;

(3) $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$ (当 $B\neq0$ 时).

4. 设

$$f(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n},\ a_0\neq0,b_0\neq0,m\leqslant n,$$

试求 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

5. 设 $f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 证明

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A},$$

其中 $n\geqslant 2$ 为正整数.

6. 证明 $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$ $(0<a<1)$.

7. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$.

(1) 若在某 $U^\circ(x_0)$ 内有 $f(x)<g(x)$,问是否必有 $A<B$? 为什么?

(2) 证明:若 $A>B$,则在某 $U^\circ(x_0)$ 内有 $f(x)>g(x)$.

---

8. 求下列极限(其中 n 皆为正整数):

(1) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}\dfrac{1}{1+x^n}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}\dfrac{1}{1+x^n}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]}{x}$ (提示:参照例 1).

9. (1) 证明:若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x^3)$ 存在,则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}f(x^3)$.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)$ 存在,试问是否成立 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)$?

§3 函数极限存在的条件

与讨论数列极限存在的条件一样,我们将从函数值的变化趋势来判断其极限的存在性.下面的定理只对 $x\to x_0$ 这种类型的函数极限进行论述,但其结论对其它类型的函数极限也是成立的.下述归结原则有时称为**海涅**(Heine)**定理**.

定理 3.8(归结原则) 设 f 在 $U^\circ(x_0;\delta')$ 内有定义. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是:对任何含于 $U^\circ(x_0;\delta')$ 且以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$,极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x_n)$ 都存在且相等.

证 [必要性] 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则对任给的 $\varepsilon>0$,存在正数 δ $(\leqslant\delta')$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

另一方面,设数列 $\{x_n\}\subset U^\circ(x_0;\delta')$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,则对上述的 $\delta>0$,存在 $N>0$,使得当 $n>N$ 时有 $0<|x_n-x_0|<\delta$,从而有 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$.这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

[充分性] 设对任何数列 $\{x_n\}\subset U^\circ(x_0;\delta')$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$,则可用反证法推出 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.事实上,倘若当 $x\to x_0$ 时 f 不以 A 为极限,则存在某 $\varepsilon_0>0$,对任何 $\delta>0$(不论多么小),总存在一点 x,尽管 $0<|x-x_0|$

$<\delta$,但有$|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0$(§1 习题2).现依次取 $\delta=\delta',\frac{\delta'}{2},\frac{\delta'}{3},\cdots,\frac{\delta'}{n},\cdots$,则存在相应的点 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$,使得

$$0<|x_n-x_0|<\frac{\delta'}{n},\ 而\ |f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0,\ n=1,2,\cdots.$$

显然数列$\{x_n\}\subset U^{\circ}(x_0;\delta')$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,但当 $n\to\infty$时 $f(x_n)$不趋于 A.这与假设相矛盾,所以必有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. □

注 1 归结原则也可简述为:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow 对任何\ x_n\to x_0(n\to\infty)\ 有\ \lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

注 2 若可找到一个以 x_0 为极限的数列$\{x_n\}$,使$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$不存在,或找到两个都以 x_0 为极限的数列$\{x_n'\}$与$\{x_n''\}$,使$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n')$与$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n'')$都存在而不相等,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在.

例 1 证明极限$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在.

证 设 $x_n'=\frac{1}{n\pi},x_n''=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ $(n=1,2,\cdots)$,则显然有

$$x_n'\to 0,x_n''\to 0\ (n\to\infty),$$

$$\sin\frac{1}{x_n'}=0\to 0,\sin\frac{1}{x_n''}=1\to 1\ (n\to\infty).$$

故由归结原则即得结论. □

函数 $y=\sin\frac{1}{x}$的图象如图 3-4 所示.由图象可见,当 $x\to 0$ 时,其函数值无限次地在 -1 与 1 的范围内振荡,而不趋于任何确定的数.

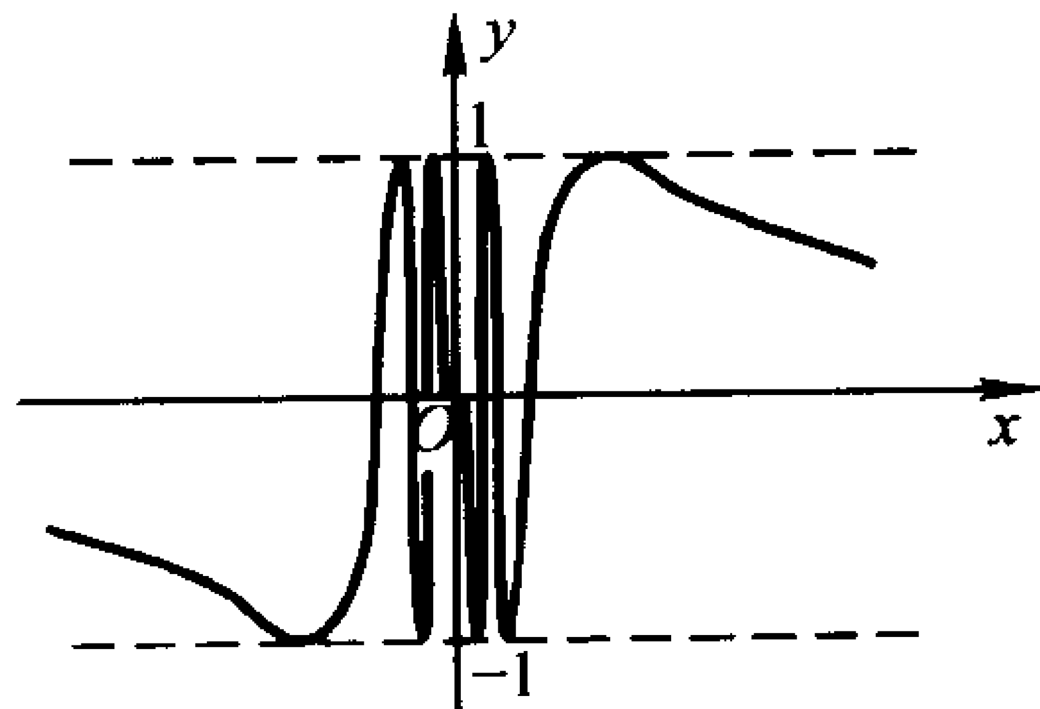


图 3-4

归结原则的意义在于把函数极限归结为数列极限问题来处理.从而,我们能应用归结原则和数列极限的有关性质来证明上一节中所述的函数极限的所有性质.

对于 $x\to x_0^+,x\to x_0^-,x\to+\infty$和 $x\to-\infty$这四种类型的单侧极限,相应的归结原则可表示为更强的形式.现以 $x\to x_0^+$ 这种类型为例阐述如下:

定理 3.9 设函数 f 在点x_0 的某空心右邻域 $U_+^{\circ}(x_0)$有定义.$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 的充要条件是:对任何以 x_0 为极限的递减数列$\{x_n\}\subset U_+^{\circ}(x_0)$,有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

这个定理的证明可仿照定理 3.8 进行，但在运用反证法证明充分性时，对 δ 的取法要作适当的修改，以保证所找到的数列 $\{x_n\}$ 能递减地趋于 x_0. 证明的细节留给读者作为练习.

相应于数列极限的单调有界定理，关于上述四类单侧极限也有相应的定理. 现以 $x \to x_0^+$ 这种类型为例叙述如下：

定理 3.10 设 f 为定义在 $U_+^\circ(x_0)$ 上的单调有界函数，则右极限 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 存在.

证 不妨设 f 在 $U_+^\circ(x_0)$ 上递增. 因 f 在 $U_+^\circ(x_0)$ 上有界，由确界原理，$\inf\limits_{x \in U_+^\circ(x_0)} f(x)$ 存在，记为 A. 下证 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

事实上，任给 $\varepsilon > 0$，按下确界定义，存在 $x' \in U_+^\circ(x_0)$，使得 $f(x') < A + \varepsilon$. 取 $\delta = x' - x_0 > 0$，则由 f 的递增性，对一切 $x \in (x_0, x') = U_+^\circ(x_0; \delta)$，有

$$f(x) \leqslant f(x') < A + \varepsilon.$$

另一方面，由 $A \leqslant f(x)$，更有 $A - \varepsilon < f(x)$. 从而对一切 $x \in U_+^\circ(x_0; \delta)$ 有

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$

这就证得 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$. □

最后，我们叙述并证明关于函数极限的柯西准则.

定理 3.11（柯西准则） 设函数 f 在 $U^\circ(x_0; \delta')$ 内有定义. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是：任给 $\varepsilon > 0$，存在正数 $\delta\ (< \delta')$，使得对任何 $x', x'' \in U^\circ(x_0; \delta)$ 有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

证 必要性 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则对任给的 $\varepsilon > 0$，存在正数 $\delta\ (< \delta')$，使得对任何 $x \in U^\circ(x_0; \delta)$ 有 $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是对任何 $x', x'' \in U^\circ(x_0; \delta)$ 有

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

充分性 设数列 $\{x_n\} \subset U^\circ(x_0; \delta)$ 且 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. 按假设，对任给的 $\varepsilon > 0$，存在正数 $\delta\ (< \delta')$，使得对任何 $x', x'' \in U^\circ(x_0; \delta)$，有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. 由于 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$，对上述的 $\delta > 0$，存在 $N > 0$，使得当 $n, m > N$ 时有 $x_n, x_m \in U^\circ(x_0; \delta)$，从而有

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

于是，按数列的柯西收敛准则，数列 $\{f(x_n)\}$ 的极限存在，记为 A，即 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

设另一数列 $\{y_n\} \subset U^\circ(x_0; \delta')$ 且 $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = x_0$，则如上所证，$\lim\limits_{n \to \infty} f(y_n)$ 存在，记为 B. 现证 $B = A$. 为此，考虑数列

$$\{z_n\}: x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n, \cdots$$

易见 $\{z_n\} \subset U^\circ(x_0; \delta')$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x_0$（见第二章 §1 例 7）. 故仍如上面所证，$\{f(z_n)\}$ 也收敛. 于是，作为 $\{f(z_n)\}$ 的两个子列，$\{f(x_n)\}$ 与 $\{f(y_n)\}$ 必有相同的极限. 所以由归结原则推得 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. □

按照函数极限的柯西准则，我们能写出极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在的充要条件：存在 $\varepsilon_0>0$，对任何 $\delta>0$（无论 δ 多么小），总可找到 $x', x'' \in U^\circ(x_0; \delta)$，使得 $|f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon_0$.

如在例 1 中我们可取 $\varepsilon_0 = 1$，对任何 $\delta>0$，设正整数 $n > \dfrac{1}{\delta}$，令

$$x' = \frac{1}{n\pi},\ x'' = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}},$$

则有 $x', x'' \in U^\circ(0; \delta)$，而 $\left|\sin\dfrac{1}{x'} - \sin\dfrac{1}{x''}\right| = 1 = \varepsilon_0$. 于是按柯西准则，极限 $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

习　题

1. 叙述函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 的归结原则，并应用它证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$ 不存在.

2. 设 f 为定义在 $[a, +\infty)$ 上的增（减）函数. 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在的充要条件是 f 在 $[a, +\infty)$ 上有上（下）界.

3. (1) 叙述极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 的柯西准则；

   (2) 根据柯西准则叙述 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 不存在的充要条件，并应用它证明 $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin x$ 不存在.

4. 设 f 在 $U^\circ(x_0)$ 内有定义. 证明：若对任何数列 $\{x_n\} \subset U^\circ(x_0)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 都存在，则所有这些极限都相等.

   提示：参见定理 3.11 充分性的证明.

---

5. 设 f 为 $U^\circ(x_0)$ 上的递增函数. 证明：$f(x_0 - 0)$ 和 $f(x_0 + 0)$ 都存在，且

$$f(x_0 - 0) = \sup_{x \in U_-^\circ(x_0)} f(x),\ f(x_0 + 0) = \inf_{x \in U_+^\circ(x_0)} f(x).$$

6. 设 $D(x)$ 为狄利克雷函数，$x_0 \in \mathbf{R}$. 证明：$\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$ 不存在.

7. 证明：若 f 为周期函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$，则 $f(x) \equiv 0$.

8. 证明定理 3.9.

§4　两个重要的极限

一　证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

证　在§1 例 4 中我们已导出如下不等式

$$\sin x < x < \tan x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

除以 $\sin x$，得到 $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$，由此得

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{1}$$

在(1)式中用 $-x$ 代替 x 时，(1)式不变，故(1)式当 $-\frac{\pi}{2}<x<0$ 时也成立，从而它对一切满足不等式 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 的 x 都成立. 由 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ 及函数极限的迫敛性，即得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. □

函数 $y=\frac{\sin x}{x}$ 的图象如图 3－5 所示.

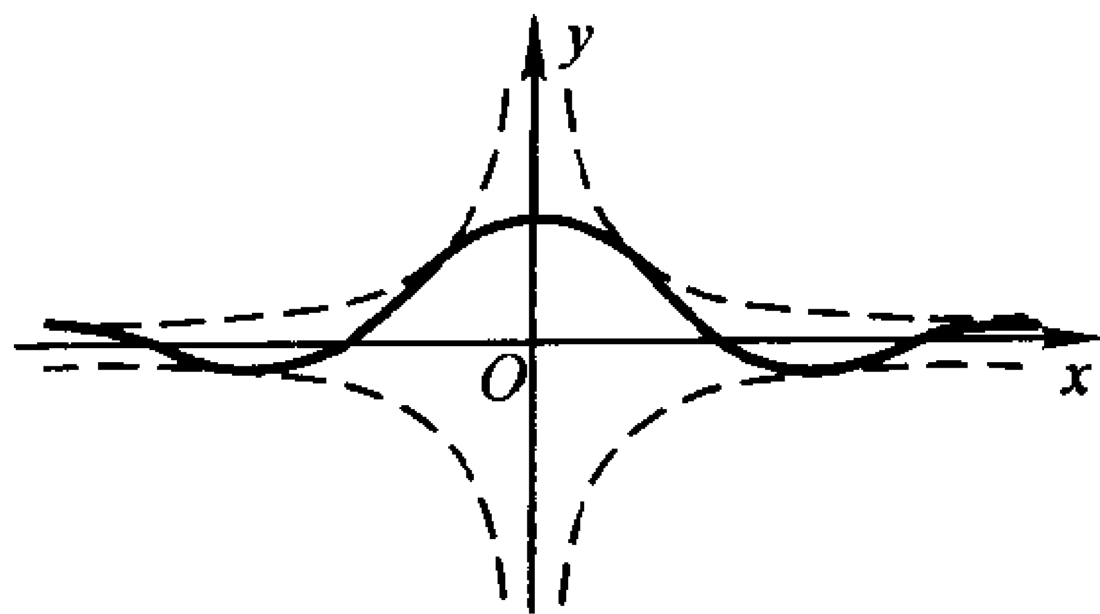


图 3－5

例 1　求 $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}$.

解　令 $t=\pi-x$，则 $\sin x=\sin(\pi-t)=\sin t$，且当 $x\to\pi$ 时 $t\to 0$. 所以有

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1. \quad □$$

例 2　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}. \quad □$$

二　证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

证　所求证的极限等价于同时成立以下两个极限：

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}, \tag{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}. \tag{3}$$

先利用数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$证明(2)式成立. 为此,作定义在$[1,+\infty)$上的两个阶梯函数如下:

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n,n\leqslant x<n+1,\ n=1,2,\cdots,$$

$$g(x)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},n\leqslant x<n+1,\ n=1,2,\cdots.$$

易见f增(第二章§3习题4)且有上界,g减(第二章§3习题9)且有下界. 故据上节习题2,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$与$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$皆存在. 于是,由归结原则(取$\{x_n\}=\{n\}$)得到

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}$$

另一方面,当$n\leqslant x<n+1$时有

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\leqslant 1+\frac{1}{n}$$

以及

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

即有

$$f(x)<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<g(x),\ x\in[1,+\infty).$$

从而根据迫敛性定理(2)式得证.

现证(3)式. 为此作代换$x=-y$,则

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y,$$

且当$x\to-\infty$时$y\to+\infty$,从而有

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=\mathrm{e}.\qquad\square$$

以后还常用到e的另一种极限形式:

$$\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}.\tag{4}$$

事实上,令$\alpha=\frac{1}{x}$,则$x\to\infty\Leftrightarrow\alpha\to0$,所以

$$\mathrm{e}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

例3 求$\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

解

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\cdot(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]=\mathrm{e}^2.$$ □

例 4 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$.

解 令 $u=-x$,则当 $x\to 0$ 时 $u\to 0$. 因此

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{u\to 0}(1+u)^{-\frac{1}{u}}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$ □

例 5 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$.

解 $\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to\mathrm{e}\ (n\to\infty)$. 另一方面,当 $n>1$ 时有

$$\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}-\frac{n}{n-1}}\geqslant\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}-2},$$

而由归结原则$\left(取\ x_n=\frac{n^2}{n-1}, n=2,3,\cdots\right)$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}-2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

于是,由数列极限的迫敛性得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n=\mathrm{e}.$$ □

习 题

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$;　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{(\sin x)^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$;　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$;　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{x}$;　(8) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x-a}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$; (10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$.

2. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{-x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}$ (α 为给定实数);

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$; (6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}$ (α,β 为给定实数).

3. 证明: $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\cos x\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\right]\right\}=1$.

4. 利用归结原则计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

§5 无穷小量与无穷大量

一 无穷小量

与无穷小数列的概念相类似,我们给出关于函数为无穷小量的定义.

定义 1 设 f 在某 $U^\circ(x_0)$ 内有定义.若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0,$$

则称 f 为当 $x\to x_0$ **时的无穷小量**.

若函数 g 在某 $U^\circ(x_0)$ 内有界,则称 g 为当 $x\to x_0$ **时的有界量**.

类似地定义当 $x\to x_0^+$, $x\to x_0^-$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ 以及 $x\to\infty$ 时的无穷小量与有界量.

例如,x^2, $\sin x$ 与 $1-\cos x$ 都是当 $x\to 0$ 时的无穷小量,$\sqrt{1-x}$ 是当 $x\to 1^-$ 时的无穷小量,而 $\dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{\sin x}{x}$ 为 $x\to\infty$ 时的无穷小量.又如 $\sin x$ 是当 $x\to\infty$ 时的有界量,$\sin\dfrac{1}{x}$ 是当 $x\to 0$ 时的有界量.特别,任何无穷小量也必都是有界量.

由无穷小量的定义可立刻推得如下性质:

1. 两个(相同类型的)无穷小量之和、差、积仍为无穷小量.

2. 无穷小量与有界量的乘积为无穷小量.

例如,当 $x\to 0$ 时,x^2 是无穷小量,$\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界量,故由性质 2 即得

$$\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0.$$

函数 $y=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 的图象如图 3-6 所示.

由函数极限与无穷小量的定义可立即推出如下结论：

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) - A$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小量.

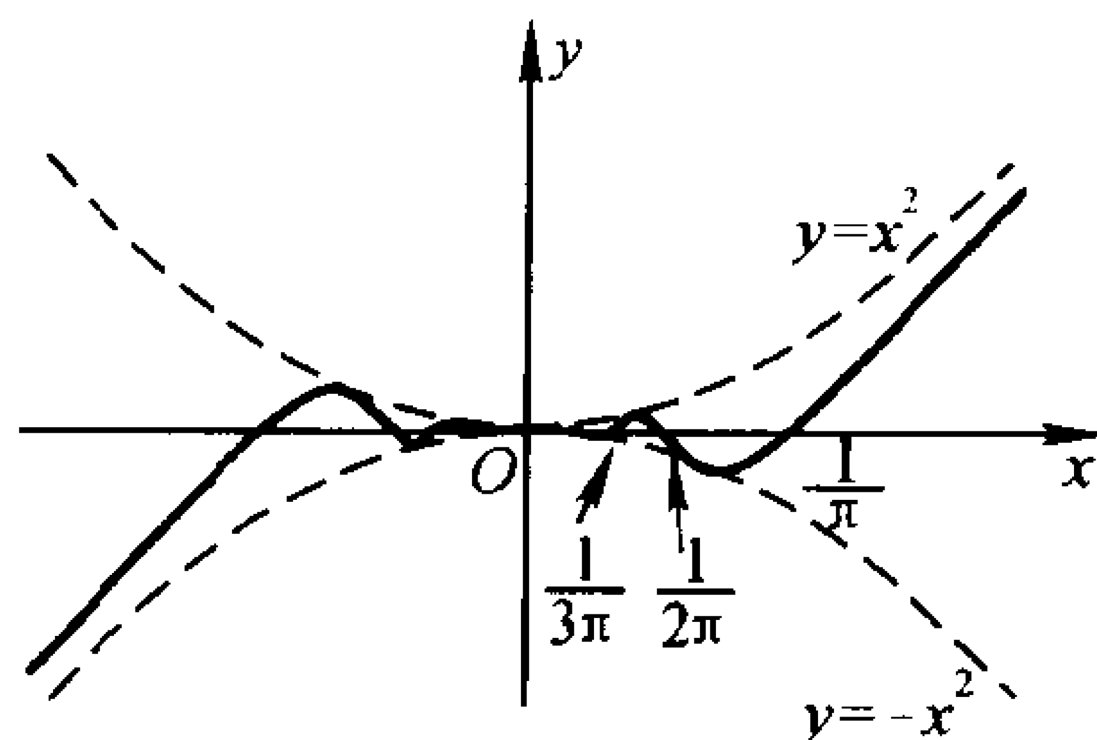


图 3-6

二 无穷小量阶的比较

无穷小量是以 0 为极限的函数，而不同的无穷小量收敛于 0 的速度有快有慢. 为此，我们考察两个无穷小量的比，以便对它们的收敛速度作出判断.

设当 $x \to x_0$ 时，f 与 g 均为无穷小量.

1. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$，则称当 $x \to x_0$ 时 f 为 g 的**高阶无穷小量**，或称 g 为 f 的**低阶无穷小量**，记作

$$f(x) = o\,(g(x))\ (x \to x_0).$$

特别，f 为当 $x \to x_0$ 时的无穷小量记作

$$f(x) = o(1)\ (x \to x_0).$$

例如，当 $x \to 0$ 时，$x, x^2, \cdots, x^n$（n 为正整数）等都是无穷小量，因而有

$$x^k = o(1)\ (x \to 0), k = 1, 2, \cdots,$$

而且它们中后一个为前一个的高阶无穷小量，即有

$$x^{k+1} = o(x^k)\ (x \to 0).$$

又如，由于 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \tan \dfrac{x}{2} = 0$. 故有

$$1 - \cos x = o(\sin x)\ (x \to 0).$$

2. 若存在正数 K 和 L，使得在某 $U^\circ(x_0)$ 上有

$$K \leqslant \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leqslant L,$$

则称 f 与 g 为当 $x \to x_0$ 时的**同阶无穷小量**. 特别当

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$$

时，f 与 g 必为同阶无穷小量.

例如，当 $x \to 0$ 时，$1 - \cos x$ 与 x^2 皆为无穷小量. 由于

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

所以 $1 - \cos x$ 与 x^2 为当 $x \to 0$ 时的同阶无穷小量. 又如，当 $x \to 0$ 时，x 与 $x\left(2 + \sin \dfrac{1}{x}\right)$ 都是无穷小量，由于它们之比的绝对值满足

$$1 \leqslant \left|2+\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 3,$$

所以 x 与 $x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$ 为当 $x\to 0$ 时的同阶无穷小量.

若无穷小量 f 与 g 满足关系式

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant L,\quad x\in U^{\circ}(x_0),$$

则记作

$$f(x) = O(g(x))\ (x\to x_0).$$

特别,若 f 在某 $U^{\circ}(x_0)$ 内有界,则记为

$$f(x) = O(1)\ (x\to x_0).$$

例如,

$$1-\cos x = O(x^2)\ (x\to 0),$$

$$x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right) = O(x)\ (x\to 0),$$

$$\sin x = O(1)\ (x\to\infty).$$

甚至当 $f(x)=o(g(x))\ (x\to x_0)$ 时,也有 $f(x)=O(g(x))\ (x\to x_0)$.

注 本段中的等式 $f(x)=o(g(x))\ (x\to x_0)$ 与 $f(x)=O(g(x))\ (x\to x_0)$ 等,与通常等式的含义是不同的.这里等式左边是一个函数,右边是一个函数类,而中间的等号的含义是"属于".例如,前面已经得到

$$1-\cos x = o(\sin x)\ (x\to 0), \tag{1}$$

其中

$$o(\sin x) = \left\{f\ \middle|\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x} = 0\right\},$$

等式(1)表示函数 $1-\cos x$ 属于此函数类.

3. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$,则称 f 与 g 是当 $x\to x_0$ 时的**等价无穷小量**.记作

$$f(x)\sim g(x)\ (x\to x_0).$$

例如,由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,故有 $\sin x\sim x\ (x\to 0)$.又由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$(上节习题 1(6)),故有 $\arctan x\sim x\ (x\to 0)$.

以上讨论了两个无穷小量阶的比较.但应指出,并不是任何两个无穷小量都可以进行这种阶的比较.例如,当 $x\to 0$ 时,$x\sin\frac{1}{x}$ 和 x^2 都是无穷小量,但它们的比

$$\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x^2} = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} \quad 或 \quad \frac{x^2}{x\sin\frac{1}{x}} = \frac{x}{\sin\frac{1}{x}}$$

当 $x\to 0$ 时都不是有界量,所以这两个无穷小量不能进行阶的比较.

下述定理显示了等价无穷小量在求极限问题中的作用.

定理 3.12 设函数 f,g,h 在 $U^\circ(x_0)$ 内有定义,且有

$$f(x)\sim g(x)\ (x\to x_0).$$

(i) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)h(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)h(x)=A$;

(ii) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{f(x)}=B$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{g(x)}=B$.

证 (i) $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)h(x)=1\cdot A=A$.

(ii) 可类似地证明. □

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{\sin 4x}$.

解 由于 $\arctan x\sim x\ (x\to 0)$, $\sin 4x\sim 4x\ (x\to 0)$. 故由定理 3.12 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{4x}=\frac{1}{4}.$$ □

例 2 利用等价无穷小量代换求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}.$$

解 由于 $\tan x-\sin x=\dfrac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x)$,而

$$\sin x\sim x(x\to 0),1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\ (x\to 0),\sin x^3\sim x^3(x\to 0),$$

故有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$ □

注 在利用等价无穷小量代换求极限时,应注意:只有对所求极限式中相乘或相除的因式才能用等价无穷小量来替代,而对极限式中的相加或相减部分则不能随意替代. 如在例 2 中,若因有

$$\tan x\sim x\ (x\to 0),\ \sin x\sim x\ (x\to 0),$$

而推出

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{\sin x^3}=0,$$

则得到的是错误的结果.

三 无穷大量

定义 2 设函数 f 在某 $U^\circ(x_0)$ 内有定义. 若对任给的 $G>0$,存在 $\delta>0$,使

得当 $x\in U^{\circ}(x_0;\delta)(\subset U^{\circ}(x_0))$时有

$$|f(x)|>G, \tag{2}$$

则称函数 f 当 $x\to x_0$ 时有**非正常极限**∞,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty.$$

若(2)式换成“$f(x)>G$”或“$f(x)<-G$”,则分别称 f 当 $x\to x_0$ 时有非正常极限$+\infty$或$-\infty$,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty.$$

关于函数 f 在自变量 x 的其它不同趋向的非正常极限的定义,以及数列$\{a_n\}$当 $n\to\infty$时的非正常极限的定义,都可类似地给出.例如

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$的定义:任给 $G>0$,存在 $M>0$,使得当 $x>M$ 时有$f(x)<-G$;

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$的定义:任给 $G>0$,存在 $N>0$,使得当 $n>N$ 时有 $a_n>G$.

定义3 对于自变量 x 的某种趋向(或 $n\to\infty$时),所有以∞,$+\infty$或$-\infty$为非正常极限的函数(包括数列),都称为**无穷大量**.

例3 证明$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$.

证 任给 $G>0$,要使$\frac{1}{x^2}>G$,只要$|x|<\frac{1}{\sqrt{G}}$,因此令 $\delta=\frac{1}{\sqrt{G}}$,则对一切 $x\in U^{\circ}(0;\delta)$有$\frac{1}{x^2}>G$.这就证明了$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$. □

例4 证明:当 $a>1$ 时,$\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$.

证 任给 $G>0$(不妨设 $G>1$),要使 $a^x>G$,由对数函数的严格增性,只要 $x>\log_a G$,因此令 $M=\log_a G$,则对一切 $x>M$ 有 $a^x>G$.这就证得 $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$. □

顺便指出,容易证明:当 $a>1$ 时,$\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$;当 $0<a<1$ 时有

$$\lim_{x\to+\infty}a^x=0, \quad \lim_{x\to-\infty}a^x=+\infty.$$

注1 无穷大量不是很大的数,而是具有非正常极限的函数.如由例3知$\frac{1}{x^2}$是当 $x\to 0$ 时的无穷大量,由例4知 $a^x(a>1)$是当 $x\to+\infty$时的无穷大量.

注2 若 f 为$x\to x_0$ 时的无穷大量,则易见 f 为 $U^{\circ}(x_0)$上的无界函数.但无界函数却不一定是无穷大量.如 $f(x)=x\sin x$ 在$U(+\infty)$上无界,因对任给的 $G>0$,取 $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$,这里正整数 $n>\frac{G}{2\pi}$,则有

$$f(x)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2n\pi+\frac{\pi}{2}>G.$$

但 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq\infty$，因若取数列 $x_n=2n\pi(n=1,2,\cdots)$，则 $x_n\to+\infty\ (n\to\infty)$，而

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=0.$$

如同对无穷小量进行阶的比较的讨论一样，对两个无穷大量也可定义高阶无穷大量、同阶无穷大量等概念.这里就不再详述了.

由无穷大量与无穷小量的定义，可推得它们之间有如下关系：

定理 3.13　(i) 设 f 在 $U^{\circ}(x_0)$ 内有定义且不等于 0.若 f 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量，则 $\frac{1}{f}$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷大量.

(ii) 若 g 为 $x\to x_0$ 时的无穷大量，则 $\frac{1}{g}$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

定理的证明留给读者.根据这个定理，对无穷大量的研究可归结为对无穷小量的讨论.

四　曲线的渐近线

作为函数极限的一个应用，我们讨论曲线的渐近线问题.由平面解析几何知道，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 有两条渐近线 $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$（图 3－7）.一般地，曲线的渐近线定义如下：

定义 4　若曲线 C 上的动点 P 沿着曲线无限地远离原点时，点 P 与某定直线 L 的距离趋于 0，则称直线 L 为曲线 C 的**渐近线**（图 3－8）.

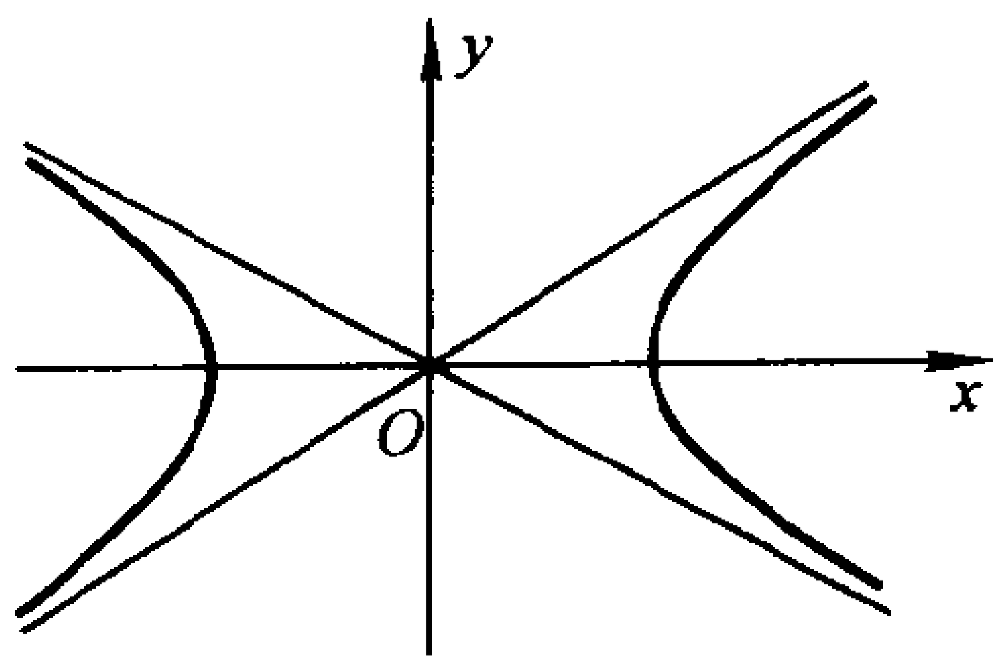


图　3－7

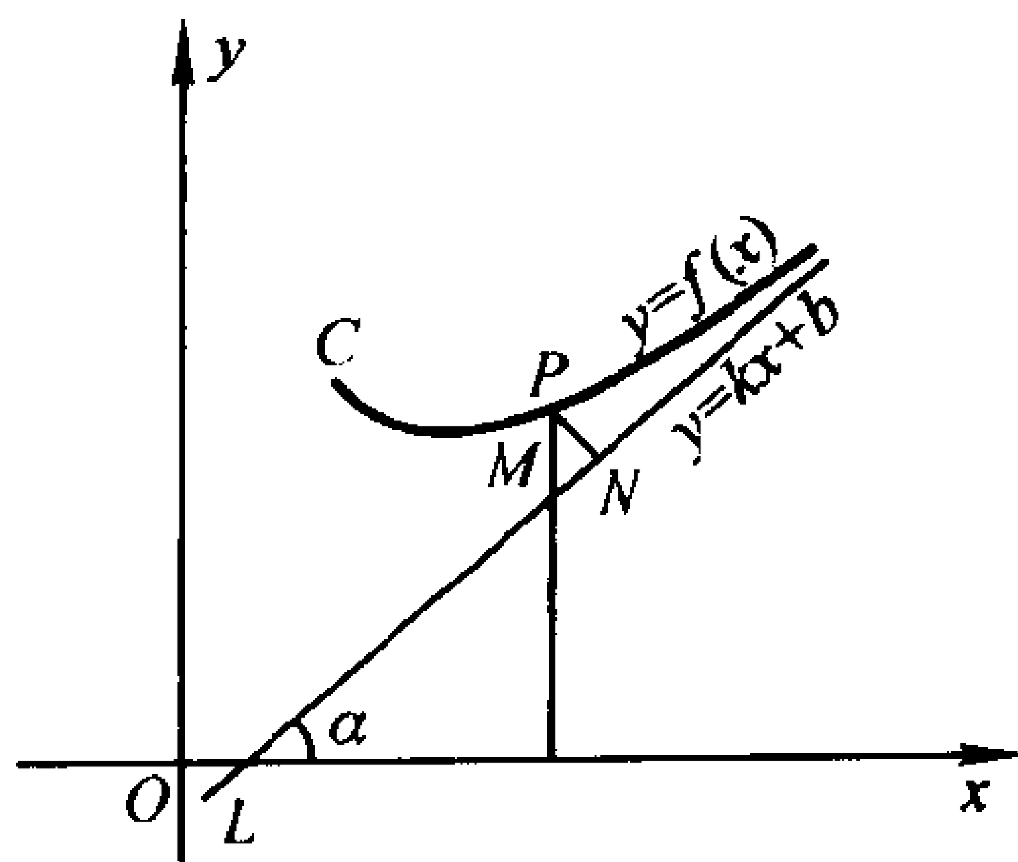


图　3－8

下面我们讨论曲线 $y=f(x)$ 在什么条件下存在**斜渐近线** $y=kx+b$ 与**垂直渐近线** $x=x_0$，以及怎样求出渐近线方程.

现假设曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=kx+b$.如图 3－8 所示，曲线上动点 P 到渐近线的距离为

$$|PN| = |PM\cos\alpha| = |f(x)-(kx+b)|\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

按渐近线的定义，当 $x\to+\infty$ 时[1]，$|PN|\to 0$，即有

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0,$$

或

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b. \tag{3}$$

又由

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}[f(x)-kx]=0\cdot b=0,$$

得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k. \tag{4}$$

由上面的讨论可知，若曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=kx+b$，则常数 k 与 b 可相继由(4)式和(3)式来确定；反之，若由(4)、(3)两式求得 k 与 b，则可知 $|PN|\to 0\ (x\to+\infty)$，从而 $y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

若函数 f 满足

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\quad\left(\text{或}\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\infty\right),$$

则按渐近线的定义可知，曲线 $y=f(x)$ 有垂直于 x 轴的渐近线 $x=x_0$，称为**垂直渐近线**.

例 5 求曲线 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的渐近线.

解 由(4)式

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x^3}{x^3+2x^2-3x}\to 1\quad(x\to\infty),$$

得 $k=1$. 再由(3)式

$$f(x)-kx=\frac{x^3}{x^2+2x-3}-x\to -2\quad(x\to\infty),$$

得 $b=-2$. 从而求得此曲线的斜渐近线方程为 $y=x-2$.

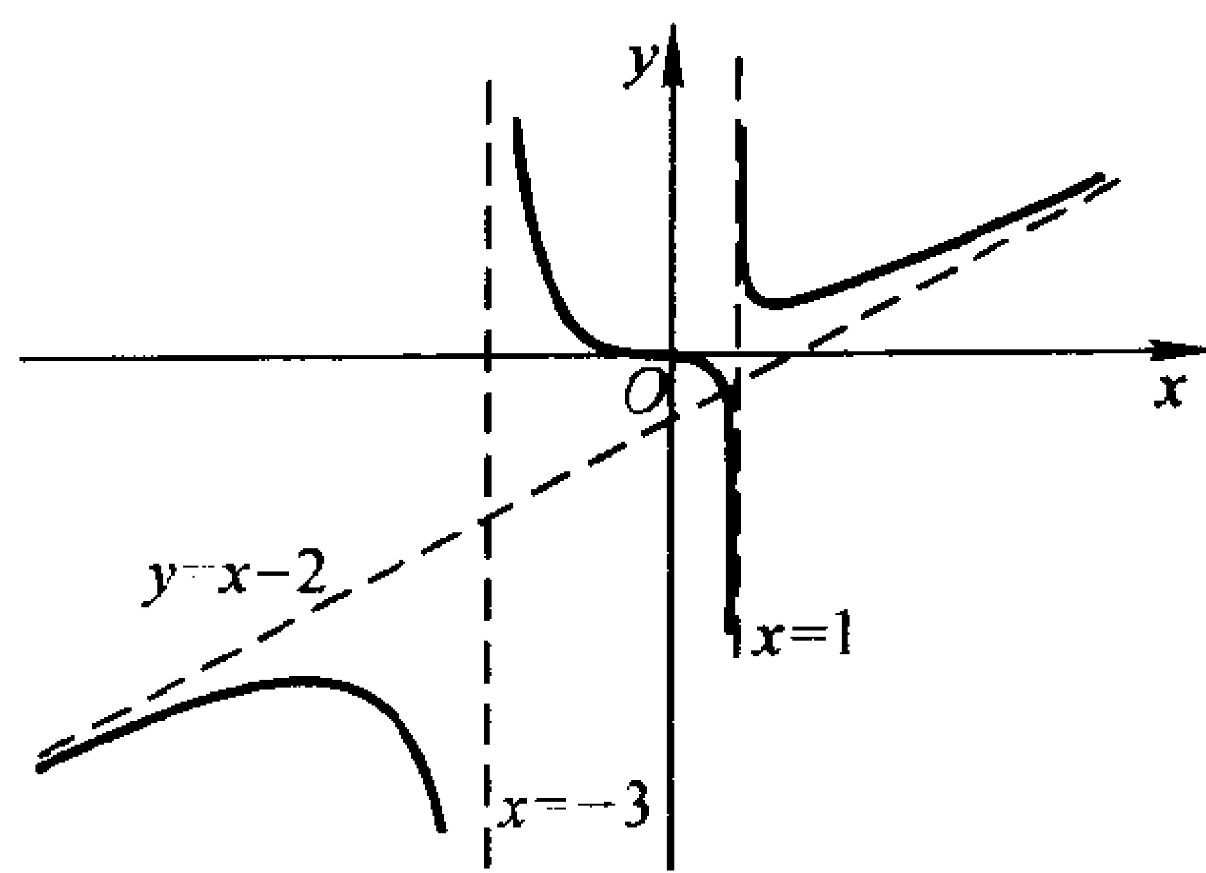


图 3-9

又由 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+3)(x-1)}$ 易见

① 对于 $x\to-\infty$ 或 $x\to\infty$ 的情形，也有相应的结果.

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to 1} f(x)=\infty,$$

所以此曲线有垂直渐近线 $x=-3$ 和 $x=1$(图 3-9). □

习 题

1. 证明下列各式:

(1) $2x-x^2=O(x)\ (x\to 0)$; (2) $x\sin\sqrt{x}=O(x^{\frac{3}{2}})\ (x\to 0^+)$;

(3) $\sqrt{1+x}-1=o(1)\ (x\to 0)$;

(4) $(1+x)^n=1+nx+o(x)\ (x\to 0)$ (n 为正整数);

(5) $2x^3+x^2=O(x^3)\ (x\to\infty)$;

(6) $o(g(x))\pm o(g(x))=o(g(x))\ (x\to x_0)$①;

(7) $o(g_1(x))\cdot o(g_2(x))=o(g_1(x)g_2(x))\ (x\to x_0)$.

2. 应用定理 3.12 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{x}}{x-\cos x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$

3. 证明定理 3.13.

4. 求下列函数所表示曲线的渐近线:

(1) $y=\dfrac{1}{x}$; (2) $y=\arctan x$; (3) $y=\dfrac{3x^3+4}{x^2-2x}$.

5. 试确定 α 的值,使下列函数与 x^α 当 $x\to 0$ 时为同阶无穷小量:

(1) $\sin 2x-2\sin x$; (2) $\dfrac{1}{1+x}-(1-x)$;

(3) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$; (4) $\sqrt[5]{3x^2-4x^3}$.

6. 试确定 α 的值,使下列函数与 x^α 当 $x\to\infty$ 时为同阶无穷大量:

(1) $\sqrt{x^2+x^5}$; (2) $x+x^2(2+\sin x)$;

(3) $(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$.

---

7. 证明:若 S 为无上界数集,则存在一递增数列 $\{x_n\}\subset S$,使得 $x_n\to+\infty\ (n\to\infty)$.

8. 证明:若 f 为 $x\to r$ 时的无穷大量,而函数 g 在某 $U^\circ(r)$ 上满足 $g(x)\geqslant K>0$,则 fg 为 $x\to r$ 时的无穷大量.

9. 设 $f(x)\sim g(x)\ (x\to x_0)$,证明:

$$f(x)-g(x)=o(f(x)) \quad 或 \quad f(x)-g(x)=o(g(x)).$$

① 这里等式的含义是:两个比 g 高阶的无穷小量的和或差仍是一个比 g 高阶的无穷小量.后一小题类似.

总 练 习 题

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 3^-}(x-[x])$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 1^+}([x]+1)^{-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(a+x)(b+x)}-\sqrt{(a-x)(b-x)})$；

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$；　　(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$，$m,n$ 为正整数.

2. 分别求出满足下述条件的常数 a 与 b：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$.

3. 试分别举出符合下列要求的函数 f：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)\neq f(2)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$不存在.

4. 试给出函数 f 的例子，使 $f(x)>0$ 恒成立，而在某一点 x_0 处有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$. 这同极限的局部保号性有矛盾吗？

5. 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{u\to A}g(u)=B$，在何种条件下能由此推出

$$\lim_{x\to a}g(f(x))=B?$$

6. 设 $f(x)=x\cos x$. 试作数列

(1) $\{x_n\}$使得 $x_n\to\infty\ (n\to\infty)$，$f(x_n)\to 0\ (n\to\infty)$；

(2) $\{y_n\}$使得 $y_n\to\infty\ (n\to\infty)$，$f(y_n)\to+\infty\ (n\to\infty)$；

(3) $\{z_n\}$使得 $z_n\to\infty\ (n\to\infty)$，$f(z_n)\to-\infty\ (n\to\infty)$.

7. 证明：若数列$\{a_n\}$满足下列条件之一，则$\{a_n\}$是无穷大数列：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r>1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=s>1\ (a_n\neq 0,n=1,2,\cdots)$.

8. 利用上题(1)的结论求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

9. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，证明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=+\infty$；

(2) 若 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=+\infty$.

10．利用上题结果求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n!)}{n}$.

11．设 f 为 $U_-^\circ(x_0)$ 内的递增函数．证明：若存在数列 $\{x_n\}\subset U_-^\circ(x_0)$ 且 $x_n\to x_0(n\to\infty)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，则有

$$f(x_0-0)=\sup_{x\in U_-^\circ(x_0)}f(x)=A.$$

12．设函数 f 在 $(0,+\infty)$ 上满足方程 $f(2x)=f(x)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$．证明：$f(x)\equiv A$，$x\in(0,+\infty)$．

13．设函数 f 在 $(0,+\infty)$ 上满足方程 $f(x^2)=f(x)$，且

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=f(1).$$

证明：$f(x)\equiv f(1)$，$x\in(0,+\infty)$．

14．设函数 f 定义在 $(a,+\infty)$ 上，f 在每一个有限区间 (a,b) 内有界，并满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=A$．证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A.$$

第四章　函数的连续性

§1　连续性概念

连续函数是数学分析中着重讨论的一类函数.

从几何形象上粗略地说,连续函数在坐标平面上的图象是一条连绵不断的曲线.当然我们不能满足于这种直观的认识,而应给出函数连续性的精确定义,并由此出发研究连续函数的性质.本节中先定义函数在一点的连续性和在区间上的连续性.

一　函数在一点的连续性

定义 1　设函数 f 在某 $U(x_0)$ 内有定义.若

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{1}$$

则称 f **在点 x_0 连续**.

例如,函数 $f(x)=2x+1$ 在点 $x=2$ 连续,因为

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (2x+1) = 5 = f(2).$$

又如,函数

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在点 $x=0$ 连续,因为

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0).$$

为引入函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续的另一种表述,记 $\Delta x = x - x_0$,称为**自变量** x(在点 x_0)**的增量或改变量**.设 $y_0 = f(x_0)$,相应的**函数** y(在点 x_0)**的增量**记为

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = y - y_0.$$

注　自变量的增量 Δx 或函数的增量 Δy 可以是正数,也可以是 0 或负数.

引进了增量的概念之后,易见"函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续"等价于

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

由于函数在一点的连续性是通过极限来定义的,因而也可直接用 $\varepsilon-\delta$ 方式来叙述,即:若对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon, \tag{2}$$

则称函数 f 在点 x_0 连续.

由上述定义,我们可得出函数 f 在点 x_0 有极限与 f 在 x_0 连续这两个概念之间的联系.首先,f 在点 x_0 有极限是 f 在 x_0 连续的必要条件;进一步说,"f 在点 x_0 连续"不仅要求 f 在点 x_0 有极限,而且其极限值应等于 f 在 x_0 的函数值 $f(x_0)$.其次,在讨论极限时,我们假定 f 在点 x_0 的某空心邻域 $U^{\circ}(x_0)$ 内有定义(f 在点 x_0 可以没有定义),而"f 在点 x_0 连续"则要求 f 在某 $U(x_0)$ 内(包括点 x_0)有定义,此时由于(2)式当 $x=x_0$ 时总是成立的,所以在极限定义中的"$0<|x-x_0|<\delta$"换成了在连续定义中的"$|x-x_0|<\delta$".最后,(1)式又可表示为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(\lim_{x\to x_0}x),$$

可见"f 在点 x_0 连续"意味着极限运算 $\lim\limits_{x\to x_0}$ 与对应法则 f 的可交换性.

例 1　证明函数 $f(x)=xD(x)$ 在点 $x=0$ 连续,其中 $D(x)$ 为狄利克雷函数.

证　由 $f(0)=0$ 及 $|D(x)|\leqslant 1$,对任给的 $\varepsilon>0$,为使

$$|f(x)-f(0)|=|xD(x)|\leqslant|x|<\varepsilon,$$

只要取 $\delta=\varepsilon$,即可按 $\varepsilon-\delta$ 定义推得 f 在 $x=0$ 连续.　□

相应于 f 在点 x_0 的左、右极限的概念,我们给出左、右连续的定义如下:

定义 2　设函数 f 在某 $U_+(x_0)$($U_-(x_0)$)内有定义.若

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)\ \left(\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)\right),$$

则称 f 在点 x_0 **右(左)连续**.

根据上述定义 1 与定义 2,不难推出如下定理.

定理 4.1　函数 f 在点 x_0 连续的充要条件是:f 在点 x_0 既是右连续,又是左连续.

例 2　讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}x+2, x\geqslant 0,\\ x-2, x<0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 的连续性.

解　因为

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+2)=2,$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-2)=-2,$$

而 $f(0)=2$,所以 f 在点 $x=0$ 右连续,但不左连续,从而它在 $x=0$ 不连续(见

图 4-1). □

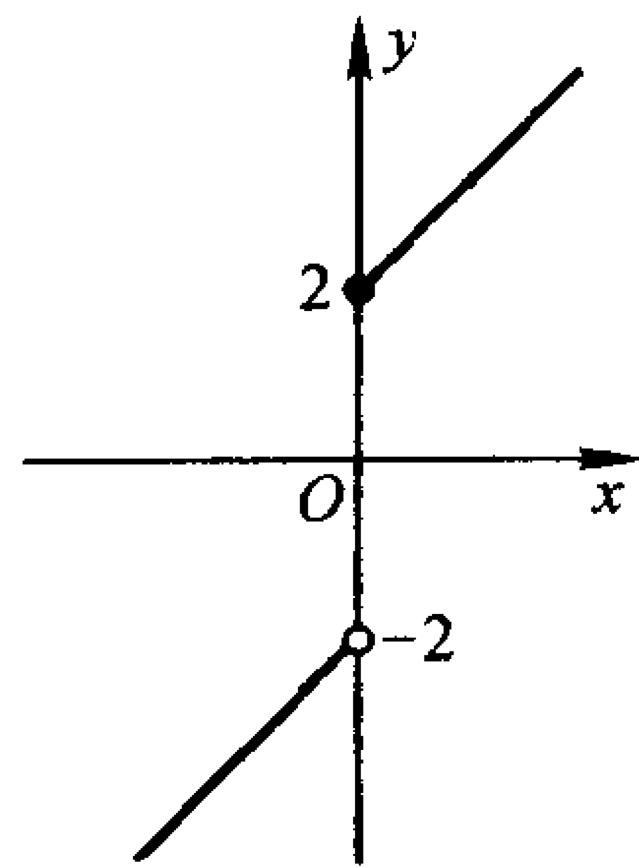


图 4-1

二 间断点及其分类

定义 3 设函数 f 在某 $U^\circ(x_0)$ 内有定义. 若 f 在点 x_0 无定义, 或 f 在点 x_0 有定义而不连续, 则称点 x_0 为函数 f 的**间断点**或**不连续点**.

按此定义以及上一段中关于极限与连续性之间联系的讨论, 若 x_0 为函数 f 的间断点, 则必出现下列情形之一:

(i) f 在点 x_0 无定义或极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在;

(ii) f 在点 x_0 有定义且极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在①, 但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

据此, 我们对函数的间断点作如下分类:

1. **可去间断点** 若

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A,$$

而 f 在点 x_0 无定义, 或有定义但 $f(x_0)\neq A$, 则称 x_0 为 f 的**可去间断点**.

例如, 对于函数 $f(x)=|\operatorname{sgn} x|$, 因 $f(0)=0$, 而

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \neq f(0),$$

故 $x=0$ 为 $f(x)=|\operatorname{sgn} x|$ 的可去间断点. 又如函数 $g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, 由于 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$, 而 g 在 $x=0$ 无定义, 所以 $x=0$ 是函数 g 的可去间断点.

设 x_0 为函数 f 的可去间断点, 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. 我们按如下方法定义一个函数 $\hat{f}$: 当 $x\neq x_0$ 时, $\hat{f}(x)=f(x)$; 当 $x=x_0$ 时, $\hat{f}(x_0)=A$. 易见, 对于函数 $\hat{f}$, x_0 是它的连续点. 例如, 对上述的 $g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, 我们定义

$$\hat{g}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

则 $\hat{g}$ 在 $x=0$ 连续.

2. **跳跃间断点** 若函数 f 在点 x_0 的左、右极限都存在, 但

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x),$$

则称点 x_0 为函数 f 的**跳跃间断点**.

例如, 对函数 $f(x)=[x]$ (图 1-8), 当 $x=n$ (n 为整数) 时有

---

① 这里所说的极限存在是指存在有限极限, 即不包括非正常极限.

$$\lim_{x\to n^-}[x]=n-1,\ \lim_{x\to n^+}[x]=n,$$

所以在整数点上函数 f 的左、右极限不相等，从而整数点都是函数 $f(x)=[x]$ 的跳跃间断点. 又如符号函数 $\operatorname{sgn} x$ 在点 $x=0$ 处的左、右极限分别为 -1 和 1，故 $x=0$ 是 $\operatorname{sgn} x$ 的跳跃间断点(图 1－3).

可去间断点和跳跃间断点统称为**第一类间断点**. 第一类间断点的特点是函数在该点处的左、右极限都存在.

3. 函数的所有其他形式的间断点，即使得函数至少有一侧极限不存在的那些点，称为**第二类间断点**.

例如，函数 $y=\frac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时不存在有限的极限，故 $x=0$ 是 $y=\frac{1}{x}$ 的第二类间断点. 函数 $\sin\frac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处左、右极限都不存在，故 $x=0$ 是 $\sin\frac{1}{x}$ 的第二类间断点. 又如，对于狄利克雷函数 $D(x)$，其定义域 $\mathbf{R}$ 上每一点 x 都是第二类间断点.

三　区间上的连续函数

若函数 f 在区间 I 上的每一点都连续，则称 f 为 I 上的**连续函数**. 对于闭区间或半开半闭区间的端点，函数在这些点上连续是指左连续或右连续.

例如，函数 $y=c$，$y=x$，$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数. 又如函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 在 $(-1,1)$ 每一点处都连续，在 $x=1$ 为左连续，在 $x=-1$ 为右连续，因而它在 $[-1,1]$ 上连续.

若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上仅有有限个第一类间断点，则称 f 在 $[a,b]$ 上**分段连续**. 例如，函数 $y=[x]$ 和 $y=x-[x]$ 在区间 $[-3,3]$ 上是分段连续的.

在 §3 中我们将证明任何初等函数在其定义区间上为连续函数. 同时，也存在着在其定义区间上每一点处都不连续的函数，如前面已提到的狄利克雷函数.

例 3　证明：黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{当 } x=\dfrac{p}{q}\ (p、q\text{ 为正整数}, p/q\text{ 为既约真分数}),\\ 0, & \text{当 } x=0,1\text{ 及 }(0,1)\text{ 内无理数}\end{cases}$$

在 $(0,1)$ 内任何无理点处都连续，任何有理点处都不连续.

证　设 $\xi\in(0,1)$ 为无理数. 任给 $\varepsilon>0\left(\text{不妨设 }\varepsilon<\frac{1}{2}\right)$，满足 $\frac{1}{q}\geqslant\varepsilon$ 的正整数 q 显然只有有限个(但至少有一个，如 $q=2$)，从而使 $R(x)\geqslant\varepsilon$ 的有理数 $x\in(0,1)$ 只有有限个$\left(\text{至少有一个，如}\frac{1}{2}\right)$，设为 $x_1,\cdots,x_n$. 取

$$\delta=\min(|x_1-\xi|,\cdots,|x_n-\xi|,\xi,1-\xi),$$

则对任何 $x\in U(\xi;\delta)$ $(\subset(0,1))$，当 x 为有理数时有 $R(x)<\varepsilon$，当 x 为无理数时 $R(x)=0$. 于是，对任何 $x\in U(\xi;\delta)$，总有

$$|R(x)-R(\xi)|=R(x)<\varepsilon.$$

这就证明了 $R(x)$在无理点 ξ 处连续.

现设$\frac{p}{q}$为(0,1)内任一有理数. 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2q}$，对任何正数 δ(无论多么小)，在 $U\left(\frac{p}{q};\delta\right)$内总可取到无理数$x$ $(\in(0,1))$，使得

$$\left|R(x)-R\left(\frac{p}{q}\right)\right|=\frac{1}{q}>\varepsilon_0.$$

所以 $R(x)$在任何有理点处都不连续. □

习　　题

1. 按定义证明下列函数在其定义域内连续：

(1) $f(x)=\frac{1}{x}$；　(2) $f(x)=|x|$.

2. 指出下列函数的间断点并说明其类型：

(1) $f(x)=x+\frac{1}{x}$；　(2) $f(x)=\frac{\sin x}{|x|}$；

(3) $f(x)=[|\cos x|]$；　(4) $f(x)=\operatorname{sgn}|x|$；

(5) $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$；

(6) $f(x)=\begin{cases}x, & x\text{ 为有理数},\\ -x, & x\text{ 为无理数};\end{cases}$

(7) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+7}, & -\infty<x<-7,\\ x, & -7\leqslant x\leqslant 1\\ (x-1)\sin\frac{1}{x-1}, & 1<x<+\infty.\end{cases}$

3. 延拓下列函数，使其在 $\mathbf{R}$ 上连续：

(1) $f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}$；　(2) $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$；

(3) $f(x)=x\cos\frac{1}{x}$.

4. 证明：若 f 在点x_0 连续，则$|f|$与 f^2 也在点 x_0 连续. 又问：若$|f|$或 f^2 在 I 上连续，那么 f 在I 上是否必连续?

5. 设当 $x\neq0$ 时 $f(x)\equiv g(x)$，而 $f(0)\neq g(0)$. 证明：f 与 g 两者中至多有一个在$x=0$ 连续.

---

6. 设 f 为区间I 上的单调函数. 证明：若 $x_0\in I$ 为f 的间断点，则 x_0 必是 f 的第一类间断点.

7. 设函数 f 只有可去间断点,定义

$$g(x)=\lim_{y\to x}f(y).$$

证明 g 为连续函数.

8. 设 f 为 $\mathbf{R}$ 上的单调函数,定义

$$g(x)=f(x+0).$$

证明 g 在 $\mathbf{R}$ 上每一点都右连续.

9. 举出定义在[0,1]上分别符合下述要求的函数:

(1)只在$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$和$\frac{1}{4}$三点不连续的函数;

(2)只在$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$和$\frac{1}{4}$三点连续的函数;

(3)只在$\frac{1}{n}$($n=1,2,3,\cdots$)上间断的函数;

(4)只在 $x=0$ 右连续,而在其他点都不连续的函数.

§2 连续函数的性质

一 连续函数的局部性质

若函数 f 在点 x_0 连续,则 f 在点 x_0 有极限,且极限值等于函数值 $f(x_0)$. 从而,根据函数极限的性质能推断出函数 f 在 $U(x_0)$的性态.

定理 4.2(局部有界性) 若函数 f 在点 x_0 连续,则 f 在某 $U(x_0)$内有界.

定理 4.3(局部保号性) 若函数 f 在点 x_0 连续,且 $f(x_0)>0$(或<0),则对任何正数 $r<f(x_0)$ (或 $r<-f(x_0)$),存在某 $U(x_0)$,使得对一切 $x\in U(x_0)$有

$$f(x)>r\ (\text{或}\ f(x)<-r).$$

注 在具体应用局部保号性时,常取 $r=\frac{1}{2}f(x_0)$,则(当 $f(x_0)>0$ 时)存在某 $U(x_0)$,使在其内有 $f(x)>\frac{1}{2}f(x_0)$.

定理 4.4(四则运算) 若函数 f 和 g 在点 x_0 连续,则 $f\pm g$,$f\cdot g$,f/g(这里 $g(x_0)\neq 0$)也都在点 x_0 连续.

以上三个定理的证明,都可从函数极限的有关定理直接推得.

对常量函数 $y=c$ 和函数 $y=x$ 反复应用定理 4.4,能推出多项式函数

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

和有理函数 $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ (P,Q 为多项式)在其定义域的每一点都是连续的. 同样,由 $\sin x$ 和 $\cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上的连续性,可推出 $\tan x$ 与 $\cot x$ 在其定义域的每

一点都连续.

关于复合函数的连续性,有如下定理:

定理 4.5 若函数 f 在点 x_0 连续, g 在点 u_0 连续, $u_0=f(x_0)$, 则复合函数 $g\circ f$ 在点 x_0 连续.

证 由于 g 在 u_0 连续,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_1>0$,使得当 $|u-u_0|<\delta_1$ 时有

$$|g(u)-g(u_0)|<\varepsilon. \tag{1}$$

又由 $u_0=f(x_0)$ 及 $u=f(x)$ 在点 x_0 连续,故对上述 $\delta_1>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时有 $|u-u_0|=|f(x)-f(x_0)|<\delta_1$. 联系(1)得:对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时有

$$|g(f(x))-g(f(x_0))|<\varepsilon.$$

这就证明了 $g\circ f$ 在点 x_0 连续. □

注 根据连续性的定义,上述定理的结论可表为

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)) = g(f(x_0)). \tag{2}$$

例 1 求 $\lim\limits_{x\to1}\sin(1-x^2)$.

解 $\sin(1-x^2)$ 可看作函数 $g(u)=\sin u$ 与 $f(x)=1-x^2$ 的复合. 由(2)式得

$$\lim_{x\to1}\sin(1-x^2)=\sin(\lim_{x\to1}(1-x^2))=\sin 0=0.$$ □

注 若复合函数 $g\circ f$ 的内函数 f 当 $x\to x_0$ 时极限为 a,而 $a\neq f(x_0)$ 或 f 在 x_0 无定义(即 x_0 为 f 的可去间断点),又外函数 g 在 $u=a$ 连续,则我们仍可用上述定理来求复合函数的极限,即有

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)). \tag{3}$$

读者还可证明: (3)式不仅对于 $x\to x_0$ 这种类型的极限成立,而且对于 $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ 或 $x\to x_0^{\pm}$ 等类型的极限也是成立的.

例 2 求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{2-\dfrac{\sin x}{x}}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2-\dfrac{\sin x}{x}}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{2-\dfrac{\sin x}{x}}=\sqrt{2-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}}=\sqrt{2-1}=1$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2-\dfrac{\sin x}{x}}=\sqrt{2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}}=\sqrt{2-0}=\sqrt{2}$. □

二 闭区间上连续函数的基本性质

设 f 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数,本段中我们讨论 f 在 $[a,b]$ 上的整体性质.

定义 1　设 f 为定义在数集 D 上的函数.若存在 $x_0\in D$,使得对一切 $x\in D$ 有

$$f(x_0)\geqslant f(x)\ \ (f(x_0)\leqslant f(x)),$$

则称 f 在 D 上有最大(最小)值,并称 $f(x_0)$ 为 f 在 D 上的**最大(最小)值**.

例如,$\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上有最大值 1,最小值 0.但一般而言,函数 f 在其定义域 D 上不一定有最大值或最小值(即使 f 在 D 上有界).如 $f(x)=x$ 在 $(0,1)$ 上既无最大值也无最小值.又如

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\in(0,1),\\ 2, & x=0\text{ 与 }1,\end{cases}\tag{4}$$

它在闭区间 $[0,1]$ 上也无最大、最小值.下述定理给出了函数能取得最大、最小值的充分条件.

定理 4.6(最大、最小值定理)　若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 f 在 $[a,b]$ 上有最大值与最小值.

此定理和随后的定理 4.7 以及本节最后的定理 4.9,其证明将在第七章 §2 给出.在这里读者先对这些定理有所了解,并能初步运用它们.

推论(有界性定理)　若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

易见由(4)式给出的函数 g 在闭区间 $[0,1]$ 上无界,请读者考虑为什么对函数 g 上述推论的结论不成立.

定理 4.7(介值性定理)　设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)\neq f(b)$.若 μ 为介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何实数($f(a)<\mu<f(b)$ 或 $f(a)>\mu>f(b)$),则至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得

$$f(x_0)=\mu.$$

这个定理表明,若 f 在 $[a,b]$ 上连续,又不妨设 $f(a)<f(b)$,则 f 在 $[a,b]$ 上必能取得区间 $[f(a),f(b)]$ 中的一切值,即有

$$[f(a),f(b)]\subset f([a,b]),$$

其几何意义如图 4-2 所示.

推论(根的存在定理)　若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号(即 $f(a)f(b)<0$),则至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得

$$f(x_0)=0,$$

即方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根.

这个推论的几何解释如图 4-3 所示:若点 $A(a,f(a))$ 与 $B(b,f(b))$ 分别在 x 轴的两侧,则连接 A、B 的连续曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴至少有一个交点.

应用介值性定理,我们还容易推得连续函数的下述性质:若 f 在区间 I 上连

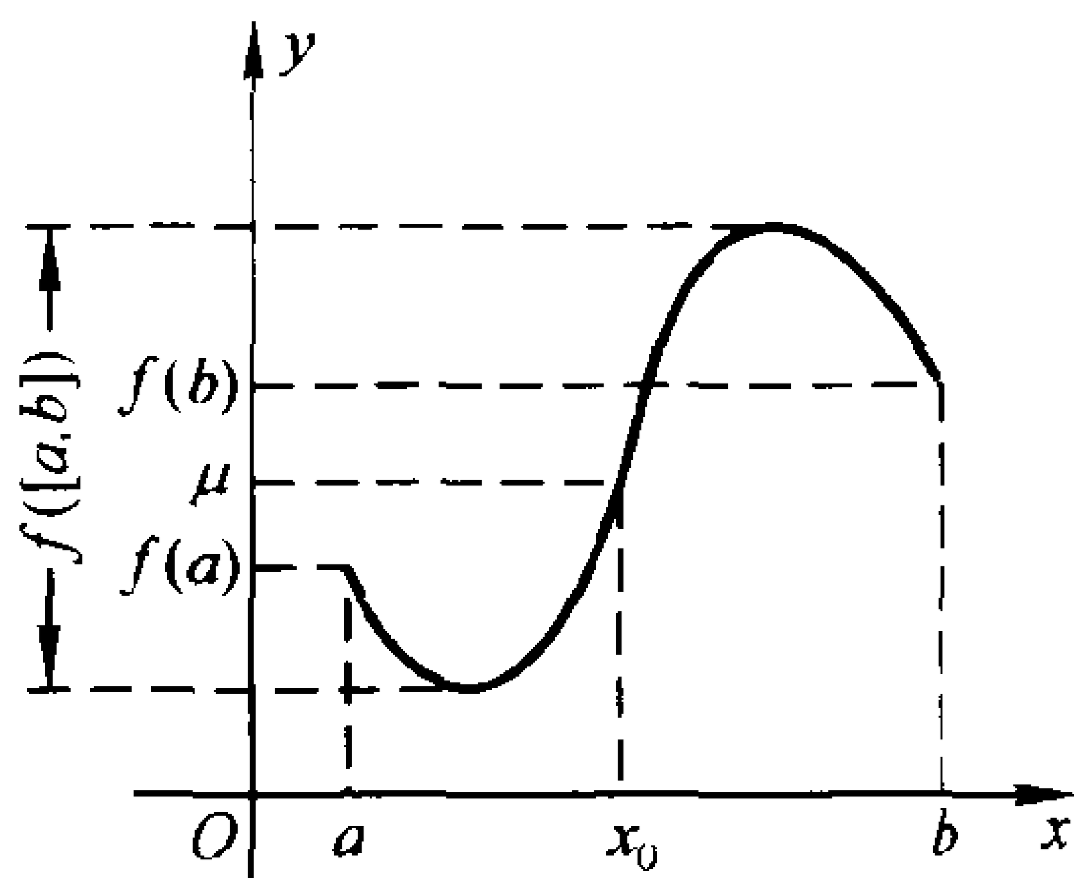


图 4-2

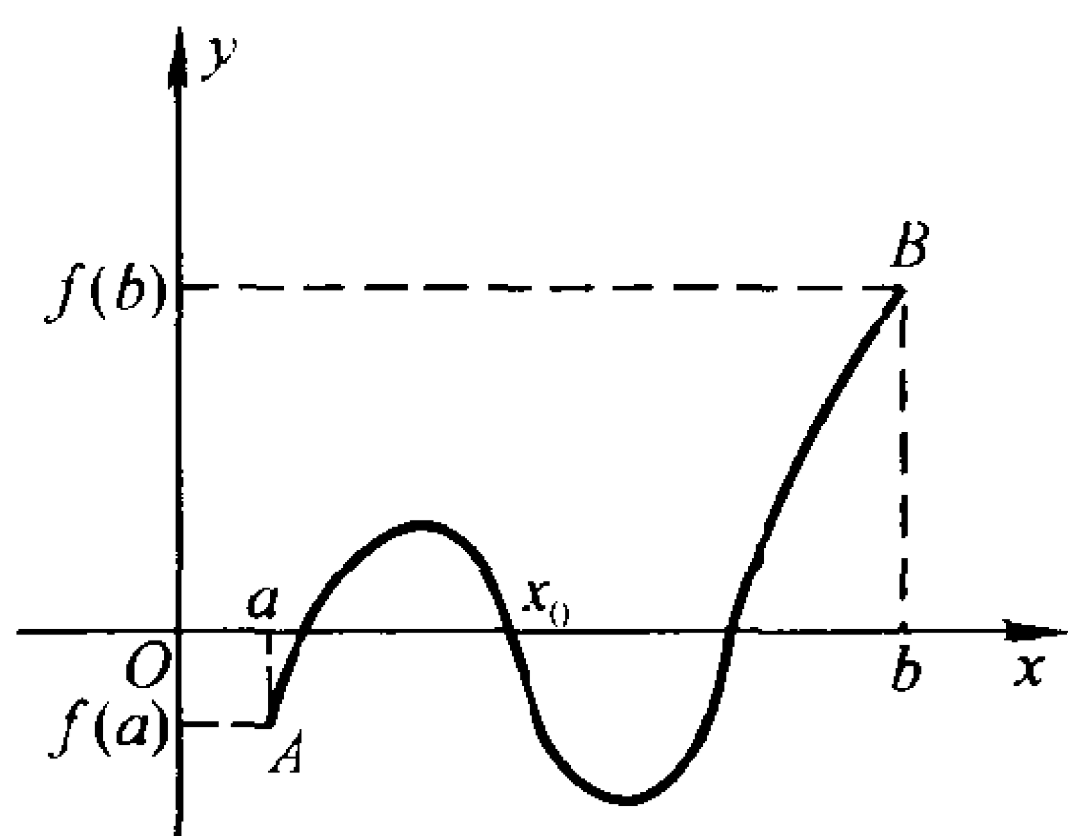


图 4-3

续且不是常量函数，则值域 $f(I)$ 也是一个区间；特别，若 I 为闭区间 $[a,b]$，f 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M，最小值为 m，则 $f([a,b])=[m,M]$；又若 f 为 $[a,b]$ 上的增（减）连续函数且不为常数，则

$$f([a,b]) = [f(a),f(b)]\ ([f(b),f(a)]).$$

下面举例说明介值性定理的应用.

例 3 证明：若 $r>0$，n 为正整数，则存在唯一正数 x_0，使得 $x_0^n=r$（x_0 称为 r 的 n 次正根（即算术根），记作 $x_0=\sqrt[n]{r}$）.

证 先证存在性. 由于当 $x\to+\infty$ 时有 $x^n\to+\infty$，故必存在正数 a，使得 $a^n>r$. 因 $f(x)=x^n$ 在 $[0,a]$ 上连续，并有 $f(0)<r<f(a)$，故由介值性定理，至少存在一点 $x_0\in(0,a)$，使得 $f(x_0)=x_0^n=r$.

再证唯一性. 设正数 x_1 使得 $x_1^n=r$，则有

$$x_0^n - x_1^n = (x_0 - x_1)(x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_1 + \cdots + x_1^{n-1}) = 0,$$

由于第二个括号内的数为正，所以只能 $x_0-x_1=0$，即 $x_1=x_0$. □

例 4 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，满足

$$f([a,b]) \subset [a,b]. \tag{5}$$

证明：存在 $x_0\in[a,b]$，使得

$$f(x_0) = x_0. \tag{6}$$

证 条件(5)意味着：对任何 $x\in[a,b]$ 有 $a\leqslant f(x)\leqslant b$，特别有

$$a \leqslant f(a) \quad 以及 \quad f(b) \leqslant b.$$

若 $a=f(a)$ 或 $f(b)=b$，则取 $x_0=a$ 或 b，从而(6)式成立. 现设 $a<f(a)$ 与 $f(b)<b$. 令

$$F(x) = f(x) - x,$$

则 $F(a)=f(a)-a>0$，$F(b)=f(b)-b<0$. 故由根的存在性定理，存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $F(x_0)=0$，即 $f(x_0)=x_0$. □

从本例的证明过程可见，在应用介值性定理或根的存在性定理证明某些问

题时，选取合适的辅助函数(如在本例中令 $F(x)=f(x)-x$)，可收到事半功倍的效果.

三　反函数的连续性

定理 4.8　若函数 f 在 $[a,b]$ 上严格单调并连续，则反函数 f^{-1} 在其定义域 $[f(a),f(b)]$ 或 $[f(b),f(a)]$ 上连续.

证　不妨设 f 在 $[a,b]$ 上严格增. 此时 f 的值域即反函数 f^{-1} 的定义域为 $[f(a),f(b)]$. 任取 $y_0\in(f(a),f(b))$，设 $x_0=f^{-1}(y_0)$，则 $x_0\in(a,b)$. 于是对任给的 $\varepsilon>0$，可在 (a,b) 内 x_0 的两侧各取异于 x_0 的点 x_1,x_2　$(x_1<x_0<x_2)$，使它们与 x_0 的距离小于 ε(图 4-4).

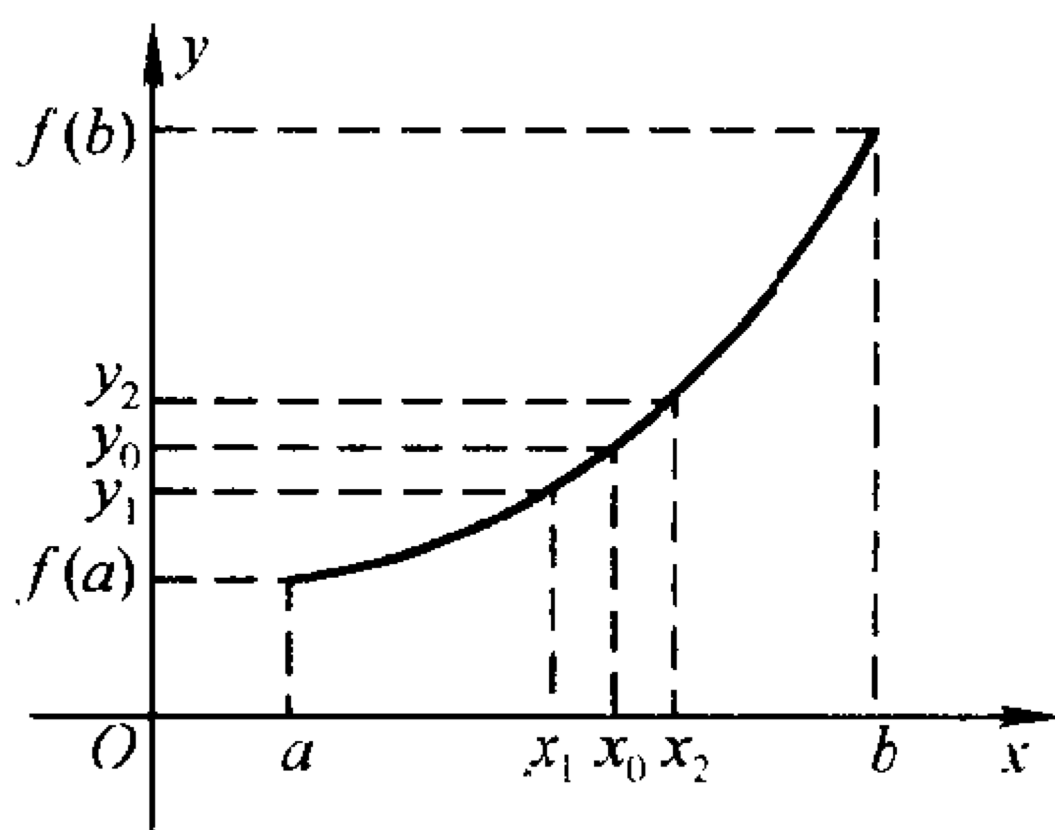


图　4-4

设与 x_1,x_2 对应的函数值分别为 y_1,y_2，由 f 的严格增性知 $y_1<y_0<y_2$. 令

$$\delta=\min(y_2-y_0,y_0-y_1),$$

则当 $y\in U(y_0;\delta)$ 时，对应的 $x=f^{-1}(y)$ 的值都落在 x_1 与 x_2 之间，故有

$$|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|=|x-x_0|<\varepsilon,$$

这就证明了 f^{-1} 在点 y_0 连续，从而 f^{-1} 在 $(f(a),f(b))$ 内连续.

类似地可证 f^{-1} 在其定义区间的端点 $f(a)$ 与 $f(b)$ 分别为右连续与左连续. 所以 f^{-1} 在 $[f(a),f(b)]$ 上连续. □

例 5　由于 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上严格单调且连续，故其反函数 $y=\arcsin x$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续.

同理可得其它反三角函数也在相应的定义区间上连续. 如 $y=\arccos x$ 在 $[-1,1]$ 上连续，$y=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续等. □

例 6　由于 $y=x^n$(n 为正整数)在 $[0,+\infty)$ 上严格单调且连续，故 $y=x^{\frac{1}{n}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续. 又若把 $y=x^{-\frac{1}{n}}$(n 为正整数)看作由 $y=u^{\frac{1}{n}}$ 与 $u=\frac{1}{x}$ 复合而成的函数，则由复合函数的连续性，$y=x^{-\frac{1}{n}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续.

综上可知，若 q 为非零整数，则 $y=x^{\frac{1}{q}}$ 是其定义区间上的连续函数. □

例 7　证明：有理幂函数 $y=x^{\alpha}$ 在其定义区间上连续.

证　设有理数 $\alpha=\frac{p}{q}$，这里 p,q $(\neq0)$ 为整数. 因为 $y=u^{\frac{1}{q}}$ 与 $u=x^p$ 均在其定义区间上连续，所以复合函数

$$y = (x^p)^{\frac{1}{q}} = x^\alpha$$

也是其定义区间上的连续函数. □

四 一致连续性

函数 f 在区间上连续，是指 f 在该区间上每一点都连续. 本段中讨论的一致连续性概念反映了函数在区间上更强的连续性.

定义 2 设 f 为定义在区间 I 上的函数. 若对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对任何 $x',x''\in I$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

则称函数 f 在区间 I 上**一致连续**.

直观地说，f 在 I 上一致连续意味着：不论两点 x' 与 x'' 在 I 中处于什么位置，只要它们的距离小于 δ，就可使 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

例 8 证明 $f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

证 任给 $\varepsilon>0$，由于

$$|f(x')-f(x'')|=|a||x'-x''|,$$

故可选取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{|a|}$，则对任何 $x',x''\in(-\infty,+\infty)$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

这就证得 $f(x)=ax+b$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续. □

例 9 证明函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内不一致连续（尽管它在 $(0,1)$ 内每一点都连续）.

证 按一致连续性的定义，为证函数 f 在某区间 I 上不一致连续，只须证明：存在某 $\varepsilon_0>0$，对任何正数 δ（不论 δ 多么小），总存在两点 $x',x''\in I$，尽管 $|x'-x''|<\delta$，但有 $|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon_0$.

对于本例中函数 $y=\dfrac{1}{x}$，可取 $\varepsilon_0=1$，对无论多么小的正数 $\delta\left(<\dfrac{1}{2}\right)$，只要取 $x'=\delta$ 与 $x''=\dfrac{\delta}{2}$（图 4-5），则虽有

$$|x'-x''|=\frac{\delta}{2}<\delta,$$

但

$$\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=\frac{1}{\delta}>1,$$

所以 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内不一致连续. □

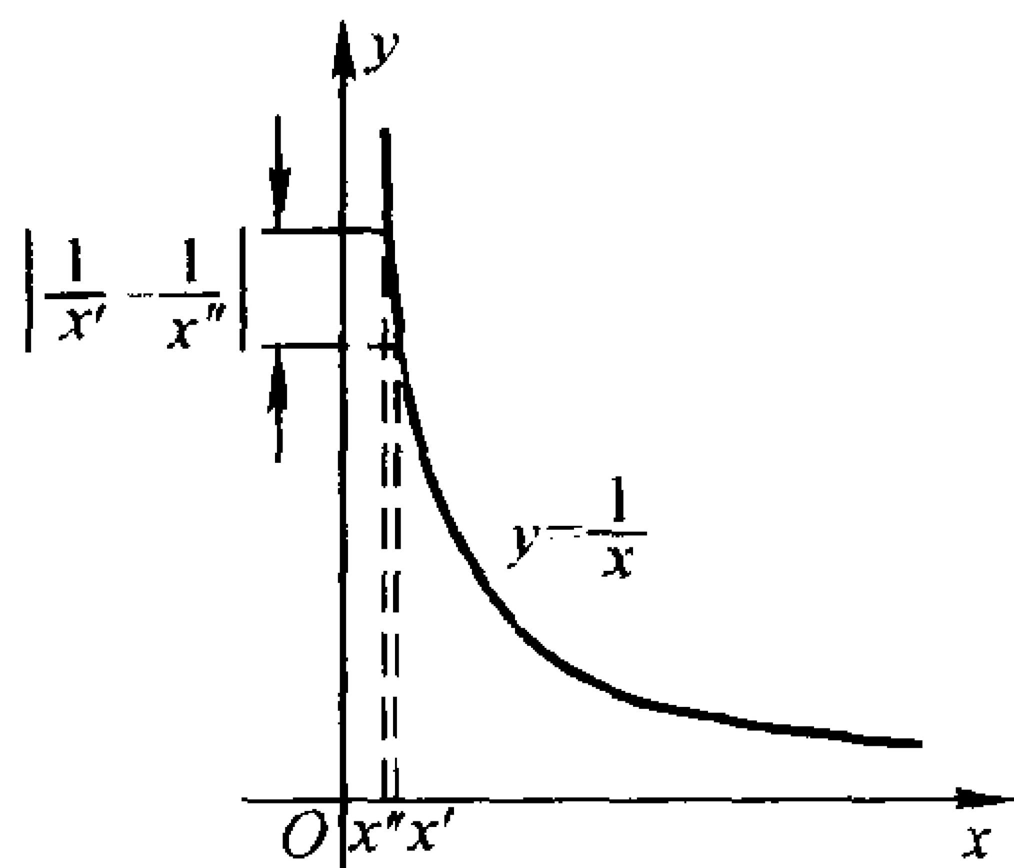


图 4-5

函数在区间上连续与一致连续这两个概

念有着重要的差别. f 在区间 I 上连续,是指任给 $\varepsilon>0$,对每一点 $x\in I$,都存在相应的正数 $\delta=\delta(\varepsilon,x)$,只要 $x'\in I$ 且 $|x-x'|<\delta$,就有 $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$. 一般来说,对于 I 上不同的点,相应的正数 δ 是不同的. 换句话说,δ 的取值除依赖于 ε 之外,还与点 x 有关,由此我们写 $\delta=\delta(\varepsilon,x)$ 以表示 δ 与 ε 和 x 的依赖关系. 如果能做到 δ 只与 ε 有关,而与 x 无关,或者说存在适合于 I 上所有点 x 的公共的 δ,即 $\delta=\delta(\varepsilon)$,那么函数就不仅在 I 上连续,而且是一致连续了.

所以,f 在区间 I 上一致连续是 f 的又一个整体性质,由它可推出 f 在 I 上每一点都连续的这一局部性质(只要在定义 2 中把 x' 看作定点,把 x'' 看作动点,即得 f 在点 x' 连续). 而从例 9 可见,由 f 在区间 I 上每一点都连续,并不能推出 f 在 I 上一致连续. 然而,对于定义在闭区间上的函数来说,由它在每一点都连续却可推出在区间上的一致连续性,即有如下重要定理:

定理 4.9(一致连续性定理) 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续.

例 10 设区间 I_1 的右端点为 $c\in I_1$,区间 I_2 的左端点也为 $c\in I_2$(I_1,I_2 可分别为有限或无限区间). 试按一致连续性的定义证明:若 f 分别在 I_1 和 I_2 上一致连续,则 f 在 $I=I_1\cup I_2$ 上也一致连续.

证 任给 $\varepsilon>0$,由 f 在 I_1 和 I_2 上的一致连续性,分别存在正数 δ_1 和 δ_2,使得对任何 $x',x''\in I$,只要 $|x'-x''|<\delta_1$,就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon; \tag{7}$$

又对任何 $x',x''\in I_2$,只要 $|x'-x''|<\delta_2$,也有(7)式成立.

点 $x=c$ 作为 I_1 的右端点,f 在点 c 为左连续,作为 I_2 的左端点,f 在点 c 为右连续,所以 f 在点 c 连续. 故对上述 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_3>0$,当 $|x-c|<\delta_3$ 时有

$$|f(x)-f(c)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

令 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$,对任何 $x',x''\in I$,$|x'-x''|<\delta$,分别讨论以下两种情形:

(i) x',x'' 同时属于 I_1 或同时属于 I_2,则(7)式成立;

(ii) x',x'' 分属 I_1 与 I_2,设 $x'\in I_1,x''\in I_2$,则

$$|x'-c|=c-x'<x''-x'<\delta\leqslant\delta_3,$$

故由(8)式得 $|f(x')-f(c)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 同理得 $|f(x'')-f(c)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 从而也有(7)式成立. 这就证明了 f 在 I 上一致连续. □

习 题

1. 讨论复合函数 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 的连续性,设

(1)$f(x)=\text{sgn}\, x, g(x)=1+x^2$;

(2)$f(x)=\text{sgn}\, x, g(x)=(1-x^2)x$.

2. 设 f,g 在点 x_0 连续，证明：

(1)若 $f(x_0)>g(x_0)$，则存在 $U(x_0;\delta)$，使在其内有 $f(x)>g(x)$；

(2)若在某 $U^\circ(x_0)$ 内有 $f(x)>g(x)$，则 $f(x_0)\geqslant g(x_0)$.

3. 设 f,g 在区间 I 上连续. 记

$$F(x)=\max\{f(x),g(x)\},G(x)=\min\{f(x),g(x)\}.$$

证明 F 和 G 也都在 I 上连续.

提示：利用第一章总练习题 1.

4. 设 f 为 $\mathbf{R}$ 上连续函数，常数 $c>0$. 记

$$F(x)=\begin{cases}-c, & 若\ f(x)<-c,\\ f(x), & 若\ |f(x)|\leqslant c,\\ c, & 若\ f(x)>c.\end{cases}$$

证明 F 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

提示：$F(x)=\max\{-c,\min\{c,f(x)\}\}$.

5. 设 $f(x)=\sin x, g(x)=\begin{cases}x-\pi, x\leqslant 0,\\ x+\pi, x>0.\end{cases}$

证明：复合函数 $f\circ g$ 在 $x=0$ 连续，但 g 在 $x=0$ 不连续.

6. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 证明：f 在 $[a,+\infty)$ 上有界. 又问 f 在 $[a,+\infty)$ 上必有最大值或最小值吗？

7. 若对任何充分小的 $\varepsilon>0$，f 在 $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ 上连续，能否由此推出 f 在 (a,b) 内连续.

8. 求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\pi-x)\tan x$；　(2) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x\sqrt{1+2x}-\sqrt{x^2-1}}{x+1}$.

9. 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上连续，且对任何 $x\in[a,b]$，$f(x)\neq0$，则 f 在 $[a,b]$ 上恒正或恒负.

10. 证明：任一实系数奇次方程至少有一个实根.

11. 试用一致连续的定义证明：若 f,g 都在区间 I 上一致连续，则 $f+g$ 也在 I 上一致连续.

12. 证明 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

提示：$[0,+\infty)=[0,1]\cup[1,+\infty)$，利用定理 4.9 和例 10 的结论.

13. 证明：$f(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，但在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续.

14. 设函数 f 在区间 I 上满足**利普希茨**(Lipschitz)**条件**，即存在常数 $L>0$，使得对 I 上任意两点 x',x'' 都有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant L|x'-x''|.$$

证明 f 在 I 上一致连续.

15. 证明 $\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

提示：利用不等式 $|\sin x'-\sin x''|\leqslant|x'-x''|$（见第三章 §1 例 4）.

16. 设函数 f 满足第 6 题的条件.证明 f 在$[a,+\infty)$上一致连续.

17. 设函数 f 在$[0,2a]$上连续,且 $f(0)=f(2a)$.证明:存在点 $x_0\in[0,a]$,使得 $f(x_0)=f(x_0+a)$.

18. 设 f 为$[a,b]$上的增函数,其值域为$[f(a),f(b)]$.证明 f 在$[a,b]$上连续.

19. 设 f 在$[a,b]$上连续,$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$.证明:存在 $\xi\in[a,b]$,使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].$$

20. 证明 $f(x)=\cos\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续.

提示:$[0,+\infty)=[0,1]\cup[1,+\infty)$.在$[1,+\infty)$上成立不等式

$$\left|\cos\sqrt{x'}-\cos\sqrt{x''}\right|\leqslant\left|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}\right|\leqslant|x'-x''|.$$

§3 初等函数的连续性

从前面两节知道,在基本初等函数中,三角函数、反三角函数以及有理指数幂函数都是其定义域上的连续函数.本节将讨论指数函数、对数函数与实指数幂函数的连续性,以及初等函数的连续性.

一 指数函数的连续性

在第一章中,我们已定义了实指数的乘幂,并证明了指数函数 $y=a^x\ (0<a\neq1)$在$\mathbf{R}$上是严格单调的.下面先把关于有理指数幂的一个重要性质推广到实指数幂,然后证明指数函数的连续性.

定理 4.10 设 $a>0,\alpha,\beta$ 为任意实数,则有

$$a^\alpha\cdot a^\beta=a^{\alpha+\beta},(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta}.$$

证 不妨设 $a>1$,则 a^x 由第一章§3(6)式所定义,即

$$a^x=\sup_{r<x}\{a^r\mid r\text{ 为有理数}\}.$$

任给 $\varepsilon>0$,设 r,s 为两个有理数,且 $r<\alpha,s<\beta$,使得

$$a^\alpha-\varepsilon<a^r,a^\beta-\varepsilon<a^s.$$

由 a^x 的严格增性得

$$a^{r+s}<a^{\alpha+\beta}.$$

又有 $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$,故得

$$(a^\alpha-\varepsilon)(a^\beta-\varepsilon)<a^{\alpha+\beta}.$$

由 ε 的任意性推出

$$a^\alpha\cdot a^\beta\leqslant a^{\alpha+\beta}.$$

为证相反的不等式,设 p 为有理数,且 $p<\alpha+\beta$,使得

$$a^{\alpha+\beta}-\varepsilon<a^p.$$

再取有理数 r,s 使$r<\alpha,s<\beta$以及$p<r+s$,则有

$$a^p < a^{r+s} = a^r \cdot a^s < a^\alpha \cdot a^\beta,$$

故得到

$$a^{\alpha+\beta} - \varepsilon < a^\alpha \cdot a^\beta.$$

由 ε 的任意性推出 $a^{\alpha+\beta} \leqslant a^\alpha \cdot a^\beta$. 所以有 $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$.

后一等式的证明留给读者. □

定理 4.11 指数函数 a^x $(a>0)$在 $\mathbf{R}$ 上是连续的.

证 先设 $a>1$. 由第三章§2 例 4 知

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1 = a^0,$$

这表明 a^x 在 $x=0$ 连续. 现任取 $x_0\in\mathbf{R}$. 由定理 4.10 得

$$a^x = a^{x_0+(x-x_0)} = a^{x_0} \cdot a^{x-x_0}.$$

令 $t=x-x_0$, 则当 $x\to x_0$ 时有 $t\to 0$, 从而有

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} a^{x_0}a^{x-x_0} = a^{x_0}\lim_{t\to 0} a^t = a^{x_0}.$$

这就证明了 a^x 在任一点 x_0 连续.

当 $0<a<1$ 时, 令 $b=\dfrac{1}{a}$, 则有 $b>1$, 而

$$a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = b^{-x}$$

可看作函数 b^u 与 $u=-x$ 的复合, 所以此时 a^x 亦在 $\mathbf{R}$ 上连续. □

利用指数函数 a^x 的连续性, 以及第三章§5 例 4 中已证明的

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0,\ \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty\ (a>1),$$

可知 a^x 的值域为$(0,+\infty)$ $(0<a<1$ 时也是如此). 于是, a^x 的反函数——对数函数 $\log_a x$ 在其定义域$(0,+\infty)$内也连续.

例 1 设 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=a>0$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=b$. 证明

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = a^b.$$

证 补充定义 $u(x_0)=a$, $v(x_0)=b$, 则 $u(x)$, $v(x)$在点 x_0 连续, 从而 $v(x)\ln u(x)$在 x_0 连续, 所以 $u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$在 x_0 连续. 由此得

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to x_0}\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)} = \mathrm{e}^{b\ln a} = a^b.$$ □

二 初等函数的连续性

由于幂函数 x^α(α 为实数)可表为 $x^\alpha=\mathrm{e}^{\alpha\ln x}$, 它是函数 e^u 与 $u=\alpha\ln x$ 的复合, 故由指数函数与对数函数的连续性以及复合函数的连续性, 推得幂函数 $y=x^\alpha$ 在其定义域$(0,+\infty)$上连续.

前面已经指出, 常量函数、三角函数、反三角函数都是其定义域上的连续函

数,因此我们有下述定理:

定理 4.12　一切基本初等函数都是其定义域上的连续函数.

由于任何初等函数都是由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所得到,所以有

定理 4.13　任何初等函数都是在其定义区间上的连续函数.

下面举两个利用函数的连续性求极限的例子.

例 2　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解　由对数函数的连续性有

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]\\ &= \ln \mathrm{e} = 1.\end{aligned}$$ □

例 3　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos x}$.

解　由于 $x=0$ 属于初等函数 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos x}$ 的定义域之内,故由 f 的连续性得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\cos x} = f(0) = 0.$$ □

习　　题

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x\cos x+5}{1+x^2+\ln(1-x)}$;　(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}\right)$;

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;　(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}$.

2. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$.证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n^{b_n}=a^b$.

提示:$a_n^{b_n}=\mathrm{e}^{b_n\ln a_n}$.

总 练 习 题

1. 设函数 f 在(a,b)连续,且 $f(a+0)$与 $f(b-0)$为有限值.证明:

(1) f 在(a,b)内有界;

(2) 若存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)\geqslant\max\{f(a+0),f(b-0)\}$,则 f 在(a,b)内能取到最大值.

2. 设函数 f 在 (a,b) 内连续，且 $f(a+0)=f(b-0)=+\infty$. 证明 f 在 (a,b) 内能取到最小值.

3. 设函数 f 在区间 I 上连续，证明：

(1)若对任何有理数 $r\in I$ 有 $f(r)=0$，则在 I 上 $f(x)\equiv 0$；

(2)若对任意两个有理数 $r_1,r_2,r_1<r_2$，有 $f(r_1)<f(r_2)$，则 f 在 I 上严格增.

4. 设 a_1,a_2,a_3 为正数，$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$. 证明：方程

$$\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}=0$$

在区间 (λ_1,λ_2) 与 (λ_2,λ_3) 内各有一个根.

提示：考虑 $f(x)=a_1(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)+a_2(x-\lambda_1)(x-\lambda_3)+a_3(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$.

5. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，且对任何 $x\in[a,b]$，存在 $y\in[a,b]$，使得

$$|f(y)|<\frac{1}{2}|f(x)|.$$

证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=0$.

提示：函数 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上有最小值 $m=f(\xi)$，若 $m=0$，则已得证；若 $m>0$，可得矛盾.

6. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$，另有一组正数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$. 证明：存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n).$$

注：本章 §2 习题 19 是本题的特例，其中 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\dfrac{1}{n}$.

7. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续，满足 $0\leqslant f(x)\leqslant x,x\in[0,+\infty)$. 设 $a_1\geqslant 0,a_{n+1}=f(a_n),n=1,2,\cdots$. 证明：

(1) $\{a_n\}$ 为收敛数列；

(2)设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=t$，则有 $f(t)=t$；

(3)若条件改为 $0\leqslant f(x)<x,x\in(0,+\infty)$，则 $t=0$.

8. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$. 证明：对任何正整数 n，存在 $\xi\in[0,1]$，使得

$$f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi).$$

提示：$n=1$ 时取 $\xi=0$. $n>1$ 时令 $F(x)=f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-f(x)$，则有

$$F(0)+F\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+F\left(\frac{n-1}{n}\right)=0.$$

9. 设 f 在 $x=0$ 连续，且对任何 $x,y\in\mathbf{R}$ 有

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

证明：(1) f 在 $\mathbf{R}$ 上连续；(2) $f(x)=f(1)x$.

提示：(1)易见 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x-x_0)+f(x_0)]=f(x_0)$；

(2) 对整数 $p,q\ (\neq 0)$ 有 $f(p)=pf(1),f\left(\dfrac{1}{q}\right)=\dfrac{1}{q}f(1)\Rightarrow$ 对有理数 r 有 $f(r)=rf(1)\Rightarrow$ 结论.

10. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 f 在 0、1 两点连续，且对任何 $x\in\mathbf{R}$ 有 $f(x^2)=f(x)$. 证明 f 为常量函数.

提示：易见 f 偶；对任何 $x\in\mathbf{R}^+$，$f(x)=f(x^{\frac{1}{2^n}})\to f(1)\ (n\to\infty)$，从而得：$x\neq 0$ 时 $f(x)=f(1)$；$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(1)$.

第五章 导数和微分

§1 导数的概念

一 导数的定义

导数的思想最初是由法国数学家费马(Fermat)为研究极值问题而引入的，但与导数概念直接相联系的是以下两个问题：已知运动规律求速度和已知曲线求它的切线.这是由英国数学家牛顿(Newton)和德国数学家莱布尼茨(Leibniz)分别在研究力学和几何学过程中建立起来的.

下面我们以这两个问题为背景引入导数的概念.

1. 瞬时速度 设一质点作直线运动，其运动规律为 $s=s(t)$. 若 t_0 为某一确定的时刻，t 为邻近于 t_0 的时刻，则

$$\bar{v}=\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

是质点在时间段 $[t_0,t]$(或 $[t,t_0]$)上的平均速度. 若 $t\to t_0$ 时平均速度 $\bar{v}$ 的极限存在，则称极限

$$v=\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} \tag{1}$$

为质点在时刻 t_0 的瞬时速度. 以后我们将会发现，在计算诸如物质比热、电流强度、线密度等问题中，尽管它们的物理背景各不相同，但最终都归结于讨论形如(1)式的极限.

2. 切线的斜率 如图 5－1 所示，曲线 $y=f(x)$ 在其上一点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线 PT 是割线 PQ 当动点 Q 沿此曲线无限接近于点 P 时的极限位置. 由于割线 PQ 的斜率为

$$\bar{k}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

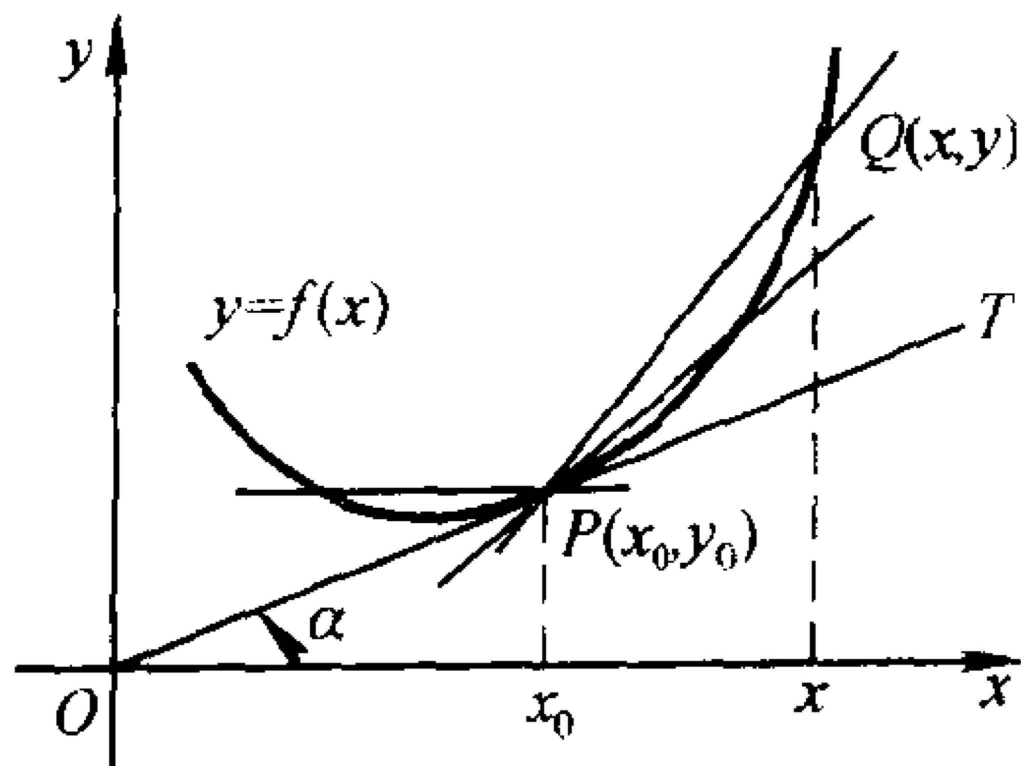


图 5－1

因此当 $x\to x_0$ 时如果 $\bar{k}$ 的极限存在，则极限

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2}$$

即为切线 PT 的斜率.

上述两个问题中,前一个是运动学的问题,后一个是几何学的问题,但是它们都可以归结为形如(1)、(2)这种类型的极限.

下面我们给出导数的定义.

定义 1 设函数 $y = f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义,若极限

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{3}$$

存在,则称函数 f **在点** x_0 **处可导**,并称该极限为函数 f **在点** x_0 **处的导数**,记作 $f'(x_0)$.

令 $x = x_0 + \Delta x, \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$,则(3)式可改写为

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0). \tag{4}$$

所以,导数是函数增量 Δy 与自变量增量 Δx 之比$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限.这个增量比称为函数关于自变量的平均变化率(又称**差商**),而导数 $f'(x_0)$则为 f 在 x_0 处关于 x 的**变化率**.

若(3)(或(4))式极限不存在,则称 f **在点** x_0 **处不可导**.

例 1 求函数 $f(x) = x^2$ 在点 $x = 1$ 处的导数,并求曲线在点(1,1)处的切线方程.

解 由定义求得

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2 + \Delta x) = 2$$

由此知道抛物线 $y = x^2$ 在点(1,1)处的切线斜率为

$$k = f'(1) = 2,$$

所以切线方程为

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad 即 \quad y = 2x - 1.$$ □

例 2 证明函数 $f(x) = |x|$在点 $x_0 = 0$ 处不可导.

证 因为

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

当 $x \to 0$ 时极限不存在,所以 f 在点 $x = 0$ 处不可导. □

例 3 显然常量函数 $f(x) = C$ 在任何一点 x 的导数都等于零,即

$$f'(x) = 0.$$

下面我们介绍有限增量公式.

设 $f(x)$在点 x_0 可导,那么

$$\varepsilon = f'(x_0) - \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

是当 $\Delta x \to 0$ 时的无穷小量,于是 $\varepsilon \cdot \Delta x = o(\Delta x)$,即

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x). \tag{5}$$

我们称(5)式为 $f(x)$在点 x_0 的**有限增量公式**.注意,此公式对 $\Delta x = 0$ 仍旧成立.

由公式(5)立即推得如下定理.

定理 5.1 若函数 f 在点 x_0 可导,则 f 在点 x_0 连续.

注 可导仅是函数在该点连续的充分条件,而不是必要条件.如例 2 中的函数 $f(x) = |x|$ 在点 $x = 0$ 处连续,但不可导.

例 4 证明函数 $f(x) = x^2 D(x)$ 仅在点 $x_0 = 0$ 处可导,其中 $D(x)$为狄利克雷函数.

证 当 $x_0 \neq 0$ 时,由归结原理可得 $f(x)$在 $x = x_0$ 处不连续,所以由定理 5.1,$f(x)$在 $x = x_0$ 处不可导.

当 $x_0 = 0$ 时,由于 $D(x)$为有界函数,因此得到

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} xD(x) = 0. \qquad \square$$

若只讨论函数在点 x_0 的右邻域(左邻域)上的变化率,我们需引进单侧导数的概念.

定义 2 设函数 $y = f(x)$在点 x_0 的某右邻域$(x_0, x_0 + \delta)$上有定义,若右极限

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (0 < \Delta x < \delta)$$

存在,则称该极限值为 f 在点 x_0 的**右导数**,记作 $f'_+(x_0)$.

类似地,我们可定义**左导数**

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

右导数和左导数统称为**单侧导数**.

如同左、右极限与极限之间的关系,我们有

定理 5.2 若函数 $y = f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义,则 $f'(x_0)$存在的充要条件是 $f'_+(x_0)$与 $f'_-(x_0)$都存在,且

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

例 5 设 $f(x)=\begin{cases}1-\cos x, & x\geqslant 0,\\ x, & x<0.\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右导数与导数.

解 由于

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}, & \Delta x>0,\\ 1, & \Delta x<0,\end{cases}$$

因此

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}1=1.$$

因为 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$，所以 f 在 $x=0$ 处不可导.

二 导函数

若函数在区间 I 上每一点都可导(对区间端点，仅考虑相应的单侧导数)，则称 f 为 I 上的**可导函数**. 此时对每一个 $x\in I$，都有 f 的一个导数 $f'(x)$(或单侧导数)与之对应. 这样就定义了一个在 I 上的函数，称为 f 在 I 上的**导函数**，也简称为**导数**. 记作 f'，y' 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, x\in I.$$

在物理学中导数 y' 也常用牛顿记号 $\dot{y}$ 表示，而记号 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是莱布尼茨首先引用的. 目前我们把 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 看作为一个整体，也可把它理解为 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 施加于 y 的求导运算，待到学过“微分”之后，我们将说明这个记号实际上是一个“商”. 相应于上述各种表示导数的形式，$f'(x_0)$ 有时也写作

$$y'\big|_{x=x_0} \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}.$$

例 6 证明

(i) $(x^n)'=nx^{n-1}$，n 为正整数；

(ii) $(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$；

(iii) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x}\log_a \mathrm{e}$ $(a>0, a\neq 1, x>0)$，特别 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

证 (i) 对于 $y=x^n$，由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$$

$$= C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2}\Delta x + \cdots + C_n^n \Delta x^{n-1},$$

因此

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} \cdot \Delta x + \cdots + C_n^n \Delta x^{n-1})$$
$$= C_n^1 x^{n-1} = n x^{n-1}.$$

(ii) 下面证第一个等式,类似地可证第二个等式.由于

$$\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$
$$= \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

以及 $\cos x$ 是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数,因此得到

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$
$$= \cos x.$$

(iii) 由于

$$\frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}},$$

所以

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\log_a e. \tag{6}$$

若 $a = e$,且以 e 为底的自然对数常写作 $\ln x$,则由 $\ln e = 1$ 及(6)式有

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$ □

三 导数的几何意义

我们已经知道 $f(x)$在点 $x = x_0$ 的切线斜率 k,正是割线斜率在 $x \to x_0$ 时的极限,即

$$k = \lim_{x \to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

由导数的定义,$k = f'(x)$,所以曲线 $y = f(x)$在点(x_0, y_0)的**切线方程**是

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{7}$$

这就是说:函数 f 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线斜率. 若 α 表示这条切线与 x 轴正向的夹角,则 $f'(x_0)=\tan\alpha$. 从而 $f'(x_0)>0$ 意味着切线与 x 轴正向的夹角为锐角;$f'(x_0)<0$ 意味着切线与 x 轴正向的夹角为钝角;$f'(x_0)=0$ 表示切线与 x 轴平行(图 5-2).

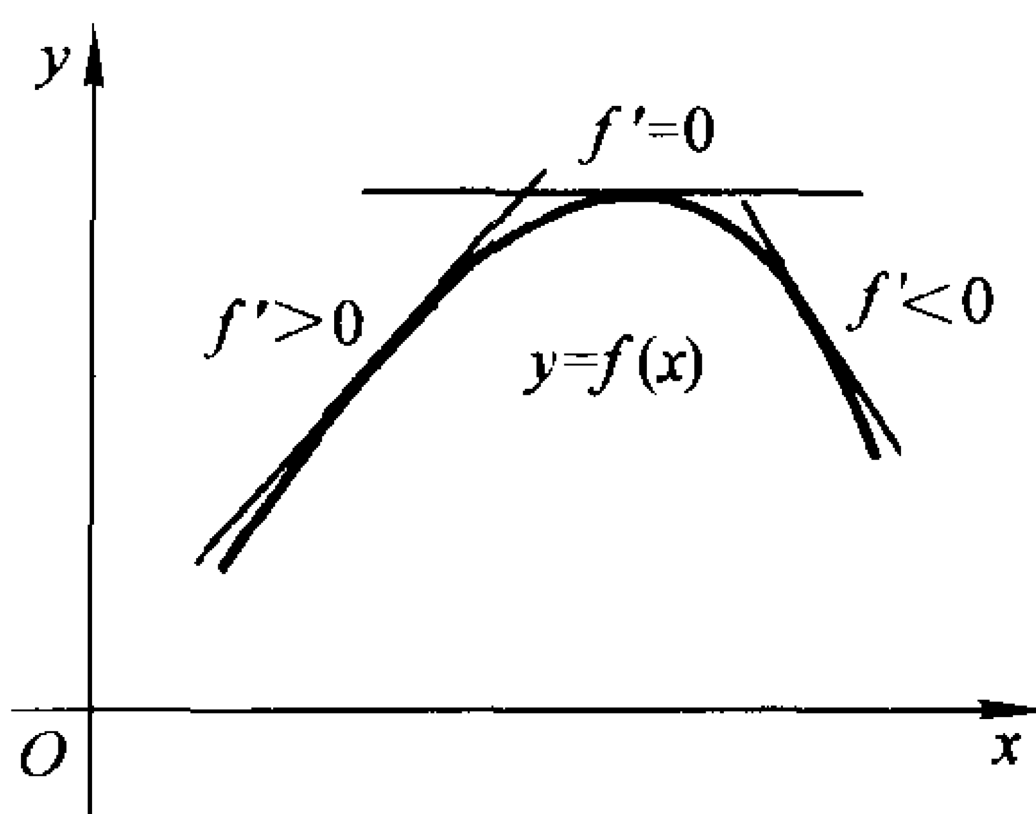


图 5-2

例 7 求曲线 $y=x^3$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程与法线方程.

解 由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2,$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2) = 3x_0^2.$$

所以根据(7)式,曲线 $y=x^3$ 在点 P 的切线方程为

$$y - y_0 = 3x_0^2(x - x_0).$$

由解析几何知道,若切线斜率为 k,则法线斜率为 $-\frac{1}{k}$. 从而过点 P 的法线方程为

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{8}$$

因此曲线 $y=x^3$ 过点 $P(x_0\neq 0)$ 的法线方程为

$$y - x_0^3 = -\frac{1}{3x_0^2}(x - x_0).$$

若 $x_0=0$,则法线方程为 $x=0$. □

顺便说一下,对于曲线 $y=x^3$,可把它在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线斜率 $f'(x_0)$ 改写成如下形式:

$$f'(x_0) = 3x_0^2 = \frac{x_0^3}{\left(\frac{x_0}{3}\right)} = \frac{y_0}{\left(\frac{x_0}{3}\right)}.$$

因此,为了作过点 P 的切线,如图 5-3 所示,只须对 x 轴上从原点 O 到点 x 的线段三等分,取靠近 x_0 的分点 Q,那么通过点 PQ 的直线就是所求的切线.

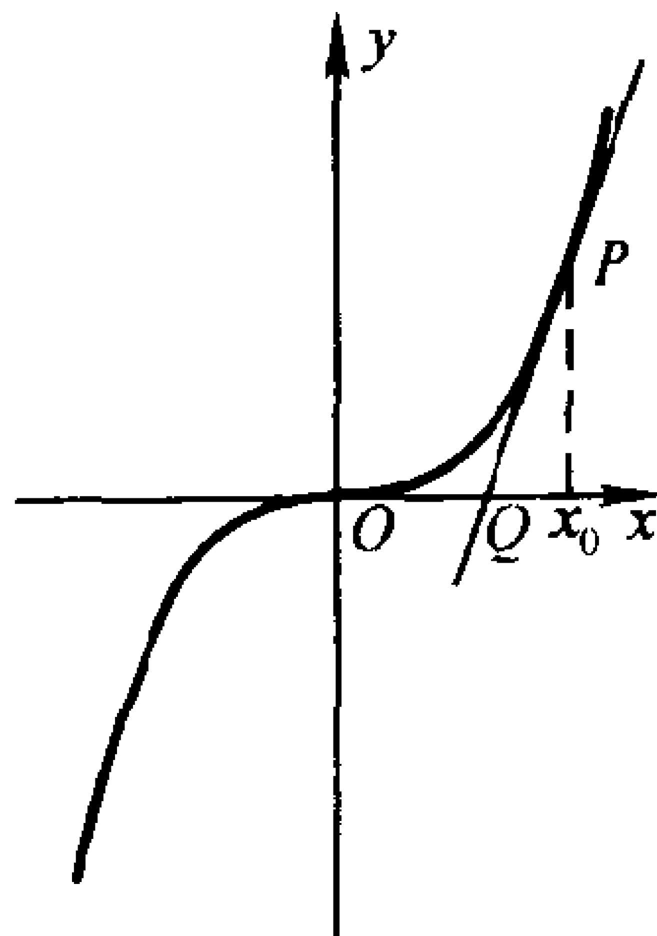


图 5-3

定义 3 若函数 f 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内对一切 $x\in U(x_0)$ 有

$$f(x_0) \geqslant f(x) \qquad (f(x_0) \leqslant f(x)), \tag{9}$$

则称函数 f 在点 x_0 取得**极大(小)值**,称点 x_0 为**极大(小)值点**.极大值、极小值统称为**极值**,极大值点、极小值点统称为**极值点**.

设函数 f 如图 5-4 所示,它在点 $x=x_1$, x_3 处取极大值,在点 $x=x_2$ 处取极小值.

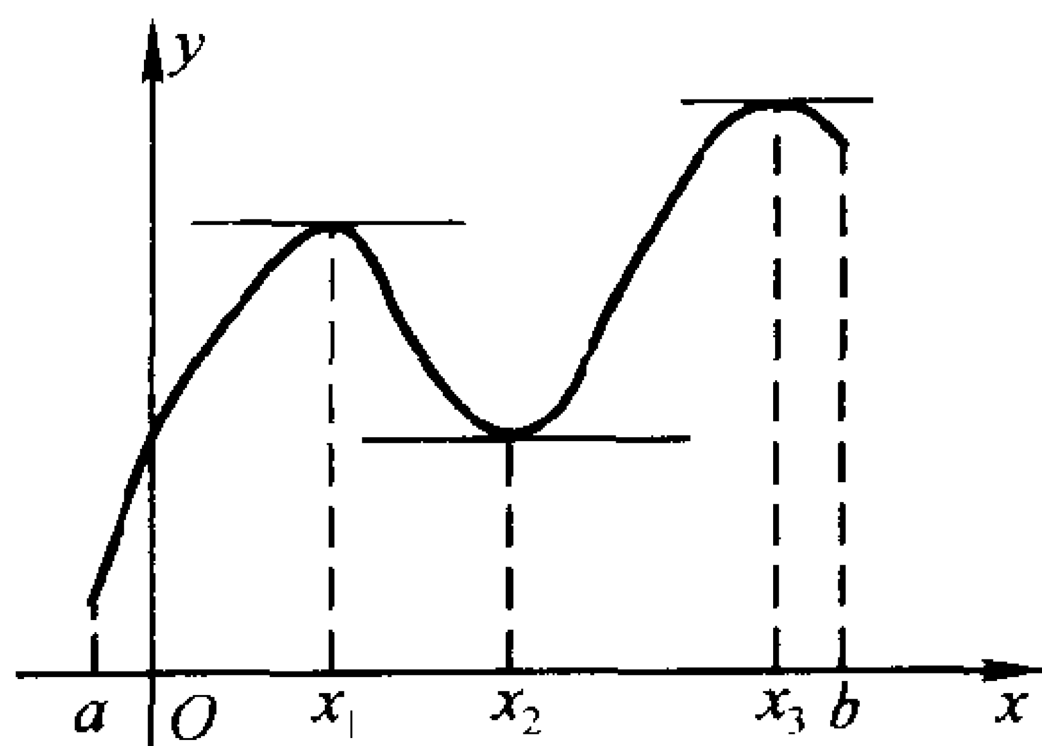


图 5-4

例 8 证明:若 $f'_+(x_0)>0$,则存在 $\delta>0$,对任何 $x\in(x_0,x_0+\delta)$,有

$$f(x_0) < f(x). \tag{10}$$

证 因为

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0,$$

所以由保号性可知,存在正数 δ,对一切 $x\in(x_0,x_0+\delta)$有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0,$$

从而不难推得,当 $0<x-x_0<\delta$ 时,(10)式成立. □

用类似的方法可讨论 $f'_+(x_0)<0$, $f'_-(x_0)>0$ 和 $f'_-(x_0)<0$ 的情况.例如,若 $f'_-(x_0)>0$,则存在 $\delta>0$,对任何 $x\in(x_0-\delta,x_0)$,有 $f(x_0)>f(x)$.

注 例 8 告诉我们:若 $f'(x_0)$存在且不为零,则 x_0 不是 $f(x)$的极值点.

这样我们就得到了著名的费马定理.

定理 5.3(费马定理) 设函数 f 在点 x_0 的某邻域内有定义,且在点 x_0 可导.若点 x_0 为 f 的极值点,则必有

$$f'(x_0) = 0.$$

费马定理的几何意义非常明确:若函数 $f(x)$在极值点 $x=x_0$ 可导,那么在该点的切线平行于 x 轴.

我们称满足方程 $f'(x)=0$ 的点为**稳定点**.

对于函数 $f(x)=x^3$,点 $x=0$ 是稳定点,但却不是极值点.

定理 5.4(达布 Darboux) 若函数 f 在$[a,b]$上可导,且 $f'_+(a)\neq f'_-(b)$, k 为介于$f'_+(a)$, $f'_-(b)$之间任一实数,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi) = k.$$

证 设 $F(x)=f(x)-kx$,则 $F(x)$在$[a,b]$上可导,且

$$F'_+(a)\cdot F'_-(b) = (f'_+(a)-k)(f'_-(b)-k) < 0.$$

不妨设 $F'_+(a)>0$, $F'_-(b)<0$.由例 8,分别存在 $x_1\in U^0_+(a)$, $x_2\in U^0_-(b)$,且 $x_1<x_2$,使得

$$F(x_1) > F(a), \quad F(x_2) > F(b). \tag{11}$$

因为 F 在$[a,b]$上可导,所以连续.根据最大最小值定理(定理 4.6),存在一点 $\xi\in[a,b]$,使 F 在点 ξ 取得最大值.由(11)式,可知 $\xi\neq a,b$.这就说明 ξ 是 F 的极大值点.由费马定理得 $F'(\xi)=0$,即

$$f'(\xi) = k, \quad \xi \in (a,b).$$

□

有时称上述定理为**导函数的介值定理**.

习　　题

1. 已知直线运动方程为

$$s = 10t + 5t^2,$$

分别令 $\Delta t=1,0.1,0.01$,求从 $t=4$ 至 $t=4+\Delta t$ 这一段时间内运动的平均速度及 $t=4$ 时的瞬时速度.

2. 等速旋转的角速度等于旋转角与对应时间的比,试由此给出变速旋转的角速度的定义.

3. 设 $f(x_0)=0,f'(x_0)=4$,试求极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}.$$

4. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 3,\\ ax+b, & x<3,\end{cases}$ 试确定 a,b 的值,使 f 在 $x=3$ 处可导.

5. 试确定曲线 $y=\ln x$ 上哪些点的切线平行于下列直线:

(1) $y=x-1$;　　(2) $y=2x-3$.

6. 求下列曲线在指定点 P 的切线方程与法线方程:

(1) $y=x^2/4,P(2,1)$;　　(2) $y=\cos x,P(0,1)$.

7. 求下列函数的导函数:

(1) $f(x)=|x|^3$;　　(2) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\geqslant 0,\\ 1, & x<0.\end{cases}$

8. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^m\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}\ (m\text{ 为正整数}),$$

试问:(1) m 等于何值时,f 在 $x=0$ 连续;

(2) m 等于何值时,f 在 $x=0$ 可导;

(3) m 等于何值时,f' 在 $x=0$ 连续.

9. 求下列函数的稳定点:

(1) $f(x)=\sin x-\cos x$;　　(2) $f(x)=x-\ln x$

10. 设函数 f 在点 x_0 存在左右导数,试证 f 在点 x_0 连续.

11. 设 $g(0)=g'(0)=0$,

$$f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

求 $f'(0)$.

12. 设 f 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数,且对任何 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,都有

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2).$$

若 $f'(0)=1$,证明对任何 $x\in\mathbf{R}$,都有

$$f'(x)=f(x).$$

13. 证明:若 $f'(x_0)$存在,则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=2f'(x_0).$$

14. 证明:若函数 f 在$[a,b]$上连续,且 $f(a)=f(b)=K$,$f'_+(a)f'_-(b)>0$,则在(a,b)内至少有一点 ξ,使 $f(\xi)=K$.

15. 设有一吊桥,其铁链成抛物线型,而端系于相距 100 米高度相同的支柱上,铁链之最低点在悬点下 10 米处,求铁链与支柱所成之角.

16. 在曲线 $y=x^3$ 上取一点 P,过 P 的切线与该曲线交于 Q,证明:曲线在 Q 处的切线斜率正好是在 P 处切线斜率的四倍.

§2 求导法则

上一节我们从定义出发求出了一些简单函数的导数,对于一般函数的导数,虽然也可以用定义来求,但通常极为繁琐.本节将引入一些求导法则,利用这些法则,能较简便地求出初等函数的导数.

一 导数的四则运算

定理 5.5 若函数 $u(x)$和 $v(x)$在点 x_0 可导,则函数 $f(x)=u(x)\pm v(x)$在点 x_0 也可导,且

$$f'(x_0)=u'(x_0)\pm v'(x_0) \tag{1}$$

证

$$\begin{aligned} f'(x_0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)\pm v(x_0+\Delta x)]-[u(x_0)\pm v(x_0)]}{\Delta x} \\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x} \\ &=u'(x_0)\pm v'(x_0). \end{aligned}$$

□

定理 5.6 若函数 $u(x)$和 $v(x)$在点 x_0 可导,则函数 $f(x)=u(x)v(x)$在点 x_0 也可导,且

$$f'(x_0)=u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0). \tag{2}$$

证 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x_0+\Delta x)v(x_0+\Delta x)-u(x_0)v(x_0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x_0+\Delta x)v(x_0+\Delta x)-u(x_0)v(x_0+\Delta x)+u(x_0)v(x_0+\Delta x)-u(x_0)v(x_0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}v(x_0+\Delta x)+\lim\limits_{\Delta x\to 0}u(x_0)\dfrac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x}$

$=u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0).$ □

利用数学归纳法可以把这个法则推广到任意有限个函数乘积的情形.例如:

$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'.$$

推论 若函数 $v(x)$在点 x_0 可导,c 为常数,则

$$(cv(x))'_{x=x_0}=cv'(x_0). \tag{3}$$

例 1 设 $f(x)=x^3+5x^2-9x+\pi$,求 $f'(x)$.

解 由公式(1)、(3),

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x^3)'+5(x^2)'-9(x)'+(\pi)'\\&=3x^2+10x-9.\end{aligned}$$ □

一般地说:多项式函数

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的导数为

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}.$$

它比 f 低一个幂次.

例 2 设 $y=\cos x\ln x$,求$y'|_{x=\pi}$.

解 由公式(2),

$$y'=(\cos x)'\ln x+\cos x(\ln x)'=-\sin x\ln x+\frac{1}{x}\cos x.$$

所以

$$y'|_{x=\pi}=-\frac{1}{\pi}.$$ □

定理 5.7 若函数 $u(x)$和 $v(x)$在点 x_0 都可导,且 $v(x_0)\neq 0$,则 $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$在点 x_0 也可导,且

$$f'(x_0)=\frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}. \tag{4}$$

证 设 $f(x)=u(x)g(x)$,其中 $g(x)=\dfrac{1}{v(x)}$,现证 $g(x)$在点 x_0 可导.

由于

$$\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=\frac{\dfrac{1}{v(x_0+\Delta x)}-\dfrac{1}{v(x_0)}}{\Delta x}$$

$$= -\frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{v(x_0+\Delta x)v(x_0)}.$$

而 $v(x)$在点 x_0 可导,从而在点 x_0 连续,且 $v(x_0)\neq 0$,因此

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)'_{x=x_0} = g'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x} = -\frac{v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}. \quad (5)$$

应用公式(2)、(5)证得

$$f'(x_0) = \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'_{x=x_0} = u'(x_0)\frac{1}{v(x_0)} + u(x_0)\left(-\frac{v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}\right)$$

$$= \frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}.$$ □

例 3 证明$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$,其中 n 为正整数.

证 由公式(5)可得

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$ □

例 4 证明:$(\tan x)' = \sec^2 x$;$(\cot x)' = -\csc^2 x$.

证 由 $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$及其公式(4)可推得

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

同理可证$(\cot x)' = -\csc^2 x$. □

例 5 证明:$(\sec x)' = \sec x\tan x$;$(\csc x)' = -\csc x\cot x$.

证 我们仍只证第一式,第二式请读者自证.由 $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$及公式(5)有

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x\tan x.$$ □

二 反函数的导数

我们已经求得对数函数与三角函数的导数,为求得它们的反函数的导数,下面先证明反函数求导公式.

定理 5.8 设 $y=f(x)$为 $x=\varphi(y)$的反函数,若 $\varphi(y)$在点 y_0 的某邻域内连续,严格单调且 $\varphi'(y_0)\neq 0$,则 $f(x)$在点 $x_0(x_0=\varphi(y_0))$可导,且

$$f'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(y_0)}. \quad (6)$$

证 设 $\Delta x = \varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)$,$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.因为 φ 在 y_0

的某邻域内连续且严格单调，故 $f=\varphi^{-1}$ 在 x_0 的某邻域内连续且严格单调. 从而当且仅当 $\Delta y=0$ 时 $\Delta x=0$，并且当且仅当 $\Delta y\to 0$ 时 $\Delta x\to 0$. 由 $\varphi'(y_0)\neq 0$，可得

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y_0)}.\qquad\Box$$

例 6　证明：

(i)　$(a^x)'=a^x\ln a$（其中 $a>0, a\neq 1$），

特别地 $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$.

(ii)　$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(iii)　$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

证　(i)　由于 $y=a^x, x\in\mathbf{R}$ 为对数函数 $x=\log_a y, y\in(0,+\infty)$ 的反函数，故由公式(6)得到

$$(a^x)'=\frac{1}{(\log_a y)'}=\frac{y}{\log_a \mathrm{e}}=a^x\ln a.$$

(ii)　由于 $y=\arcsin x, x\in(-1,1)$ 是 $x=\sin y, y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数，故由公式(6)得到

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x\in(-1,1).$$

同理可证：$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x\in(-1,1)$.

(iii)　由于 $y=\arctan x, x\in\mathbf{R}$ 是 $x=\tan y, y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数，因此

$$(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}, x\in(-\infty,+\infty).$$

同理可证：$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}, x\in(-\infty,+\infty)$.　$\Box$

三　复合函数的导数

为了证明复合函数的求导公式，我们先证明一个引理.

引理　$f(x)$ 在点 x_0 可导的充要条件是在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内，存在一个在点 x_0 的连续函数 $H(x)$，使得

$$f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0),$$

从而 $f'(x_0)=H(x_0)$.

证 设 $f(x)$在点 x_0 可导,令

$$H(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\in U^0(x_0),\\ f'(x_0) & x=x_0,\end{cases}$$

则因

$$\lim_{x\to x_0}H(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=H(x_0),$$

所以 $H(x)$在点 x_0 连续,且 $f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0), x\in U(x_0)$.

反之,设存在 $H(x), x\in U(x_0)$,它在点 x_0 连续,且

$$f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0), x\in U(x_0).$$

因存在极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}H(x)=H(x_0),$$

所以 $f(x)$点 x_0 可导,且 $f'(x_0)=H(x_0)$. □

注 引理说明了点 x_0 是函数 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 可去间断点的充要条件是 $f(x)$在点 x_0 可导.这个结论可推广到向量函数的导数(第二十三章).

定理 5.9 设 $u=\varphi(x)$在点 x_0 可导,$y=f(u)$在点 $u_0=\varphi(x_0)$可导,则复合函数 $f\circ\varphi$ 在点x_0 可导,且

$$(f\circ\varphi)'(x_0)=f'(u_0)\varphi'(x_0)=f(\varphi(x_0))\varphi'(x_0). \tag{7}$$

证 由 $f(u)$在点 u_0 可导,由引理必要性部分,存在一个在点 u_0 连续的函数 $F(u)$,使得 $f'(u_0)=F(u_0)$,且

$$f(u)-f(u_0)=F(u)(u-u_0), u\in U(u_0).$$

又由 $u=\varphi(x)$在点 x_0 可导,同理存在一个在点 x_0 连续的函数 $\Phi(x)$,使得 $\varphi'(x_0)=\Phi(x_0)$,且

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)=\Phi(x)(x-x_0), x\in U(x_0).$$

于是就有

$$\begin{aligned}f(\varphi(x))-f(\varphi(x_0))&=F(\varphi(x))(\varphi(x)-\varphi(x_0))\\&=F(\varphi(x))\Phi(x)(x-x_0).\end{aligned}$$

因为 φ,Φ 在点x_0 连续,F 在点$u_0=\varphi(x_0)$连续,因此 $H(x)=F(\varphi(x))\Phi(x)$ 在点 x_0 连续.由引理充分性部分证得 $f\circ\varphi$ 在点x_0 可导,且

$$(f\circ\varphi)'(x_0)=H(x_0)=F(\varphi(x_0))\Phi(x_0)=f'(u_0)\varphi'(x_0). \quad □$$

注 1 复合函数的求导公式(7)亦称为**链式法则**.函数 $y=f(u), u=\varphi(x)$ 的复合函数在点 x 的求导公式一般也写作

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{8}$$

对于由多个函数复合而得的复合函数，其导数公式可反复应用(8)式而得.

注 2 $f'(\varphi(x))=f'(u)\big|_{u=\varphi(x)}$与$(f(\varphi(x)))'=f'(\varphi(x))\varphi'(x)$的含义不可混淆.

例 7 设 $y=\sin x^2$，求 y'.

解 将 $\sin x^2$ 看作 $y=\sin u$ 与 $u=x^2$ 的复合函数，故

$$(\sin x^2)'=\cos u\cdot 2x=2x\cos x^2.$$ □

注 必须指出：$(\sin x^2)'\neq\cos x^2$.

例 8 设 α 为实数，求幂函数 $y=x^\alpha(x>0)$的导数.

解 因为 $y=x^\alpha=\mathrm{e}^{\alpha\ln x}$可看作$y=\mathrm{e}^u$ 与 $u=\alpha\ln x$ 的复合函数，故

$$(x^\alpha)'=(\mathrm{e}^{\alpha\ln x})'=\mathrm{e}^{\alpha\ln x}\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$ □

例 9 设 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$，求 $f'(0)$，$f'(1)$.

解 由于

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

因此 $f'(0)=0$，$f'(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. □

例 10 求下列函数的导函数；

(i) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$； (ii) $f(x)=\tan^2\dfrac{1}{x}$.

解 (i) $$(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})'$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(ii) $$\left(\tan^2\frac{1}{x}\right)'=2\tan\frac{1}{x}\left(\tan\frac{1}{x}\right)'=2\tan\frac{1}{x}\sec^2\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$=-\frac{2}{x^2}\tan\frac{1}{x}\sec^2\frac{1}{x}.$$ □

例 11(对数求导法) 设 $y=\dfrac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}$ $(x>4)$，求 y'.

解 先对函数式取对数，得

$$\ln y=\ln\frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=2\ln(x+5)+\frac{1}{3}\ln(x-4)-5\ln(x+2)-\frac{1}{2}\ln(x+4).$$

再对上式两边分别求导数,得

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x+5}+\frac{1}{3(x-4)}-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{2(x+4)}.$$

整理后得到

$$y'=\frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{2}{x+5}+\frac{1}{3(x-4)}-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{2(x+4)}\right).\qquad\square$$

注 虽然我们可用导数的乘积和商的公式来求例 11 中的导数,但用对数求导法显得更为清晰、简便.

例 12 设 $y=u(x)^{v(x)}$,其中 $u(x)>0$,且 $u(x)$和 $v(x)$均可导,试求此幂指函数的导数.

解 $y'=(u(x)^{v(x)})'=(\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)})'=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}(v(x)\ln u(x))'$

$$=u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

$$=u(x)^{v(x)}v'(x)\ln u(x)+u(x)^{v(x)-1}u'(x)v(x).\qquad\square$$

四 基本求导法则与公式

现在把前面得到的求导法则与基本初等函数的导数公式列出如下:

基本求导法则

1. $(u\pm v)'=u'\pm v'$.
2. $(uv)'=u'v+uv'$,$(cu)'=cu'$ (c 为常数).
3. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$,$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$.
4. 反函数导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$.
5. 复合函数导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

基本初等函数导数公式

1. $(c)'=0$ (c 为常数).
2. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ (α 为任意实数).
3. $(\sin x)'=\cos x$,$(\cos x)'=-\sin x$.
4. $(\tan x)'=\sec^2 x$,$(\cot x)'=-\csc^2 x$,
   $(\sec x)'=\sec x\tan x$,$(\csc x)'=-\csc x\cot x$.
5. $(a^x)'=a^x\ln a$,$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$.
6. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$,$(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

习 题

1. 求下列函数在指定点的导数：

(1) 设 $f(x)=3x^4+2x^3+5$，求 $f'(0), f'(1)$；

(2) 设 $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$，求 $f'(0), f'(\pi)$；

(3) 设 $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}$，求 $f'(0), f'(1), f'(4)$.

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=3x^2+2$；

(2) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x+x^2}$；

(3) $y=x^n+nx$；

(4) $y=\dfrac{x}{m}+\dfrac{m}{x}+2\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$；

(5) $y=x^3\log_3 x$；

(6) $y=e^x\cos x$；

(7) $y=(x^2+1)(3x-1)(1-x^3)$；

(8) $y=\dfrac{\tan x}{x}$；

(9) $y=\dfrac{x}{1-\cos x}$；

(10) $y=\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$；

(11) $y=(\sqrt{x}+1)\arctan x$；

(12) $y=\dfrac{1+x^2}{\sin x+\cos x}$.

3. 求下列函数的导函数：

(1) $y=x\sqrt{1-x^2}$；

(2) $y=(x^2-1)^3$；

(3) $y=\left(\dfrac{1+x^2}{1-x}\right)^3$；

(4) $y=\ln(\ln x)$；

(5) $y=\ln(\sin x)$；

(6) $y=\lg(x^2+x+1)$；

(7) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

(8) $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$；

(9) $y=(\sin x+\cos x)^3$；

(10) $y=\cos^3 4x$；

(11) $y=\sin\sqrt{1+x^2}$；

(12) $y=(\sin x^2)^3$；

(13) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$；

(14) $y=(\arctan x^3)^2$；

(15) $y=\operatorname{arccot}\dfrac{1+x}{1-x}$；

(16) $y=\arcsin(\sin^2 x)$；

(17) $y=e^{x+1}$；

(18) $y=2^{\sin x}$；

(19) $y=x^{\sin x}$，

(20) $y=x^{x^x}$；

(21) $y=e^{-x}\sin 2x$；

(22) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$；

(23) $y=\sin(\sin(\sin x))$;

(24) $y=\sin\left(\dfrac{x}{\sin\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)}\right)$;

(25) $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}$;

(26) $y=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\dfrac{a\sin x+b}{a+b\sin x}$.

4. 对下列各函数计算 $f'(x), f'(x+1), f'(x-1)$.

(1) $f(x)=x^3$;

(2) $f(x+1)=x^3$;

(3) $f(x-1)=x^3$.

5. 已知 g 为可导函数,a 为实数,试求下列函数 f 的导数:

(1) $f(x)=g(x+g(a))$;

(2) $f(x)=g(x+g(x))$;

(3) $f(x)=g(xg(a))$;

(4) $f(x)=g(xg(x))$.

6. 设 f 为可导函数,证明:若 $x=1$ 时有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x^2)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^2(x).$$

则必有 $f'(1)=0$ 或 $f(1)=1$.

7. 定义**双曲函数**如下:

双曲正弦函数 $\operatorname{sh} x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$;双曲余弦函数 $\operatorname{ch} x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$;

双曲正切函数 $\operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$;双曲余切函数 $\coth x=\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

证明:

(1) $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$;

(2) $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$;

(3) $(\operatorname{th} x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

(4) $(\coth x)'=\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

8. 求下列函数的导数:

(1) $y=\operatorname{sh}^3 x$;

(2) $y=\operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)$;

(3) $y=\ln(\operatorname{ch} x)$;

(4) $y=\arctan(\operatorname{th} x)$.

9. 以 $\operatorname{sh}^{-1}x, \operatorname{ch}^{-1}x, \operatorname{th}^{-1}x, \coth^{-1}x$ 分别表示各双曲函数的反函数. 试求下列函数的导数:

(1) $y=\operatorname{sh}^{-1}x$;

(2) $y=\operatorname{ch}^{-1}x$;

(3) $y=\operatorname{th}^{-1}x$;

(4) $y=\coth^{-1}x$

(5) $y=\operatorname{th}^{-1}x-\coth^{-1}\dfrac{1}{x}$;

(6) $y=\operatorname{sh}^{-1}(\tan x)$.

§3 参变量函数的导数

平面曲线 C 一般的表达形式是参变量方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta) \tag{1}$$

表示. 设 $t=t_0$ 对应曲线 C 上的点 P. 如果在点 P 有切线,那么切线的斜率可由割线的斜率取极限而得,为此设 φ,ψ 在点 t_0 可导,且 $x'(t_0)\neq 0$. 若 $t_0+\Delta t$ 对应 C 上的点 Q(图 5-5),割线 PQ 的斜率

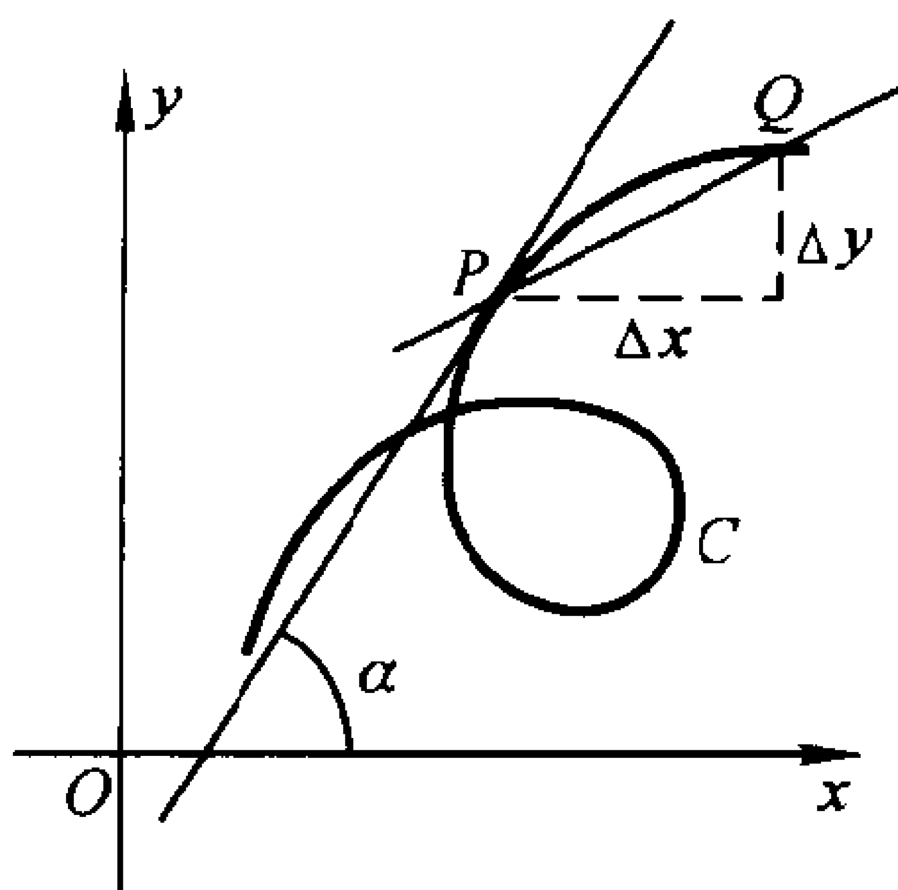


图 5-5

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)}{\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)},$$

于是曲线 C 在点 P 的切线斜率是

$$\tan\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)}{\Delta t}}=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

其中 α 为切线与 x 轴正向的夹角. 若 $\varphi'(t_0)=0$,但 $\psi'(t_0)\neq 0$,同样可得

$$\cot\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}.$$

若 φ,ψ 在 $[\alpha,\beta]$ 上都存在连续的导函数,且 $\varphi'^2+\psi'^2\neq 0$,这时称 C 为**光滑曲线**. 其特点是在曲线 C 上不仅每一点都有切线,且切线与 x 轴正向的夹角 $\alpha(t)$ 是 t 的连续函数.

若 $x=\varphi(t)$ 具有反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$,那么它与 $y=\psi(t)$ 构成一个复合函数

$$y=\psi\circ\varphi^{-1}(x).$$

这时只要函数 φ,ψ 可导,$\varphi'(t)\neq 0$(因而当 $\Delta x\to 0$ 时,也有 $\Delta t\to 0$ 和 $\Delta y\to 0$),就可由复合函数和反函数的求导法则得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{2}$$

例 1 试求由上半椭圆的参量方程

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t,\end{cases}\quad 0<t<\pi$$

所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数.

解 按公式(2)求得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{(b\sin t)'}{a\cos t}=-\frac{b}{a}\cot t.$$ □

若曲线 C 由极坐标 $\rho=\rho(\theta)$ 表示,则可转化为以极角 θ 为参量的参量方程:

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta=\rho(\theta)\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta=\rho(\theta)\sin\theta.\end{cases}$$

这时在相应的条件下可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(\rho(\theta)\sin\theta)'}{(\rho(\theta)\cos\theta)'}=\frac{\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta}{\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta}=\frac{\rho'(\theta)\tan\theta+\rho(\theta)}{\rho'(\theta)-\rho(\theta)\tan\theta}.\tag{3}$$

(3)式表示在曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 上的点 $M(\rho,\theta)$ 处的切线 MT 与极轴 Ox 轴的夹角的正切(图 5-6).

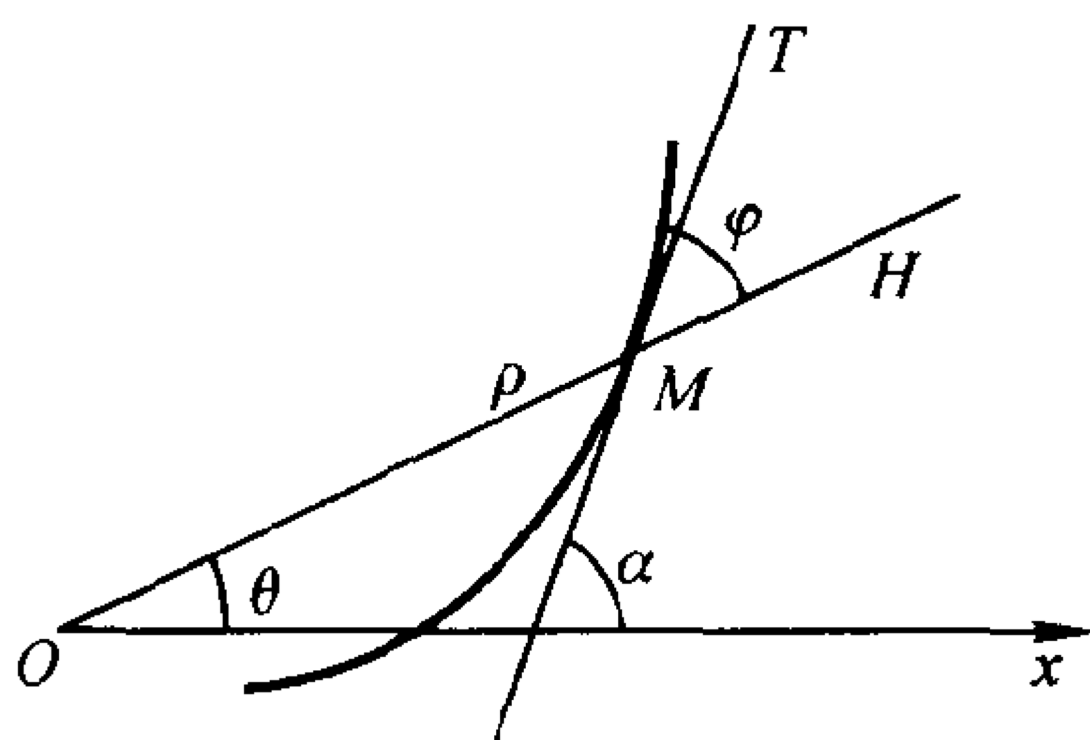


图 5-6

过点 M 的射线 OH 与切线 MT 的夹角 φ 的正切则是

$$\tan\varphi=\tan(\alpha-\theta)=\frac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta}.\tag{4}$$

将(3)式代入(4)式则得向径与切线夹角的正切

$$\tan\varphi=\frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}.\tag{5}$$

例 2 证明:对数螺线 $\rho=\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}}$(图 5-7)上所有点的切线与向径的夹角 φ 为常量.

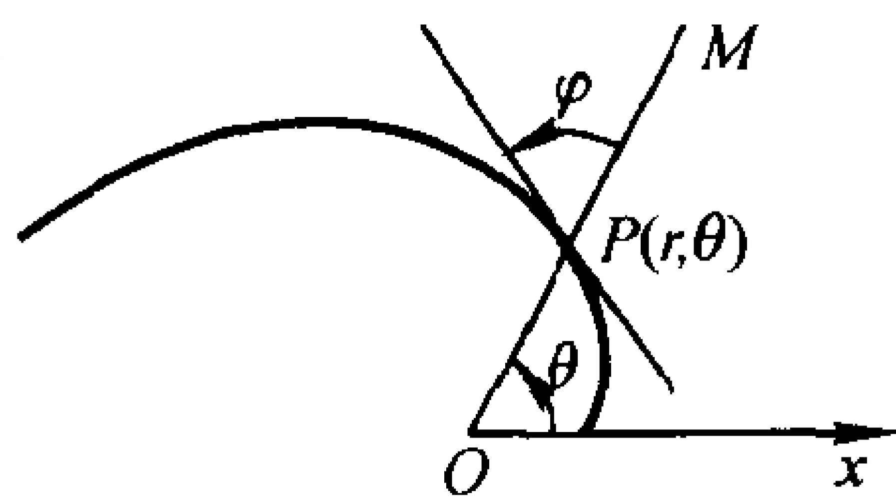


图 5-7

证 由(5)式得,对每一 θ 值都有

$$\tan\varphi=\frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}}}{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\theta/2}}=2,$$

即在对数螺线上任一点的切线与向径的夹角等于 arctan 2. □

习 题

1. 求下列由参量方程所确定的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

(1) $\begin{cases}x=\cos^4 t,\\ y=\sin^4 t\end{cases}$ 在 $t=0,\frac{\pi}{2}$ 处;

(2) $\begin{cases}x=\frac{t}{1+t},\\ y=\frac{1-t}{1+t}\end{cases}$ 在 $t>0$ 处.

2. 设 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t).\end{cases}$ 求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$, $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\pi}$.

3. 设曲线方程 $x=1-t^2, y=t-t^2$,求它在下列点处的切线方程与法线方程:

(1) $t=1$; (2) $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. 证明曲线

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$$

上任一点的法线到原点距离等于 a.

5. 证明:圆 $r = 2a\sin\theta$ ($a>0$)上任一点的切线与向径的夹角等于向径的极角.

6. 求心形线 $r = a(1+\cos\theta)$的切线与切点向径之间的夹角.

§4 高阶导数

设物体的运动方程为 $s = s(t)$,则物体的运动速度为 $v(t) = s'(t)$,而速度在时刻 t_0 的变化率

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t} = \lim_{t\to t_0}\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$$

就是运动物体在时刻 t_0 的加速度.因此,加速度是速度函数的导数,也就是路程 $s(t)$的导函数的导数,这就产生了高阶导数的概念.

定义 1 若函数 f 的导函数 f' 在点 x_0 可导,则称 f' 在点 x_0 的导数为 f 在点 x_0 的**二阶导数**,记作 $f''(x_0)$,即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = f''(x_0),$$

同时称 f 在点 x_0 为**二阶可导**.

若 f 在区间 I 上每一点都二阶可导,则得到一个定义在 I 上的二阶可导函数,记作 $f''(x)$, $x\in I$,或者简单记为 f''.

一般地,可由 f 的 $n-1$ 阶导函数定义 f 的 n **阶导函数**(或简称 n **阶导数**).

二阶以及二阶以上的导数都称为**高阶导数**,函数 f 在点 x_0 处的 n 阶导数记作

$$f^{(n)}(x_0),\ y^{(n)}\big|_{x=x_0}\ 或\ \left.\frac{d^n y}{dx^n}\right|_{x=x_0}.$$

相应地,n 阶导函数记作

$$f^{(n)},\ y^{(n)}\ 或\ \frac{d^n y}{dx^n}.$$

这里$\frac{d^n y}{dx^n}$亦可写作为$\frac{d^n}{dx^n}y$,它是对 y 相继进行 n 次求导运算"$\frac{d}{dx}$"的结果.

例 1 求幂函数 $y = x^n$(n 为正整数)的各阶导数.

解 由幂函数的求导公式得

$$y' = nx^{n-1},$$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2},$$
$$\cdots\cdots$$
$$y^{(n-1)} = (y^{(n-2)})' = n(n-1)\cdots 2x,$$
$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = (n(n-1)\cdots 2x)' = n!,$$
$$y^{(n+1)} = y^{(n+2)} = \cdots = 0.$$

由此可见,对于正整数幂函数 x^n,每求导一次,其幂次降低 1,第 n 阶导数为一常数,大于 n 阶的导数都等于 0. □

例 2 求 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的各阶导数.

解 对于 $y=\sin x$,由三角函数的求导公式得

$$y' = \cos x, y'' = -\sin x, y''' = -\cos x, y^{(4)} = \sin x.$$

继续求导,将出现周而复始的现象. 为了得到一般 n 阶导数公式,可将上述导数公式改写为

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y^{(4)} = \sin x = \sin\left(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

一般地,可推得

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right), n \in \mathbf{N}_+.$$

类似地有

$$\cos^{(n)} x = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right), n \in \mathbf{N}_+.$$ □

例 3 求 $y=\mathrm{e}^x$ 的各阶导数.

解 因为 $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$,所以 $(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x, n\in\mathbf{N}_+$. □

指数函数 e^x 的各阶导数仍旧是 e^x.

一阶导数的运算法则可直接移植到高阶导数. 容易看出:

$$[u \pm v]^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}. \tag{1}$$

对于乘法求导法则较为复杂一些. 设 $y=uv$,则

$$y' = u'v + uv',$$
$$y'' = (u'v + uv')' = u''v + 2u'v' + v'',$$
$$y''' = (u''v + 2u'v' + v'')' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + v''',$$

如此下去,读者不难看到,计算结果与二项式 $(u+v)^n$ 展开式极为相似,用数学

归纳法,可得

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + C_n^1 u^{(n-1)}v^{(1)} + C_n^2 u^{(n-2)}v^{(2)} + \cdots + C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + u^{(0)}v^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}, \tag{2}$$

其中 $u^{(0)}=u, v^{(0)}=v$. 这个公式称为**莱布尼茨公式**.

例 4 设 $y=e^x\cos x$,求 $y^{(5)}$.

解 令 $u(x)=e^x, v(x)=\cos x$. 由例 2 和例 3 有

$$u^{(n)}(x) = e^x, v^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

应用莱布尼茨公式($n=5$)得

$$\begin{aligned} y^{(5)} &= e^x\cos x + 5e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + 10e^x\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + 10e^x\cos\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right) + 5e^x\cos\left(x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right) + e^x\cos\left(x+5\cdot\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 4e^x(\sin x - \cos x). \end{aligned}$$

□

例 5 研究函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0, \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

的高阶导数.

解 当 $x>0$ 时, $f'(x)=2x, f''(x)=2, f^{(k)}(x)\equiv 0\ (k\geqslant 3)$;

当 $x<0$ 时, $f'(x)=-2x, f''(x)=-2, f^{(k)}(x)\equiv 0\ (k\geqslant 3)$.

当 $x=0$ 时,由左右导数定义不难求得 $f'_+(0)=f'_-(0)=f'(0)=0$,而当 $n\geqslant 2$ 时, $f^{(n)}(0)$不存在,整理后得

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -2x, & x < 0, \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & x > 0, \\ \text{不存在}, & x = 0, \\ -2, & x < 0, \end{cases}$$

当 $n\geqslant 3$ 时

$$f^{(n)}(x) = 0\ (x \neq 0), f^{(n)}(0)\ \text{不存在}.$$

□

设 φ, ψ 在$[\alpha,\beta]$上都是二阶可导,则由参量方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

所确定的函数的一阶导数$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$,它的参量方程是

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \end{cases}$$

因此由§3公式(2)得

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\psi'}{\varphi'}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)}$$

$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \tag{3}$$

例 6 试求由摆线参量方程

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

所确定的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数.

解 由§3公式(2)得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(a(1-\cos t))'}{(a(t-\sin t))'} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \cot\frac{t}{2}.$$

再由公式(3)

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\left(\cot\dfrac{t}{2}\right)'}{(a(t-\sin t))'} = \frac{-\dfrac{1}{2}\csc^2\dfrac{t}{2}}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{4a}\csc^4\frac{t}{2}.$$

□

习 题

1. 求下列函数在指定点的高阶导数:
   (1) $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 9$,求 $f''(1), f'''(1), f^{(4)}(1)$;
   (2) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f''(0), f''(1), f''(-1)$.
2. 设函数 f 在点 $x = 1$ 处二阶可导,证明:若 $f'(1) = 0, f''(1) = 0$,则在 $x = 1$ 处有 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x^2) = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f^2(x)$.
3. 求下列函数的高阶导数:
   (1) $f(x) = x\ln x$,求 $f''(x)$; (2) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$,求 $f'''(x)$;
   (3) $f(x) = \ln(1+x)$,求 $f^{(5)}(x)$; (4) $f(x) = x^3\mathrm{e}^x$,求 $f^{(10)}(x)$.
4. 设 f 为二阶可导函数,求下列各函数的二阶导数:
   (1) $y = f(\ln x)$; (2) $y = f(x^n), n \in \mathbf{N}_+$;
   (3) $y = f(f(x))$.
5. 求下列函数的 n 阶导数:

(1) $y=\ln x$; (2) $y=a^x\ (a>0,a\neq1)$;

(3) $y=\dfrac{1}{x(1-x)}$; (4) $y=\dfrac{\ln x}{x}$;

(5) $f(x)=\dfrac{x^n}{1-x}$;

(6) $y=e^{ax}\sin bx$(a,b 均为实数).

6. 求由下列参量方程所确定的函数的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=e^t\cos t,\\ y=e^t\sin t.\end{cases}$

7. 研究函数 $f(x)=|x^3|$在 $x=0$ 处的各阶导数.

8. 设函数 $y=f(x)$在点 x 二阶可导,且 $f'(x)\neq0$. 若 $f(x)$存在反函数 $x=f^{-1}(y)$,试用 $f'(x)$,$f''(x)$以及 $f'''(x)$表示$(f^{-1})'''(y)$.

9. 设 $y=\arctan x$.

(1) 证明它满足方程$(1+x^2)y''+2xy'=0$;

(2) 求$y^{(n)}|_{x=0}$.

10. 设 $y=\arcsin x$.

(1) 证明它满足方程

$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)y^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0\ (n\geqslant0)$;

(2) 求$y^{(n)}|_{x=0}$.

11. 证明 函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处 n 阶可导且$f^{(n)}(0)=0$,其中 n 为任意正整数.

§5 微 分

一 微分的概念

先考察一个具体问题. 设一边长为 x 的正方形,它的面积

$$S=x^2$$

是 x 的函数,若边长由 x_0 增加 Δx,相应地正方形面积的增量

$$\Delta S=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

ΔS 由两部分组成:第一部分 $2x_0\Delta x$(即图 5-8 中的阴影部分);第二部分$(\Delta x)^2$是关于 Δx 的高阶无穷小量. 由此可见,当给 x_0 一个微小增量 Δx 时,由此引起的正方形面积增量 ΔS 可以近似地用第一部分(Δx 的线性部分 $2x_0\Delta x$)来代

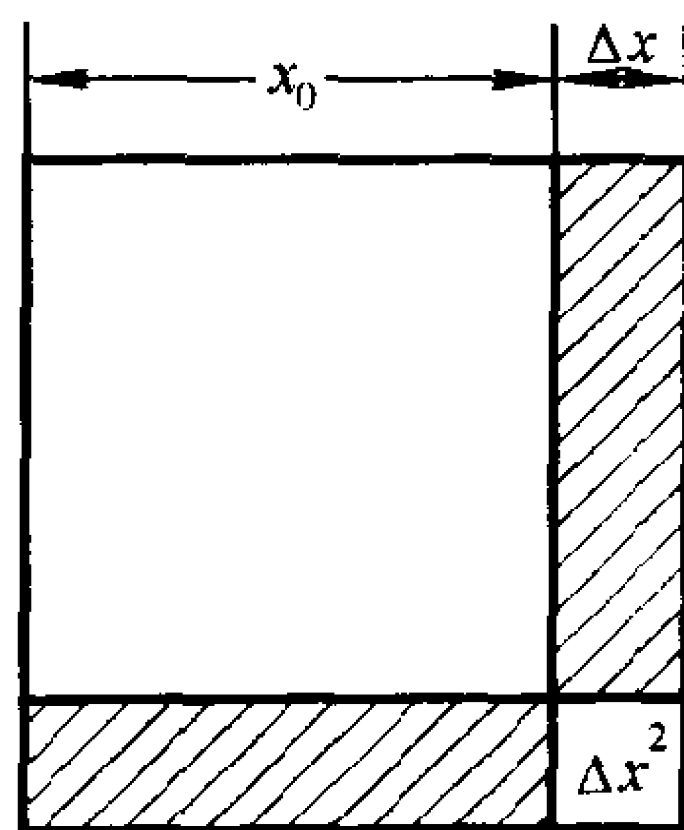


图 5-8

替. 由此产生的误差是一个关于 Δx 的高阶无穷小量,也就是以 Δx 为边长的小正方形面积.

定义 1　设函数 $y=f(x)$ 定义在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内. 当给 x_0 一个增量 Δx, $x_0+\Delta x\in U(x_0)$ 时,相应地得到函数的增量为

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

如果存在常数 A,使得 Δy 能表示成

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \tag{1}$$

则称函数 f 在点 x_0 **可微**,并称(1)式中的第一项 $A\Delta x$ 为 f 在点 x_0 的**微分**,记作

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0} = A\Delta x \quad 或 \quad \mathrm{d}f(x)\big|_{x=x_0} = A\Delta x. \tag{2}$$

由定义可见,函数的微分与增量仅相差一个关于 Δx 的高阶无穷小量,由于 $\mathrm{d}y$ 是 Δx 的线性函数,所以当 $A\neq 0$ 时,也说微分 $\mathrm{d}y$ 是增量 Δy 的**线性主部**.

容易看出,函数 f 在点 x_0 可导和可微是等价的.

定理 5.10　函数 f 在点 x_0 可微的充要条件是函数 f 在点 x_0 可导,而且(1)式中的 A 等于 $f'(x_0)$.

证　[必要性]　若 f 在点 x_0 可微,由(1)式有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + o(1).$$

取极限后有

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(A+o(1)) = A.$$

这就证明了 f 在点 x_0 可导且导数等于 A.

[充分性]　若 f 在点 x_0 可导,则 f 在点 x_0 的有限增量公式

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

表明函数增量 Δy 可表示为 Δx 的线性部分($f'(x_0)\Delta x$)与较 Δx 高阶的无穷小量之和,所以 f 在点 x_0 可微,且有

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x.$$

微分的几何解释如图 5-9 所示. 当自变量由 x_0 增加到 $x_0+\Delta x$ 时,函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=RQ$,而微分则是在点 P 处的切线上与 Δx 所对应的增量

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x = RQ',$$

并且

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{Q'Q}{PR} = f'(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{Q'Q}{RQ'} = 0,$$

所以当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{Q'Q}{RQ'}=0.$$

这表明当 $x\to x_0$ 时线段 $Q'Q$ 的长度比 RQ' 的长度要小得多.

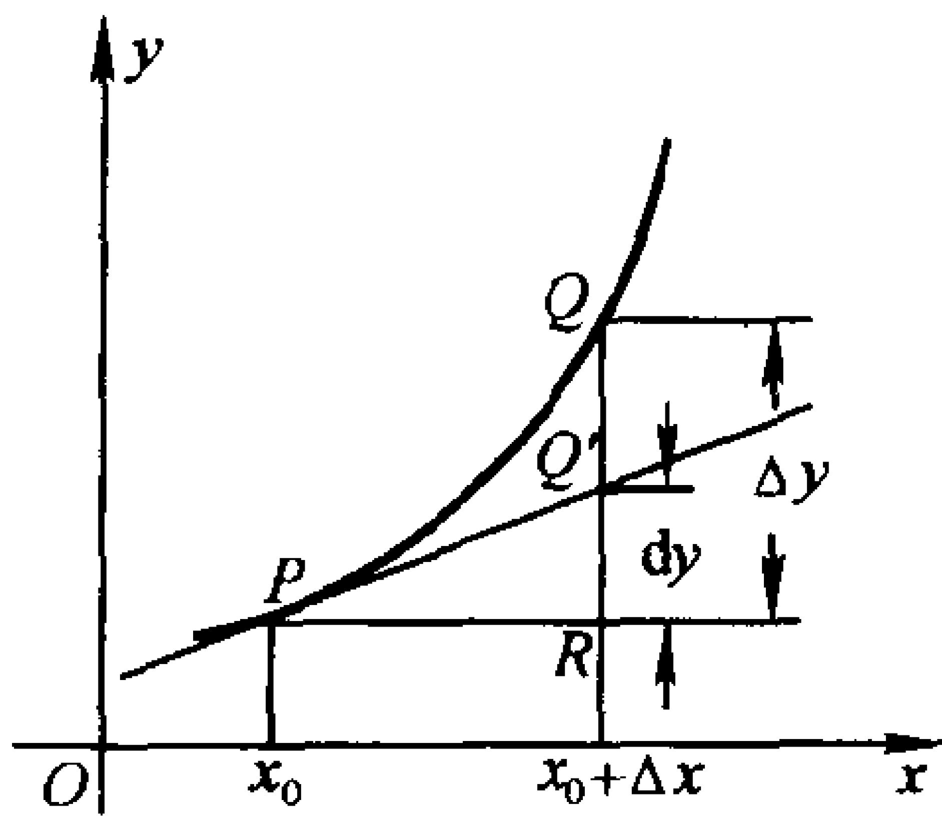


图 5-9

若函数 $y=f(x)$ 在区间上每一点都可微，则称 f 为 I 上的**可微函数**. 函数 $y=f(x)$ 在 I 上任一点 x 处的**微分**记作

$$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x, x\in I, \tag{3}$$

它不仅依赖于 Δx，而且也依赖于 x.

特别当 $y=x$ 时，

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}x=\Delta x,$$

这表示自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 就等于自变量的增量. 于是可将(3)式改写为

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x, \tag{4}$$

即函数的微分等于函数的导数与自变量微分的积. 比如

$$\mathrm{d}(x^\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{d}(\ln x)=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

如果把(4)式写成

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

那么函数的导数就等于函数微分与自变量微分的商. 因此，导数也常称为**微商**. 在这以前，我们总把 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 作为一个运算记号的整体来看待，有了微分概念之后，也不妨把它看作一个分式了.

二　微分的运算法则

由导数与微分的关系，我们能立刻推出如下微分运算法则：

1. $\mathrm{d}[u(x)\pm v(x)]=\mathrm{d}u(x)\pm \mathrm{d}v(x)$;
2. $\mathrm{d}[u(x)v(x)]=v(x)\mathrm{d}u(x)+u(x)\mathrm{d}v(x)$;
3. $\mathrm{d}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=\frac{v(x)\mathrm{d}u(x)-u(x)\mathrm{d}v(x)}{v^2(x)}$;
4. $\mathrm{d}(f\circ g(x))=f'(u)g'(x)\mathrm{d}x$，其中 $u=g(x)$.

在上述复合函数的微分运算法则 4 中，由于 $\mathrm{d}u=g'(x)\mathrm{d}x$，所以它也可写作

$$dy = f'(u)du.$$

这与(4)式在形式上完全相同,即(4)式不仅在 x 为自变量时成立,当它是另一可微函数的因变量时也成立.这个性质通常称为**一阶微分形式的不变性**.

例 1 求 $y=x^2\ln x+\cos x^2$ 的微分.

解
$$\begin{aligned} dy &= d(x^2\ln x+\cos x^2)=d(x^2\ln x)+d(\cos x^2) \\ &= \ln x d(x^2)+x^2 d(\ln x)+d(\cos x^2) \\ &= x(2\ln x+1-2\sin x^2)dx. \end{aligned}$$ □

例 2 求 $y=e^{\sin(ax+b)}$的微分.

解 由一阶微分形式不变性,可得

$$\begin{aligned} dy &= e^{\sin(ax+b)}d(\sin(ax+b)) \\ &= e^{\sin(ax+b)}\cos(ax+b)d(ax+b) \\ &= ae^{\sin(ax+b)}\cos(ax+b)dx. \end{aligned}$$ □

三　高阶微分

我们知道函数 $y=f(x)$的一阶微分是

$$dy = f'(x)dx,$$

其中变量 x 和 dx 是相互独立的.现将一阶微分只作为 x 的函数,若 f 二阶可导,那么 dy 对自变量 x 的微分

$$d(dy) = d(f'(x)dx) = f''(x)dx\cdot dx = f''(x)(dx)^2,$$

或写作

$$d^2y = f''(x)dx^2, \tag{5}$$

称它为函数 f 的**二阶微分**.

注 这里 dx^2 是指$(dx)^2$;d^2x 表示 x 的二阶微分$(d^2x=0)$;而 $d(x^2)$则表示 x^2 的一阶微分$(d(x^2)=2xdx)$.三者不能混淆.

一般地,n **阶微分**是 $n-1$ 阶微分的微分,记作 d^ny,即

$$\begin{aligned} d^ny &= d(d^{n-1}y) = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) \\ &= f^{(n)}(x)dx^n. \end{aligned}$$

若将它写成

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

时,就和 n 阶导数的记法一致了.

对 $n\geqslant 2$ 的 n 阶微分均称为**高阶微分**.

一阶微分具有形式不变性,而对于高阶微分来说已不具备这个性质了.以二阶微分为例,当 x 为 $y=f(x)$的自变量时,

$$d^2y = f''(x)dx^2. \tag{6}$$

当 x 为复合函数 $y=f(x)$，$x=\varphi(t)$ 的中间变量时，$y=f(\varphi(t))$ 作为 t 的函数，关于 t 的一阶微分可以写作

$$dy = f'(x)dx,$$

其中 $dx=\varphi'(t)dt$；而对 t 的二阶微分则为

$$\begin{aligned} d^2y &= (f(\varphi(t)))''dt^2 = (f'(\varphi(t))\varphi'(t))'dt^2 \\ &= [f''(\varphi(t))(\varphi'(t))^2 + f'(\varphi(t))\varphi''(t)]dt^2 \\ &= f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x, \end{aligned} \tag{7}$$

比(3)式多了一项，这说明二阶微分已不再具有形式不变性.

例 3 设 $y=f(x)=\sin x$，$x=\varphi(t)=t^2$. 分别依公式(6)和公式(7)求 d^2y.

解 由 $y=\sin t^2$ 得 $y'=2t\cos t^2$，$y''=2\cos t^2-4t^2\sin t^2$，依式(6)得

$$d^2y = (2\cos t^2 - 4t^2\sin t^2)dt^2.$$

类似地，依公式(7)可得

$$\begin{aligned} d^2y &= f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x \\ &= -\sin x dx^2 + \cos x d^2x \\ &= -\sin t^2 \cdot (2t)^2dt^2 + \cos t^2 \cdot 2dt^2 \\ &= (2\cos t^2 - 4t^2\sin t^2)dt^2. \end{aligned}$$

□

注 下面的解法是错误的：

$$\begin{aligned} d^2y &= f''(x)dx^2 = -\sin x(2tdt)^2 \\ &= -4t^2\sin t^2dt^2. \end{aligned}$$

四 微分在近似计算中的应用

微分在数学中有许多重要的应用. 这里介绍它在近似计算方面的一些应用.

1. 函数的近似计算　由函数增量与微分关系

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) = dy + o(\Delta x),$$

当 Δx 很小时，有 $\Delta y \approx dy$，由此即得

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \tag{8}$$

或当 $x \approx x_0$ 时有

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{9}$$

注意到在点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线方程即为

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

(9)式的几何意义就是当 x 充分接近 x_0 时，可用切线近似替代曲线（"以直代曲"）. 常用这种线性近似的思想来对复杂问题进行简化处理.

设 $f(x)$ 分别是 $\sin x$，$\tan x$，$\ln(1+x)$ 和 e^x，令 $x_0=0$，则由(9)式可得这些

函数在原点附近的近似公式:

$$\sin x \approx x; \qquad \tan x \approx x;$$
$$\ln(1+x) \approx x; \qquad e^x \approx 1+x.$$

一般地,为求得 $f(x)$的近似值,可找一邻近于 x 的点x_0,只要 $f(x_0)$和 $f'(x_0)$易于计算,由(9)式可求得 $f(x)$的近似值.

例 4 求 $\sin 33°$的近似值.

解 由于 $\sin 33° = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{60}\right)$,因此取 $f(x)=\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{6}$, $\Delta x=\frac{\pi}{60}$,由(9)式得到

$$\begin{aligned}\sin 33° &\approx \sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{60}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{60}\approx 0.545.\end{aligned}$$

($\sin 33°$的真值为 0.544 639….) □

例 5 设钟摆的周期是1秒,在冬季摆长至多缩短 0.01 cm,试问此钟每天至多快几秒?

解 由物理学知道,单摆周期 T 与摆长 l 的关系为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

其中 g 是重力加速度.已知钟摆周期为 1 秒,故此摆原长为

$$l_0 = \frac{g}{(2\pi)^2}.$$

当摆长最多缩短 0.01 cm 时,摆长的增量 $\Delta l = -0.01$,它引起单摆周期的增量

$$\begin{aligned}\Delta T &\approx \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}l}\right|_{l=l_0}\cdot\Delta l = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\cdot\frac{1}{\sqrt{l_0}}\Delta l = \frac{2\pi^2}{g}\Delta l\\ &= \frac{2\pi^2}{980}(-0.01)\approx -0.000\,2(\text{秒}).\end{aligned}$$

这就是说,加快约 0.000 2 秒,因此每天大约加快

$$60\times 60\times 24\times 0.000\,2 = 17.28(\text{秒}).$$ □

2. 误差估计 设量 x 是由测量得到,量 y 由函数$y=f(x)$经过计算得到.在测量时,由于存在测量误差,实际测得的只是 x 的某一近似值x_0,因此由 x_0 算得的 $y_0=f(x_0)$也只是 $y=f(x)$的一个近似值.若已知测量值 x_0 的误差限为 δ_x(它与测量工具的精度有关),即

$$|\Delta x| = |x - x_0| \leqslant \delta_x$$

则当 δ_x 很小时,

$$|\Delta y| = |f(x)-f(x_0)| \approx |f'(x_0)\Delta x| \leqslant |f'(x_0)|\,\delta_x, \tag{10}$$

而相对误差限则为

$$\frac{\delta_y}{|y_0|} = \left|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right|\delta_x. \tag{11}$$

例 6 设测得一球体的直径为42 cm,测量工具的精度为0.05 cm.试求以此直径计算球体体积时所引起的误差.

解 由直径 d 计算球体体积的函数式为

$$V = \frac{1}{6}\pi d^3.$$

取 $d_0=42, \delta_d=0.05$,求得

$$V_0 = \frac{1}{6}\pi d_0^3 \approx 38\ 792.39(\mathrm{cm}^3),$$

并由(10)、(11)两式得体积的绝对误差限和相对误差限分别为

$$\delta_V = \left|\frac{1}{2}\pi d_0^2\right| \cdot \delta_d = \frac{\pi}{2} \cdot 42^2 \cdot 0.05 \approx 138.54(\mathrm{cm}^3),$$

$$\frac{\delta_V}{|V_0|} = \frac{\frac{1}{2}\pi d_0^2}{\frac{1}{6}\pi d_0^3} \cdot \delta_d = \frac{3}{d_0}\delta_d \approx 3.57‰.$$ □

习 题

1. 若 $x=1$,而 $\Delta x=0.1, 0.01$.问对于 $y=x^2$,Δy 与 $\mathrm{d}y$ 之差分别是多少?
2. 求下列函数微分:

(1) $y=x+2x^2-\frac{1}{3}x^3+x^4$; (2) $y=x\ln x-x$;

(3) $y=x^2\cos 2x$; (4) $y=\frac{x}{1-x^2}$;

(5) $y=\mathrm{e}^{ax}\sin bx$; (6) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

3. 求下列函数的高阶微分:

(1) 设 $u(x)=\ln x, v(x)=\mathrm{e}^x$,求 $\mathrm{d}^3(uv), \mathrm{d}^3\left(\frac{u}{v}\right)$;

(2) 设 $u(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}, v(x)=\cos 2x$,求 $\mathrm{d}^3(uv), \mathrm{d}^3\left(\frac{u}{v}\right)$.

4. 利用微分求近似值:

(1) $\sqrt[3]{1.02}$; (2) $\lg 11$;

(3) $\tan 45°10'$; (4) $\sqrt{26}$.

5. 为了使计算出球的体积准确到1%,问度量半径 r 时允许发生的相对误差至多应多少?

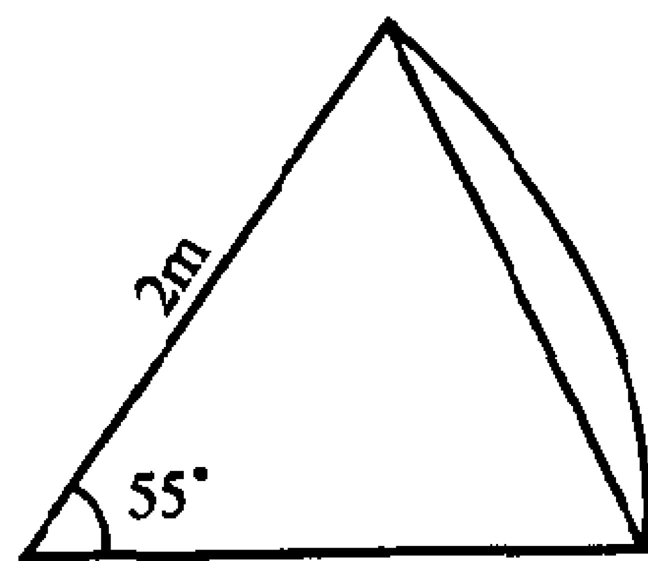


图 5-10

6. 检验一个半径为 2 米,中心角为 55°的工件面积(图 5-10),现可直接测量其中心角或此角所对的弦长,设量角最大误差为 0.5°,量弦长最大误差为 3 毫米,试问用哪一种方法检验的结果较为精确.

总 练 习 题

1. 设 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$,证明:

(1) $y'=\dfrac{1}{(cx+d)^2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$;

(2) $y^{(n)}=(-1)^{n+1}\dfrac{n!\,c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

2. 证明下列函数在 $x=0$ 处不可导:

(1) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$; (2) $f(x)=|\ln|x-1||$.

3. (1)举出一个连续函数,它仅在已知点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不可导;

(2) 举出一个函数,它仅在点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 可导.

4. 证明:

(1) 可导的偶函数,其导函数为奇函数;

(2) 可导的奇函数,其导函数为偶函数;

(3) 可导的周期函数,其导函数仍为周期函数.

5. 对下列命题,若认为是正确的,请给予证明;若认为是错误的,请举一反例予以否定:

(1) 设 $f=\varphi+\psi$,若 f 在点 x_0 可导,则 φ,ψ 在点 x_0 可导;

(2) 设 $f=\varphi+\psi$,若 φ 在点 x_0 可导,ψ 在点 x_0 不可导,则 f 在点 x_0 一定不可导;

(3) 设 $f=\varphi\cdot\psi$,若 f 在点 x_0 可导,则 φ,ψ 在点 x_0 可导;

(4) 设 $f=\varphi\cdot\psi$,若 φ 在点 x_0 可导,ψ 在点 x_0 不可导,则 f 在点 x_0 一定不可导.

6. 设 $\varphi(x)$在点 a 连续,$f(x)=|x-a|\varphi(x)$,求 $f'_-(a)$和 $f'_+(a)$. 问在什么条件下 $f'(a)$存在?

7. 设 f 为可导函数,求下列各函数的一阶导数:

(1) $y=f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{f(x)}$; (2) $y=f(f(f(x)))$.

8. 设 φ,ψ 为可导函数,求 y':

(1) $y=\sqrt{(\varphi(x))^2+(\psi(x))^2}$; (2) $y=\arctan\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$;

(3) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$ $(\varphi,\psi>0,\varphi\neq1)$.

9. 设 $f_{ij}(x)$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$为可导函数,证明:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

并利用这个结果求 $F'(x)$：

(1) $F(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}$； (2) $F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$.

第六章　微分中值定理及其应用

§1　拉格朗日定理和函数的单调性

在这一章里，我们要讨论怎样由导数 f' 的已知性质来推断函数 f 所应具有的性质．微分中值定理（包括罗尔定理、拉格朗日定理、柯西定理、泰勒定理）正是进行这一讨论的有效工具．

本节首先介绍拉格朗日定理以及它的预备定理——罗尔定理，并用此讨论函数的单调性．

一　罗尔定理与拉格朗日定理

定理 6.1　（罗尔（Rolle）中值定理）　若函数 f 满足如下条件：

(i) f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(ii) f 在开区间 (a,b) 内可导；

(iii) $f(a)=f(b)$，

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi)=0. \tag{1}$$

罗尔定理的几何意义是说：在每一点都可导的一段连续曲线上，如果曲线的两端点高度相等，则至少存在一条水平切线（图 6－1）．

证　因为 f 在 $[a,b]$ 上连续，所以有最大值与最小值，分别用 M 与 m 表示，现分两种情况来讨论：

(1) 若 $m=M$，则 f 在 $[a,b]$ 上必为常数，从而结论显然成立．

(2) 若 $m<M$，则因 $f(a)=f(b)$，使得最大值 M 与最小值 m 至少有一个在 (a,b) 内某点 ξ 处取得，从而 ξ 是 f 的极值点．由条件(ii)，f 在点 ξ 处可导，故由费马定理推知

$$f'(\xi)=0. \qquad \square$$

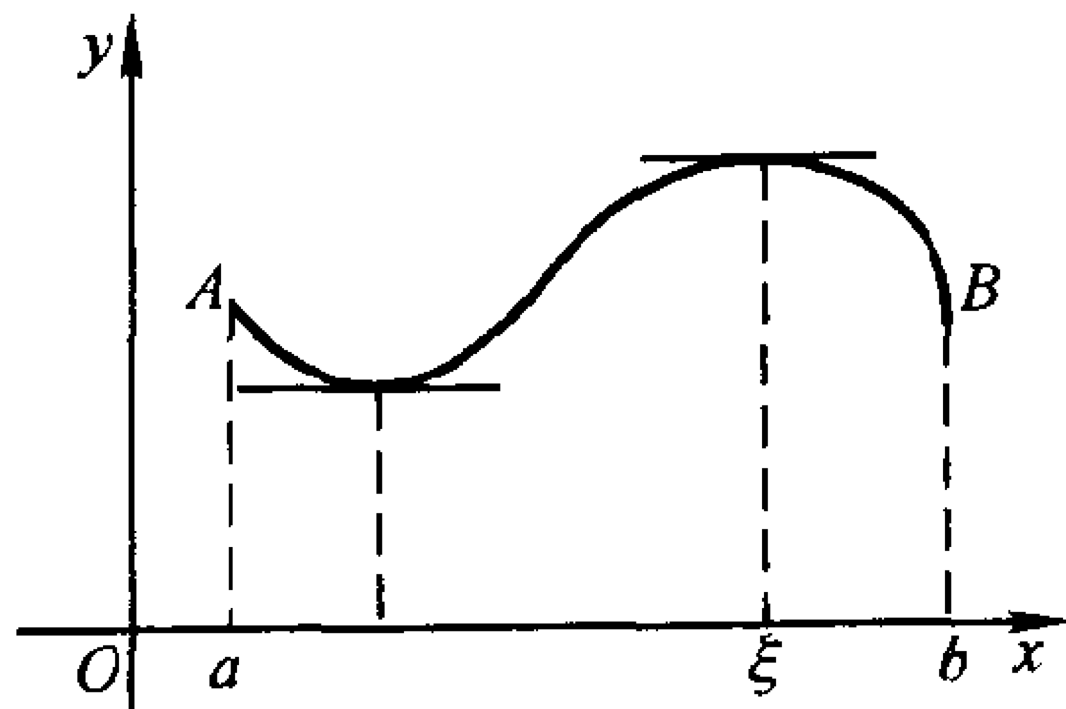
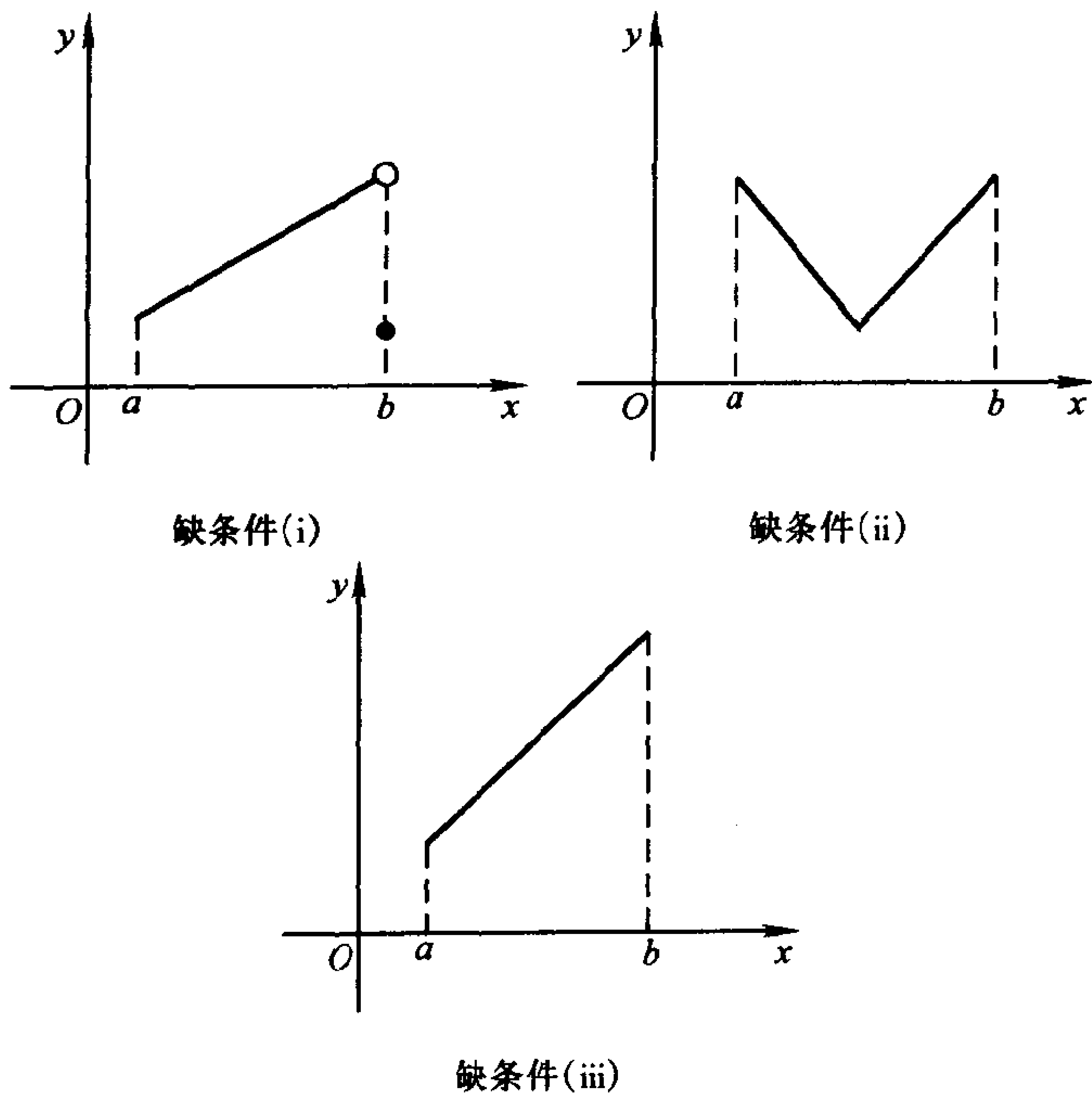


图　6－1

注　定理中的三个条件缺少任何一个，结论将不一定成立（见图 6－2）．



缺条件(i) 缺条件(ii)

缺条件(iii)

图 6-2

作为罗尔定理的简单应用,请看下面的例子.

例1 设 f 为 $\mathbf{R}$ 上可导函数,证明:若方程 $f'(x)=0$ 没有实根,则方程 $f(x)=0$至多只有一个实根.

证 这可反证如下:倘若 $f(x)=0$ 有两个实根 x_1 和 x_2(设 $x_1<x_2$),则函数 f 在$[x_1,x_2]$上满足罗尔定理三个条件,从而存在 $\xi\in(x_1,x_2)$,使 $f'(\xi)=0$,这与 $f'(x)\neq0$ 的假设相矛盾,命题得证. □

定理 6.2 (拉格朗日(Lagrange)中值定理) 若函数 f 满足如下条件:

(i) f 在闭区间$[a,b]$上连续;

(ii) f 在开区间(a,b)内可导,

则在(a,b)内至少存在一点 ξ,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{2}$$

显然,特别当 $f(a)=f(b)$时,本定理的结论(2)即为罗尔定理的结论(1).这表明罗尔定理是拉格朗日定理的一个特殊情形.

证 作辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

显然,$F(a)=F(b)$ $(=0)$,且 F 在$[a,b]$上满足罗尔定理的另两个条件.故存

在 $\xi\in(a,b)$，使

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

移项后即得到所要证明的(2)式. □

拉格朗日中值定理的几何意义是：在满足定理条件的曲线 $y=f(x)$ 上至少存在一点 $P(\xi,f(\xi))$，该曲线在该点处的切线平行于曲线两端点的连线 AB，我们在证明中引入的辅助函数 $F(x)$，正是曲线 $y=f(x)$ 与直线 $AB\left(y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)\right)$ 之差(如图 6－3 所示).

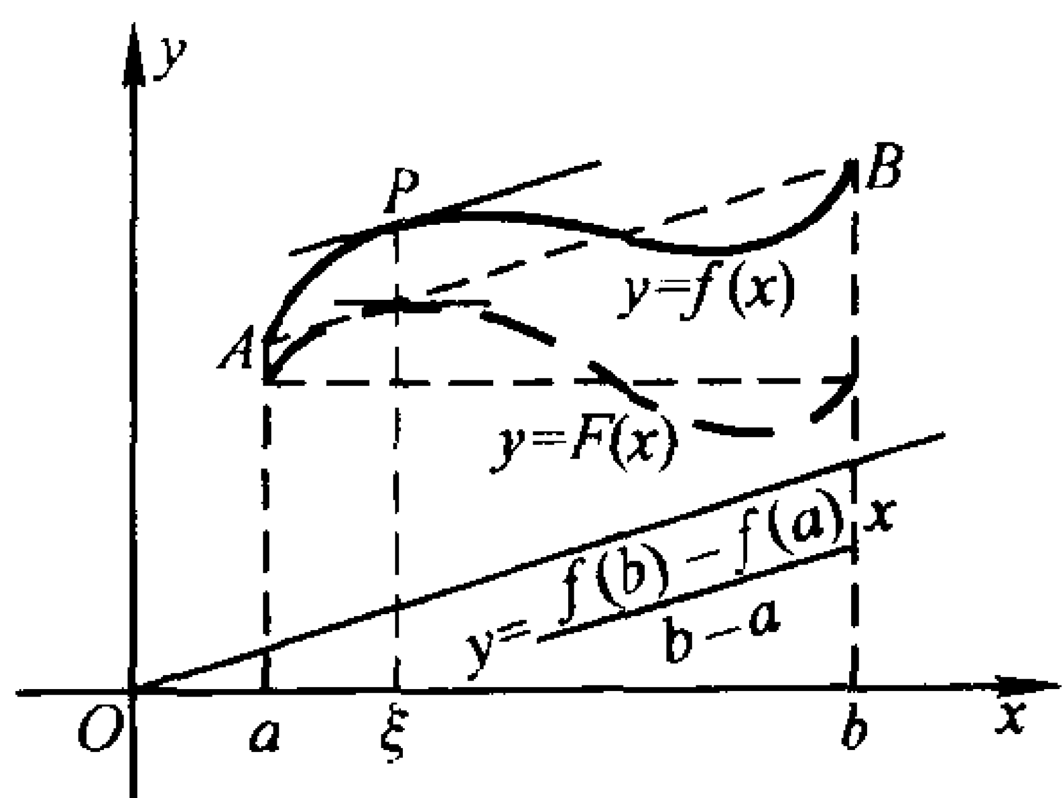


图 6－3

定理 6.2 的结论(公式(2))称为**拉格朗日公式**.

拉格朗日公式还有下面几种等价表示形式，供读者在不同场合选用：

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),a<\xi<b; \tag{3}$$

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a),0<\theta<1; \tag{4}$$

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h,0<\theta<1. \tag{5}$$

值得注意的是，拉格朗日公式无论对于 $a<b$，还是 $a>b$ 都成立，而 ξ 则是介于 a 与 b 之间的某一定数. 而(4)、(5)两式的特点，在于把中值点 ξ 表示成了 $a+\theta(b-a)$，使得不论 a,b 为何值，θ 总可为小于 1 的某一正数.

例 2 证明对一切 $h>-1,h\neq0$ 成立不等式

$$\frac{h}{1+h}<\ln(1+h)<h.$$

证 设 $f(x)=\ln(1+x)$，则

$$\ln(1+h)=\ln(1+h)-\ln 1=\frac{h}{1+\theta h},0<\theta<1.$$

当 $h>0$ 时，由 $0<\theta<1$ 可推知

$$1<1+\theta h<1+h,\frac{h}{1+h}<\frac{h}{1+\theta h}<h.$$

当 $-1<h<0$ 时，由 $0<\theta<1$ 可推得

$$1>1+\theta h>1+h>0,\frac{h}{1+h}<\frac{h}{1+\theta h}<h.$$

从而得到所要证明的结论. □

推论 1 若函数 f 在区间 I 上可导，且 $f'(x)\equiv0,x\in I$，则 f 为 I 上的一个常量函数.

证 任取两点 $x_1,x_2\in I$(设 $x_1<x_2$),在区间$[x_1,x_2]$上应用拉格朗日定理,存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset I$,使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0.$$

这就证得 f 在区间 I 上任何两点之值相等. □

由推论 1 又可进一步得到如下结论:

推论 2 若函数 f 和 g 均在区间 I 上可导,且 $f'(x)\equiv g'(x)$,$x\in I$,则在区间 I 上 $f(x)$ 与 $g(x)$ 只相差某一常数,即

$$f(x)=g(x)+c\quad(c\text{ 为某一常数}).$$

推论 3 (导数极限定理) 设函数 f 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内连续,在 $U^\circ(x_0)$ 内可导,且极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 存在,则 f 在点 x_0 可导,且

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}f'(x).\tag{6}$$

证 分别按左右导数来证明(6)式成立.

(1) 任取 $x\in U_+^\circ(x_0)$,$f(x)$在$[x_0,x_1]$上满足拉格朗日定理条件,则存在 $\xi\in(x_0,x)$,使得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi).\tag{7}$$

由于 $x_0<\xi<x$,因此当 $x\to x_0^+$ 时,随之有 $\xi\to x_0^+$,对(7)式两边取极限,便得

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}f'(\xi)=f'(x_0+0).$$

(2) 同理可得 $f'_-(x_0)=f'(x_0-0)$.

因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=k$ 存在,所以 $f'(x_0+0)=f'(x_0-0)=k$,从而 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=k$,即 $f'(x_0)=k$. □

导数极限定理适合于用来求分段函数的导数.

例 3 求分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x+\sin x^2, & x\leqslant 0,\\ \ln(1+x), & x>0\end{cases}$$

的导数.

解 首先易得

$$f'(x)=\begin{cases}1+2x\cos x^2, & x<0,\\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0.\end{cases}$$

进一步考虑 f 在 $x=0$ 处的导数.在此之前,我们只能依赖导数定义来处理,现在则可以利用导数极限定理.由于

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(1+x) = 0 = f(0),$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+\sin x^2) = 0 = f(0),$$

因此 f 在 $x=0$ 处连续,又因

$$f'(0-0) = \lim_{x\to 0^-} (1+2x\cos x^2) = 1,$$
$$f'(0+0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1,$$

所以$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=1$. 依据导数极限定理推知 f 在 $x=0$ 处可导,且 $f'(0)=1$. □

问题 若把 $f(x)$在 $x\leqslant 0$ 处改为 $f(x)=\sin x^2$,有关 f 在 $x=0$ 处的导数(或左、右导数)能得出何种结论?

二 单调函数

定理 6.3 设 $f(x)$在区间 I 上可导,则 $f(x)$在 I 上递增(减)的充要条件是

$$f'(x)\geqslant 0 \ (\leqslant 0).$$

证 若 f 为增函数,则对每一 $x_0\in I$,当 $x\neq x_0$ 时,有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0.$$

令 $x\to x_0$,即得 $f'(x_0)\geqslant 0$.

反之,若 $f(x)$在区间 I 上恒有 $f'(x)\geqslant 0$,则对任意 $x_1,x_2\in I$(设 $x_1<x_2$),应用拉格朗日定理,存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset I$,使得

$$f(x_2)-f(x_1) = f'(\xi)(x_2-x_1)\geqslant 0.$$

由此证得 f 在 I 上为增函数. □

例 4 设 $f(x)=x^3-x$. 试讨论函数 f 的单调区间.

解 由于

$$f'(x) = 3x^2-1 = (\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1),$$

因此

当 $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$时,$f'(x)\geqslant 0$,$f$ 递增;

当 $x\in\left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$时,$f'(x)\leqslant 0$,$f$ 递减;

当 $x\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$时,$f'(x)\geqslant 0$,$f$ 递增.

其图象如图 6-4 所示. □

定理 6.4 若函数 f 在 (a,b) 内可导,则 f 在 (a,b) 内严格递增(递减)的充要条件是:

(i) 对一切 $x\in(a,b)$,有 $f'(x)\geqslant 0$ $(f'(x)\leqslant 0)$;

(ii) 在 (a,b) 内的任何子区间上 $f'(x)\not\equiv 0$.

我们将这个定理的证明留给读者.此定理有以下一个简单的推论:

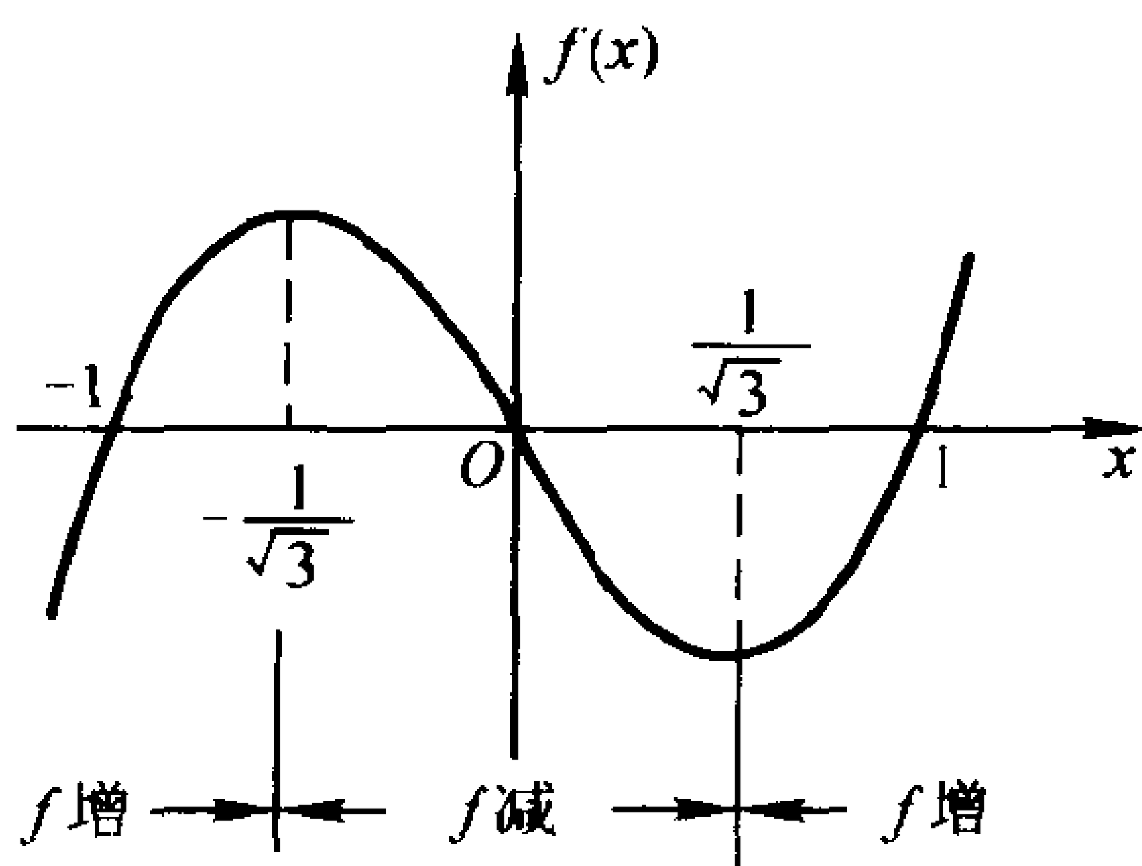


图 6-4

推论 设函数在区间 I 上可微,若 $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$,则 f 在 I 上严格递增(严格递减).

注 若 f 在 (a,b) 上(严格)递增(减),且在点 a 右连续,则 f 在 $[a,b)$ 上亦为(严格)递增(减),对右端点 b 可类似讨论.

例 5 证明不等式

$$e^x>1+x, x\neq 0.$$

证 设 $f(x)=e^x-1-x$,则 $f'(x)=e^x-1$.故当 $x>0$ 时,$f'(x)>0$,f 严格递增;当 $x<0$,$f'(x)<0$,f 严格递减.又由于 f 在 $x=0$ 处连续,则当 $x\neq 0$ 时

$$f(x)>f(0)=0,$$

从而证得

$$e^x>1+x, x\neq 0.$$ □

习 题

1. 试讨论下列函数在指定区间内是否存在一点 ξ,使 $f'(\xi)=0$:

(1) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant\dfrac{1}{\pi}, \\ 0, & x=0; \end{cases}$ (2) $f(x)=|x|$, $-1\leqslant x\leqslant 1$.

2. 证明:(1) 方程 x^3-3x+c(这里 c 为常数)在区间 $[0,1]$ 内不可能有两个不同的实根;

(2) 方程 x^n+px+q(n 为正整数,p、q 为实数)当 n 为偶数时至多有两个实根;当 n 为奇数时至多有三个实根.

3. 证明定理 6.2 推论 2.

4. 证明 (1) 若函数 f 在 $[a,b]$ 上可导,且 $f'(x)\geqslant m$,则

$$f(b)\geqslant f(a)+m(b-a);$$

(2) 若函数 f 在 $[a,b]$ 上可导,且 $|f'(x)|\leqslant M$,则

$$|f(b)-f(a)|\leqslant M(b-a);$$

(3) 对任意实数 x_1,x_2,都有 $|\sin x_1-\sin x_2|\leqslant|x_2-x_1|$.

5. 应用拉格朗日中值定理证明下列不等式:

(1) $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$,其中 $0<a<b$;

(2) $\frac{h^2}{1+h^2}<\arctan h<h$,其中 $h>0$.

6. 确定下列函数的单调区间:

(1) $f(x)=3x-x^2$;　　(2) $f(x)=2x^2-\ln x$;

(3) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$;　　(4) $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$.

7. 应用函数的单调性证明下列不等式:

(1) $\tan x>x-\frac{x^3}{3}, x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$;

(2) $\frac{2x}{\pi}<\sin x<x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

(3) $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2(1+x)}, x>0$.

---

8. 以 $S(x)$记由$(a,f(a)),(b,f(b)),(x,f(x))$三点组成的三角形面积,试对 $S(x)$应用罗尔中值定理证明拉格朗日中值定理.

9. 设 f 为$[a,b]$上二阶可导函数,$f(a)=f(b)=0$,并存在一点 $c\in(a,b)$使得 $f(c)>0$.证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)<0$.

10. 设函数 f 在(a,b)内可导,且 f'单调.证明 f'在(a,b)内连续.

11. 设 $p(x)$为多项式,α 为 $p(x)=0$ 的 r 重实根.证明 α 必定是 $p'(x)$的 $r-1$ 重实根.

12. 证明:设 f 为 n 阶可导函数,若方程 $f(x)=0$ 有 $n+1$ 个相异的实根,则方程 $f^{(n)}(x)=0$ 至少有一个实根.

13. 设 $a,b>0$.证明方程 x^3+ax+b 不存在正根.

14. 证明:$\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\sin x}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

15. 证明:若函数 f,g 在区间$[a,b]$上可导,且 $f'(x)>g'(x)$,$f(a)=g(a)$,则在$(a,b]$内有 $f(x)>g(x)$.

§2 柯西中值定理和不定式极限

一 柯西中值定理

现给出一个形式更一般的微分中值定理.

定理 6.5 (柯西中值定理) 设函数 f 和 g 满足

(i) 在$[a,b]$上都连续;

(ii) 在(a,b)上都可导;

(iii) $f'(x)$和$g'(x)$不同时为零;

(iv) $g(a)\neq g(b)$,

则存在$\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \tag{1}$$

证　作辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

易见F在$[a,b]$上满足罗尔定理条件,故存在$\xi\in(a,b)$,使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0.$$

因为$g'(\xi)\neq0$(否则由上式$f'(\xi)$也为零),所以可把上式改写成(1)式. □

柯西中值定理有着与前两个中值定理相类似的几何意义.只是现在要把f,g这两个函数写作以x为参量的参量方程

$$\begin{cases}u=g(x),\\ v=f(x).\end{cases}$$

在uOv平面上表示一段曲线(图6-5).由于(1)式右边的$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$表示连接该曲线两端的弦AB的斜率,而(1)式左边的

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right|_{x=\xi}$$

则表示该曲线上与$x=\xi$相对应的一点$C(g(\xi),f(\xi))$处的切线的斜率.因此(1)式即表示上述切线与弦AB互相平行.

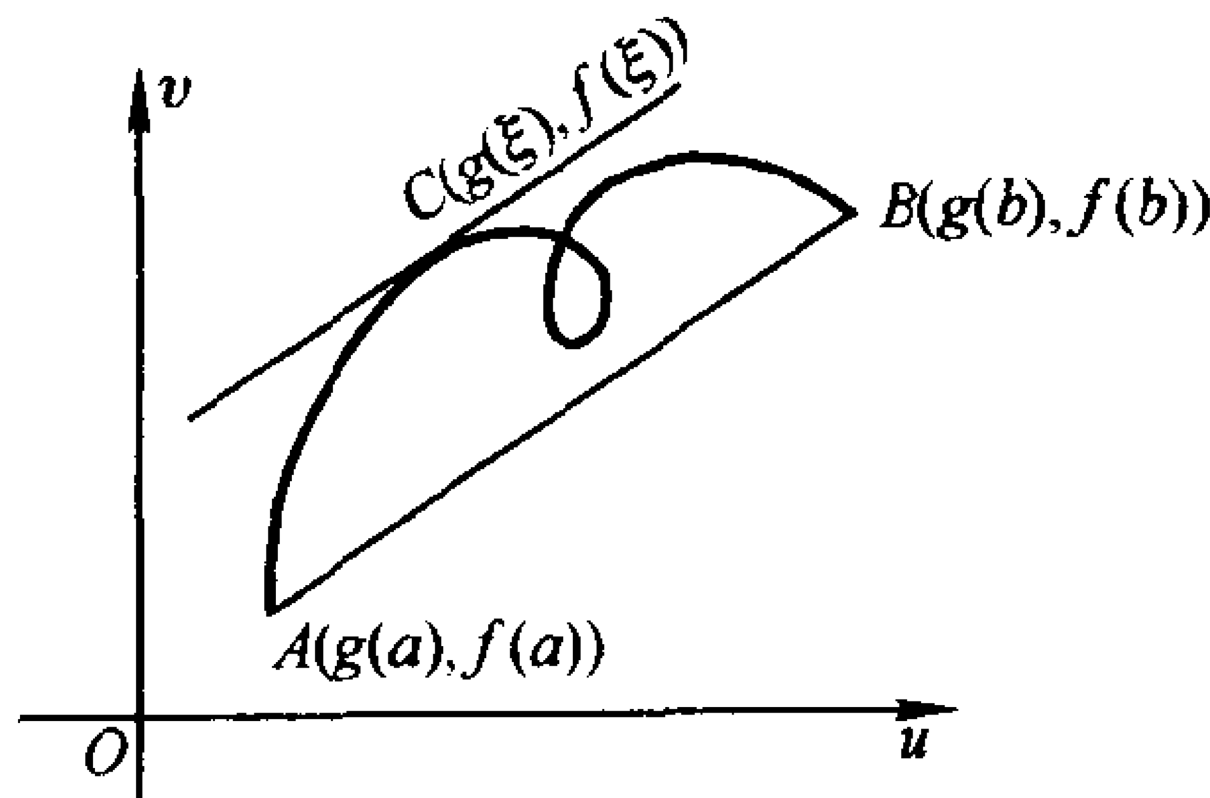


图　6-5

例1　设函数f在$[a,b]$ $(a>0)$上连续,在(a,b)内可导,则存在$\xi\in(a,b)$,使得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}. \tag{2}$$

证　设$g(x)=\ln x$,显然它在$[a,b]$上与$f(x)$一起满足柯西中值定理条件,于是存在$\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}.$$

上式整理后便得到所要证明的(2)式. □

二 不定式极限

我们在第三章学习无穷小(大)量阶的比较时,已经遇到过两个无穷小(大)量之比的极限.由于这种极限可能存在,也可能不存在,因此我们把两个无穷小量或两个无穷大量之比的极限统称为**不定式极限**,分别记为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型的不定式极限.现在我们将以导数为工具研究不定式极限,这个方法通常称为**洛必达(L'Hospital)法则**.柯西中值定理则是建立洛必达法则的理论依据.

1. $\frac{0}{0}$型不定式极限

定理 6.6 若函数 f 和 g 满足:

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$;

(ii) 在点 x_0 的某空心邻域 $U^\circ(x_0)$内两者都可导,且 $g'(x)\neq 0$;

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$($A$ 可为实数,也可为$\pm\infty$或∞),

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

证 补充定义 $f(x_0)=g(x_0)=0$,使得 f 与 g 在点 x_0 处连续.任取 $x\in U^\circ(x_0)$,在区间$[x_0,x]$(或$[x,x_0]$)上应用柯西中值定理,有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

即

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\quad(\xi\text{ 介于 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间}).$$

当令 $x\to x_0$ 时,也有 $\xi\to x_0$,故得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$ □

注意 若将定理 6.6 中 x 换成$x\to x_0^+$,$x\to x_0^-$,$x\to\pm\infty$,$x\to\infty$,只要相应地修正条件(ii)中的邻域,也可得到同样的结论.

例 2 求$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{\tan^2 x}$.

解 容易检验 $f(x)=1+\cos x$ 与$g(x)=\tan^2 x$ 在点$x_0=\pi$的邻域内满足定理 6.6 的条件(i)和(ii),又因

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{-\sin x}{2\tan x\sec^2 x}=-\lim_{x\to\pi}\frac{\cos^3 x}{2}=\frac{1}{2}$$

故由洛必达法则求得

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1}{2}.\qquad\square$$

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式极限，只要有可能，我们可再次用洛必达法则，即考察极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ 是否存在. 当然这时 f' 和 g' 在 x_0 的某邻域内必须满足定理 6.6 的条件.

例 3　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\ln(1+x^2)}$.

解　利用 $\ln(1+x^2)\sim x^2\,(x\to 0)$，则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+2x)^{-\frac{1}{2}}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+(1+2x)^{-\frac{3}{2}}}{2}=\frac{2}{2}=1.\qquad\square$$

例 4　求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{1-e^{\sqrt{x}}}$.

解　这是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式极限，可直接运用洛必达法则求解. 但若作适当变换，在计算上可方便些. 为此，令 $t=\sqrt{x}$，当 $x\to 0^+$ 时有 $t\to 0^+$，于是有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sqrt{x}}}{1-e^{\sqrt{x}}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{1-e^t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{-e^t}=-1.\qquad\square$$

2. $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限

定理 6.7　若函数 f 和 g 满足：

(i) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=\infty$；

(ii) 在 x_0 的某右邻域 $U_+^\circ(x_0)$ 内两者都可导，且 $g'(x)\neq 0$；

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 可为实数，也可为 $\pm\infty,\infty$），

则

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

证　先设 A 为实数，由(iii)，对任给的正数 ε，存在 $x_1\in U_+^\circ(x_0)$，对满足不等式 $x_0<x<x_1$ 的每一个 x 有

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

由条件(ii)，f 和 g 在区间 $[x, x_1]$ 上满足柯西中值定理条件，故必存在 $\xi \in (x, x_1) \subset (x_0, x_1)$，使得

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{g(x_1) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

由(3)，就有

$$\left|\frac{f(x_1) - f(x)}{g(x_1) - g(x)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

另一方面，

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_1) - f(x)}{g(x_1) - g(x)}\right| = \left|\frac{f(x_1) - f(x)}{g(x_1) - g(x)}\right| \left|\frac{\dfrac{g(x_1)}{g(x)} - 1}{\dfrac{f(x_1)}{f(x)} - 1} - 1\right|.$$

由(4)，上式右边的第一个因子是有界量；第二个因子对固定的 x_1，由条件(i)当 $x \to x_0^+$ 时是无穷小量. 因此存在正数 δ，使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta < x_1$ 时有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_1) - f(x)}{g(x_1) - g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

综合(4)，(5)，对一切满足不等式 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 的 x，有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \varepsilon.$$

这就证明了

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

类似地可以证明当 $A = \pm\infty$ 或 ∞ 的情形，这里就不再赘述了. □

定理 6.7 对于 $x \to x_0^-$，$x \to x_0$ 或 $x \to \pm\infty$，$x \to \infty$ 等情形也有相同的结论.

如果 f'、g'，f''、g'' 满足条件，我们可以再次应用定理 6.7.

例 5 求 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

解 由定理 6.7，有

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0. \quad \square$$

例 6 求 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{3x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{6x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{6} = +\infty.$ □

注 1 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$不存在,并不能说明$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$不存在(试想,这是为什么?).

注 2 不能对任何比式极限都按洛必达法则求解.首先必须注意它是不是不定式极限,其次是否满足洛必达法则的其他条件.

下面这个简单的极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=1$$

虽然是$\dfrac{\infty}{\infty}$型,但若不顾条件随便使用洛必达法则:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{1},$$

就会因右式的极限不存在而推出原极限不存在的错误结论.

3. 其他类型不定式极限

不定式极限还有$0\cdot\infty,1^{\infty},0^0,\infty^0,\infty-\infty$等类型.经过简单变换,它们一般均可化为$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型的极限.

例 7 求$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x$.

解 这是一个$0\cdot\infty$型不定式极限.用恒等变形$x\ln x=\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$将它转化为$\dfrac{\infty}{\infty}$型的不定式极限,并应用洛必达法则得到

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0.$$ □

例 8 求$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 这是一个1^{∞}型不定式极限.作恒等变形

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{x^2}\ln\cos x},$$

其指数部分的极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\ln\cos x$是$\dfrac{0}{0}$型不定式极限,可先求得

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\tan x}{2x}=-\frac{1}{2},$$

从而得到

$$\lim_{x\to0}(\cos)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$ □

例 9 求 $\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)^{\frac{k}{1+\ln x}}$ （k 为常数）.

解 这是一个 0^0 型不定式极限，按上例变形的方法，先求 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限：

$$\lim_{x\to0^+}\frac{k\ln\sin x}{1+\ln x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{k\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}k\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}=k,$$

然后得到

$$\lim_{x\to0^+}(\sin x)^{\frac{k}{1+\ln x}}=\mathrm{e}^k\quad(k\neq0).$$

当 $k=0$ 时上面所得的结果显然成立. □

例 10 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{\ln x}}$.

解 这是一个 ∞^0 型不定式极限. 类似地先求其对数的极限 $\left(\frac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{x}}=1,$$

于是有

$$\lim_{x\to\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{\ln x}}=\mathrm{e}.$$ □

例 11 求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

解 这是一个 $\infty-\infty$ 型不定式极限，通分后化为 $\frac{0}{0}$ 型的极限，即

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}+\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{x-1+x\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{2+\ln x}=-\frac{1}{2}.$$ □

例 12 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

且已知 $g(0)=g'(0)=0, g''(0)=3$，试求 $f'(0)$.

解 因为

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{g(x)}{x^2},$$

所以由洛必达法则得

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)}{2x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\frac{1}{2}g''(0)=\frac{3}{2}.\qquad\square$$

问题两则：

(1) 上例解法中，已知条件 $g(0)=0$ 用在何处？

(2) 如果用两次洛必达法则，得到

$$f'(0)=\cdots=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)}{2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{g''(x)}{2}=\frac{1}{2}g''(0)=\frac{3}{2}.$$

错在何处？

最后指出，对于数列的不定式极限，可利用函数极限的归结原则，通过先求相应形式的函数极限而得到结果.

例 13　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$.

解　先求函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^x$（$1^\infty$ 型）. 类似于例 8，取对数后的极限为

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x+x^2)-\ln x^2}{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x+1}{1+x+x^2}-\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{x^2+x+1}=1,$$

所以由归结原则可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^x=\mathrm{e}.\qquad\square$$

注意　不能在数列形式下直接用洛必达法则，因为对于离散变量 $n\in\mathbf{N}_+$ 是无法求导数的.

习　　题

1. 试问函数 $f(x)=x^2,g(x)=x^3$ 在区间 $[-1,1]$ 上能否应用柯西中值定理得到相应的

结论,为什么?

2. 设函数 f 在$[a,b]$上可导. 证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

3. 设函数 f 在点 a 处具有连续的二阶导数. 证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a).$$

4. 设 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$. 证明存在 $\theta\in(\alpha,\beta)$,使得

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\cot\theta.$$

5. 求下列不定式极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x-6}{\sec x+5}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}(\tan x)^{\sin x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$;

(10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$;

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

---

6. 设函数 f 在点 a 的某个邻域具有二阶导数. 证明:对充分小的 h,存在 $\theta,0<\theta<1$,使得

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\frac{f''(a+\theta h)+f''(a-\theta h)}{2}.$$

7. 求下列不定式极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)^{(1+x)}}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

8. 设 $f(0)=0$,f'在原点的某邻域内连续,且 $f'(0)\neq 0$. 证明:

$$\lim_{x\to 0^+}x^{f(x)}=1.$$

9. 证明定理 6.6 中 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ 情形时的洛必达法则.

10. 证明:$f(x)=x^3e^{-x^2}$为有界函数.

§3 泰勒公式

多项式函数是各类函数中最简单的一种,用多项式逼近函数是近似计算和理论分析的一个重要内容.

一 带有佩亚诺型余项的泰勒公式

我们在学习导数和微分概念时已经知道,如果函数 f 在点 x_0 可导,则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0).$$

即在点 x_0 附近,用一次多项式 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$逼近函数 $f(x)$时,其误差为$(x-x_0)$的高阶无穷小量.然而在很多场合,取一次多项式逼近是不够的,往往需要用二次或高于二次的多项式去逼近,并要求误差为 $o((x-x_0)^n)$,其中 n 为多项式的次数.为此,我们考察任一 n 次多项式

$$p_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n. \qquad (1)$$

逐次求它在点 x_0 处的各阶导数,得到

$$p_n(x_0)=a_0, p_n'(x_0)=a_1, p_n''(x_0)=2!a_2,\cdots,p_n^{(n)}(x_0)=n!a_n,$$

即

$$a_0=p_n(x_0), a_1=\frac{p_n'(x_0)}{1!}, a_2=\frac{p_n''(x_0)}{2!},\cdots,a_n=\frac{p_n^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

由此可见,多项式 $p_n(x)$的各项系数由其在点 x_0 的各阶导数值所唯一确定.

对于一般函数 f,设它在点 x_0 存在直到 n 阶的导数.由这些导数构造一个 n 次多项式

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad (2)$$

称为函数 f 在点x_0 处的**泰勒**(Taylor)**多项式**,$T_n(x)$的各项系数$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$($k=1,2,\cdots,n$)称为**泰勒系数**.由上面对多项式系数的讨论,易知 $f(x)$与其泰勒多项式 $T_n(x)$在点 x_0 有相同的函数值和相同的直至 n 阶导数值,即

$$f^{(k)}(x_0)=T_n^{(k)}(x_0), k=0,1,2,\cdots,n. \qquad (3)$$

下面将要证明 $f(x)-T_n(x)=o((x-x_0)^n)$,即以(2)式所示的泰勒多项式逼近 $f(x)$时,其误差为关于$(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小量.

定理 6.8 若函数 f 在点x_0 存在直至 n 阶导数,则有 $f(x)=T_n(x)+$

$o((x-x_0)^n)$,即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n). \tag{4}$$

证 设

$$R_n(x)=f(x)-T_n(x),Q_n(x)=(x-x_0)^n,$$

现在只要证

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{Q_n(x)}=0.$$

由关系式(3)可知,

$$R_n(x_0)=R'_n(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0,$$

并易知

$$Q_n(x_0)=Q'_n(x_0)=\cdots=Q_n^{(n-1)}(x_0)=0,Q_n^{(n)}(x_0)=n!.$$

因为 $f^{(n)}(x_0)$存在,所以在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$内 f 存在 $n-1$ 阶导函数 $f(x)$. 于是,当 $x\in U^\circ(x_0)$且 $x\to x_0$ 时,允许接连使用洛必达法则 $n-1$ 次,得到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{Q_n(x)}&=\lim_{x\to x_0}\frac{R'_n(x)}{Q'_n(x)}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{Q_n^{(n-1)}(x)}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n(n-1)\cdots 2(x-x_0)}\\&=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^{(n)}(x_0)\right]\\&=0.\end{aligned}$$

□

定理所证的(4)式称为函数 f 在点 x_0 处的**泰勒公式**,$R_n(x)=f(x)-T_n(x)$称为**泰勒公式的余项**,形如 $o((x-x_0)^n)$的余项称为**佩亚诺(Peano)型余项**.所以(4)式又称为**带有佩亚诺型余项的泰勒公式**.

注 1 若 $f(x)$在点 x_0 附近满足

$$f(x)=p_n(x)+o((x-x_0)^n), \tag{5}$$

其中 $p_n(x)$为(1)式所示的 n 阶多项式,这时并不意味着 $p_n(x)$必定就是 f 的泰勒多项式 $T_n(x)$. 例如

$$f(x)=x^{n+1}D(x),n\in\mathbf{N}_+,$$

其中 $D(x)$为狄利克雷函数.不难知道,$f(x)$在 $x=0$ 处除了 $f'(0)=0$ 外不再存在其他任何阶导数(为什么?). 因此无法构造出一个高于一次的泰勒多项式

$T_n(x)$,但因

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}xD(x)=0,$$

即 $f(x)=o(x^n)$,所以若取

$$p_n(x)=o+o\cdot x+o\cdot x^2+\cdots+o\cdot x^n\equiv 0$$

时,(5)式对任何 $n\in\mathbf{N}_+$ 恒成立.

注 2 满足(5)式要求(即带有佩亚诺型误差)的 n 次逼近多项式 $p_n(x)$ 是唯一的.

综合定理 6.8 和上述注 2,若函数 f 满足定理 6.8 的条件时,满足(5)式要求的逼近多项式 $p_n(x)$ 只可能是 f 的泰勒多项式 $T_n(x)$.

以后用得较多的是泰勒公式(4)在 $x_0=0$ 时的特殊形式:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).\qquad(6)$$

它也称为**(带有佩亚诺余项的)麦克劳林(Maclaurin)公式**.

例 1 验证下列函数的麦克劳林公式:

(1) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$;

(2) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m})$;

(3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m+1})$;

(4) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$;

(5) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\alpha^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+$ $o(x^n)$;

(6) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$.

证 这里只验证其中两个公式,其余请读者自行证明.

(2) 设 $f(x)=\sin x$,由于 $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$,因此

$$f^{(2k)}(0)=0,f^{(2k-1)}(0)=(-1)^{k-1},k=1,2,\cdots,n.$$

把它们代入公式(6),便得到 $\sin x$ 的麦克劳林公式.需要说明的是:由于这里有 $T_{2m-1}(x)=T_{2m}(x)$,因此公式中的余项可以写作 $o(x^{2m+1})$,也可以写作 $o(x^{2m})$.关于公式 3)中的余项可作同样说明.

(4) 设 $f(x)=\ln(1+x)$.由于 $f'(x)=\frac{1}{1+x},\cdots,f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(k-$

1)! $(1+x)^{-k}, k=1,2,\cdots,n$,因此

$$f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!, k=1,2,\cdots,n.$$

把它们代入公式(6),便得 $\ln(1+x)$的麦克劳林公式. □

利用上述麦克劳林公式,可间接求得其他一些函数的麦克劳林公式或泰勒公式,还可用来求某种类型的极限.

例2 写出 $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$的麦克劳林公式,并求 $f^{(98)}(0)$与 $f^{(99)}(0)$.

解 用$\left(-\frac{x^2}{2}\right)$替换公式1)中的 x,便得

$$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{2^n n!}+o(x^{2n}).$$

根据定理6.8注2,知道上式即为所求的麦克劳林公式.

由泰勒公式系数的定义,在上述 $f(x)$的麦克劳林公式中,x^{98}与 x^{99}的系数分别为

$$\frac{1}{98!}f^{(98)}(0)=(-1)^{49}\frac{1}{2^{49}\cdot 49!},\frac{1}{99!}f^{(99)}(0)=0.$$

由此得到 $f^{(98)}(0)=-\frac{98!}{2^{49}\cdot 49!}, f^{(99)}(0)=0$.

例3 求 $\ln x$ 在$x=2$ 处的泰勒公式.

解 由于 $\ln x=\ln[2+(x-2)]=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)$,因此

$$\begin{aligned}\ln x&=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2\cdot 2^2}(x-2)^2+\cdots\\&\quad+(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}(x-1)^n+o((x-2)^n).\end{aligned}$$

根据与例1的相同的理由,上式即为所求的泰勒公式. □

例4 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解 本题可用洛必达法则求解(较繁琐),在这里可应用泰勒公式求解.考虑到极限式的分母为 x^4,我们用麦克劳林公式表示极限的分子(取 $n=4$,并利用例2):

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5),$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^5),$$

$$\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=-\frac{x^4}{12}+o(x^5).$$

因而求得

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^5)}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$ □

二 带有拉格朗日型余项的泰勒公式

上面我们从微分近似出发,推广得到用 n 次多项式逼近函数的泰勒公式(4).它的佩亚诺型余项只是**定性**地告诉我们:当 $x\to x_0$ 时,逼近误差是较 $(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小量.现在我们将泰勒公式构造一个**定量**形式的余项,以便于对逼近误差进行具体的计算或估计.

定理 6.9 (泰勒定理) 若函数 f 在 $[a,b]$ 上存在直至 n 阶的连续导函数,在 (a,b) 内存在 $(n+1)$ 阶导函数,则对任意给定的 $x,x_0\in[a,b]$,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{7}$$

证 作辅助函数

$$F(t)=f(x)-\left[f(t)+f'(t)(x-t)+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right],$$

$$G(t)=(x-t)^{n+1}.$$

所要证明的(7)式即为

$$F(x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}G(x_0) \text{ 或 } \frac{F(x_0)}{G(x_0)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

不妨设 $x_0<x$,则 $F(t)$ 与 $G(t)$ 在 $[x_0,x]$ 上连续,在 (x_0,x) 内可导,且

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n,$$

$$G'(t)=-(n+1)(x-t)^n\neq0.$$

又因 $F(x)=G(x)=0$,所以由柯西中值定理证得

$$\frac{F(x_0)}{G(x_0)}=\frac{F(x_0)-F(x)}{G(x_0)-G(x)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

其中 $\xi\in(x_0,x)\subset(a,b)$. □

(7) 式同样称为**泰勒公式**,它的余项为

$$R_n(x)=f(x)-T_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

$$\xi=x_0+\theta(x-x_0)\quad(0<\theta<1),$$

称为**拉格朗日型余项**. 所以(7)式又称为**带有拉格朗日型余项的泰勒公式**.

注意到 $n=0$ 时,(7)式即为拉格朗日中值公式

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0).$$

所以,泰勒定理可以看作拉格朗日中值定理的推广.

当 $x_0=0$ 时,得到泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1). \tag{8}$$

(8)式也称为(**带有拉格朗日余项的**)**麦克劳林公式**.

例 5 把例1中六个麦克劳林公式改写为带有拉格朗日型余项的形式.

解 (1) $f(x)=\mathrm{e}^x$,由 $f^{(n+1)}(x)=\mathrm{e}^x$,得到

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$
$$0<\theta<1, x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) $f(x)=\sin x$,由 $f^{(2m+1)}(x)=\sin\left(x+\frac{2m+1}{2}\pi\right)=(-1)^m\cos x$,

得到

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$
$$+(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}, 0<\theta<1, x\in(-\infty,+\infty).$$

(3) 类似于 $\sin x$,可得

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}$$
$$+(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2}, 0<\theta<1, x\in(-\infty,+\infty).$$

(4) $f(x)=\ln(1+x)$,由 $f^{(n+1)}(x)=(-1)^n n!\,(1+x)^{-n-1}$,得到

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$
$$+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, 0<\theta<1, x>-1.$$

(5) $f(x)=(1+x)^\alpha$,由 $f^{(n+1)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}$,

得到

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1},$$

$$0<\theta<1, x>-1.$$

(6) $f(x)=\frac{1}{1-x}$,由 $f^{(n+1)}(x)=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$,得到

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}},$$

$$0<\theta<1, x<1.$$ □

三 在近似计算上的应用

这里只讨论泰勒公式在近似计算上的应用. 在§4, §5 两节里还要借助泰勒公式这一工具去研究函数的极值与凸性.

例 6 (1) 计算 e 的值,使其误差不超过 10^{-6};

(2) 证明数 e 为无理数.

解 (1) 由例 5 公式(1),当 $x=1$ 时有

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}\quad(0<\theta<1).\tag{9}$$

故 $R_n(1)=\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$,当 $n=9$ 时,便有

$$R_9(1)<\frac{3}{10!}=\frac{3}{3\ 628\ 800}<10^{-6}.$$

从而略去 $R_9(1)$而求得 e 的近似值为

$$e\approx1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{9!}\approx2.718\ 285.$$

(2) 由(9)式得

$$n!e-(n!+n!+3\cdot4\cdots n+\cdots+n+1)=\frac{e^{\theta}}{n+1}.\tag{10}$$

倘若 $e=\frac{p}{q}$(p,q 为正整数),则当 $n>q$ 时,$n!$ e 为正整数,从而(10)式左边为整数. 因为$\frac{e^{\theta}}{n+1}<\frac{e}{n+1}<\frac{3}{n+1}$,所以当 $n\geqslant2$ 时右边为非整数,矛盾. 从而 e 只能是无理数.

例 7 用泰勒多项式逼近正弦函数 $\sin x$(例 5 中的(2)式),要求误差不超过 10^{-3}. 试以 $m=1$ 和 $m=2$ 两种情形分别讨论 x 的取值范围.

(i) $m=1$ 时,$\sin x\approx x$,使其误差满足

$$|R_2(x)|=\left|\frac{\cos\theta x}{3!}x^3\right|\leqslant\frac{|x|^3}{6}<10^{-3}.$$

只须$|x|<0.181\ 7$(弧度),即大约在原点左右 10°24′40″范围内以 x 近似 $\sin x$,其误差不超过 10^{-3}.

(ii) $m=2$ 时，$\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$，使其误差满足：

$$|R_4(x)|=\left|\frac{\cos\theta x}{5!}x^5\right|\leqslant\frac{|x|^5}{5!}<10^{-3}.$$

只需$|x|<0.654\ 3$(弧度)，即大约在原点左右 37°29′38″范围内，上述三次多项式逼近的误差不超过 10^{-3}. □

如果进一步用更高次的多项式来逼近 $\sin x$，x 能在更大范围内满足同一误差. 图 6-6 就是正弦函数与其泰勒多项式($m=1,2,3,4,5$)在原点附近的逼近差异情况.

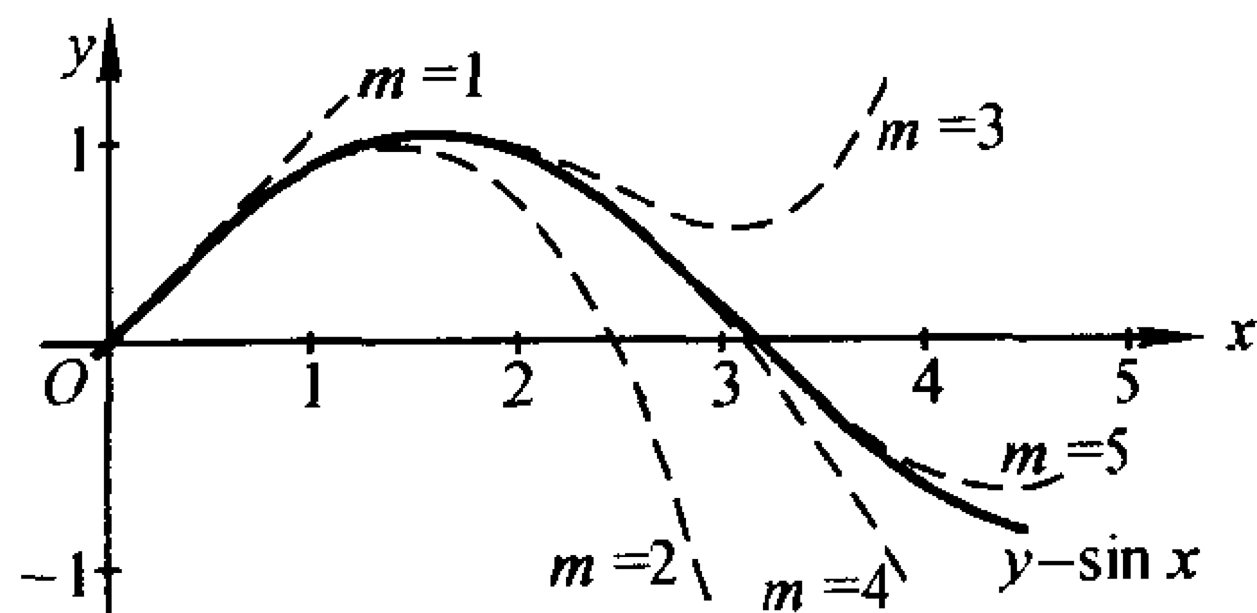


图 6-6

习 题

1. 求下列函数带佩亚诺型的麦克劳林公式

(1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$；

(2) $f(x)=\arctan x$ 到含 x^5 的项；

(3) $f(x)=\tan x$ 到含 x^5 的项.

2. 按例 4 的方法求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)$.

3. 求下列函数在指定点处带拉格朗日余项的泰勒公式：

(1) $f(x)=x^3+4x^2+5$，在 $x=1$ 处；

(2) $f(x)=\frac{1}{1+x}$，在 $x=0$ 处.

---

4. 估计下列近似公式的绝对误差：

(1) $\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$，当$|x|\leqslant\frac{1}{2}$；

(2) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}, x\in[0,1]$.

5. 计算:(1) 数 e 准确到 10^{-9};

(2) lg11 准确到 10^{-5}.

§4　函数的极值与最大(小)值

一　极值判别

函数的极值不仅在实际问题中占有重要的地位,而且也是函数性态的一个重要特征.

费马定理(定理 5.3)已经告诉我们,若函数 f 在点 x_0 可导,且 x_0 为 f 的极值点,则 $f'(x_0)=0$.这就是说可导函数在点 x_0 取极值的必要条件是 $f'(x_0)=0$.

下面讨论充分条件.

定理 6.10　(极值的第一充分条件)　设 f 在点 x_0 连续,在某邻域 $U^\circ(x_0;\delta)$ 内可导.

(i) 若当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时 $f'(x)\leqslant 0$,当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时 $f'(x)\geqslant 0$,则 f 在点 x_0 取得极小值.

(ii) 若当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时 $f'(x)\geqslant 0$,当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时 $f'(x)\leqslant 0$,则 f 在点 x_0 取得极大值.

证　下面只证(ii),(i)的证明可类似地进行.

由定理的条件及定理 6.3,f 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内递增,在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内递减,又由 f 在 x_0 处连续,故对任意 $x\in U(x_0;\delta)$,恒有

$$f(x)\leqslant f(x_0).$$

即 f 在 x_0 取得极大值.　□

若 f 是二阶可导函数,则有如下判别极值定理.

定理 6.11　(极值的第二充分条件)　设 f 在 x_0 的某邻域 $U(x_0;\delta)$ 内一阶可导,在 $x=x_0$ 处二阶可导,且 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$.

(i) 若 $f''(x_0)<0$,则 f 在 x_0 取得极大值.

(ii) 若 $f''(x_0)>0$,则 f 在 x_0 取得极小值.

证　由条件,可得 f 在 x_0 处的二阶泰勒公式

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\\&\quad+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2).\end{aligned}$$

由于 $f'(x_0)=0$，因此

$$f(x)-f(x_0)=\left[\frac{f''(x_0)}{2}+o(1)\right](x-x_0)^2. \tag{1}$$

又因 $f''(x_0)\neq 0$，故存在正数 $\delta'\leqslant\delta$，当 $x\in U(x_0;\delta')$ 时，$\frac{1}{2}f''(x_0)$ 与 $\frac{1}{2}f''(x_0)+o(1)$ 同号. 所以，当 $f''(x_0)<0$ 时，(1)式取负值，从而对任意 $x\in U^\circ(x_0;\delta')$ 有

$$f(x)-f(x_0)<0,$$

即 f 在 x_0 取极大值. 同样对 $f''(x_0)>0$，可得 f 在点 x_0 取极小值. □

例 1 求 $f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值点与极值.

解 $f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}=2x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且当 $x\neq 0$ 时，有

$$f'(x)=\frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{3}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}.$$

易见，$x=1$ 为 f 的稳定点，$x=0$ 为 f 的不可导点. 这两点是否是极值点，需作进一步讨论. 现列表如下(表中↗表示递增，↘表示递减)：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	不存在	—	0	+
y	↗	0	↘	-3	↗

由上表可见：点 $x=0$ 为 f 的极大值点，极大值 $f(0)=0$；$x=1$ 为 f 的极小值点，极小值 $f(1)=-3$(图 6-7). □

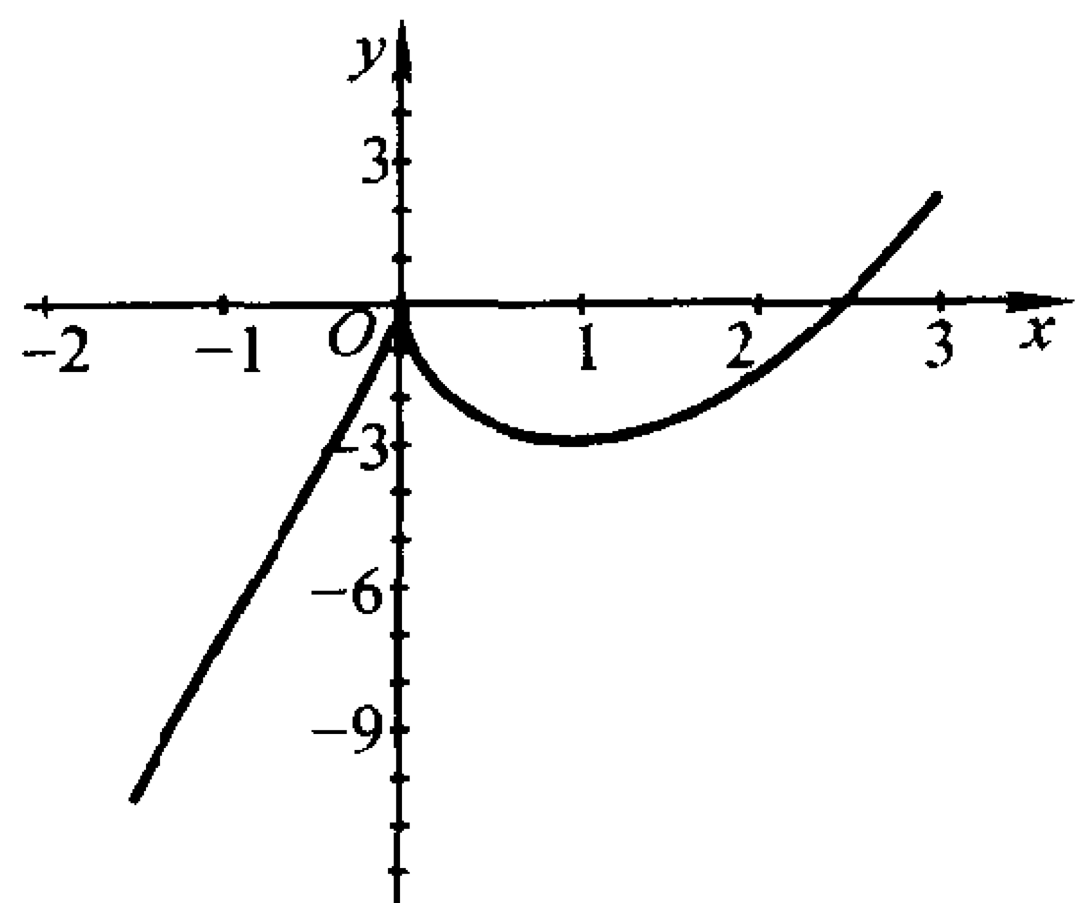


图 6-7

例 2 求 $f(x)=x^2+\frac{432}{x}$ 的极值点与极值.

解 当 $x\neq 0$ 时，

$$f'(x)=2x-\frac{432}{x^2}=\frac{2x^3-432}{x^2}.$$

令 $f'(x)=0$，求得稳定点 $x=6$. 又因

$$f''(6)=\left(2+\frac{864}{x^3}\right)_{x=6}=6>0,$$

依定理 6.11，$x=6$ 为 f 的极小值点，极小值 $f(6)=108$. □

对于应用二阶导数无法判别的问题，可借助更高阶的导数来判别.

定理 6.12 (极值的第三充分条件) 设 f 在 x_0 的某邻域内存在直到 $n-$

1 阶导函数,在 x_0 处 n 阶可导,且 $f^{(k)}(x_0)=0\ (k=1,2,\cdots,n-1)$,$f^{(n)}(x_0)\neq 0$,则

(i) 当 n 为偶数时,f 在 x_0 取得极值,且当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时取极大值,$f^{(n)}(x_0)>0$ 时取极小值.

(ii) 当 n 为奇数时,f 在 x_0 处不取极值.

该定理的证明类似于定理 6.11,我们将它留给读者.

例 3　试求函数 $x^4(x-1)^3$ 的极值.

解　由于 $f'(x)=x^3(x-1)^2(7x-4)$,因此 $x=0,1,\frac{4}{7}$ 是函数的三个稳定点. f 的二阶导数为

$$f''(x)=6x^2(x-1)(7x^2-8x+2),$$

由此得,$f''(0)=f''(1)=0$ 及 $f''\left(\frac{4}{7}\right)>0$. 所以 $f(x)$ 在 $x=\frac{4}{7}$ 时取得极小值. 求三阶导数

$$f'''(x)=6x(35x^3-60x^2+30x-4),$$

有 $f'''(0)=0$,$f'''(1)>0$. 由于 $n=3$ 为奇数,由定理 6.12 知 f 在 $x=1$ 不取极值. 再求 f 的四阶导数

$$f^{(4)}(x)=24(35x^3-45x^2+15x-1),$$

有 $f^{(4)}(0)<0$. 因为 $n=4$ 为偶数,故 f 在 $x=0$ 取得极大值.

综上所述,$f(0)=0$ 为极大值,

$$f\left(\frac{4}{7}\right)=-\left(\frac{4}{7}\right)^4\left(\frac{3}{7}\right)^3=-\frac{6\,912}{823\,543}$$

为极小值. □

注　定理 6.12 仍是判定极值的充分条件. 读者可考察函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

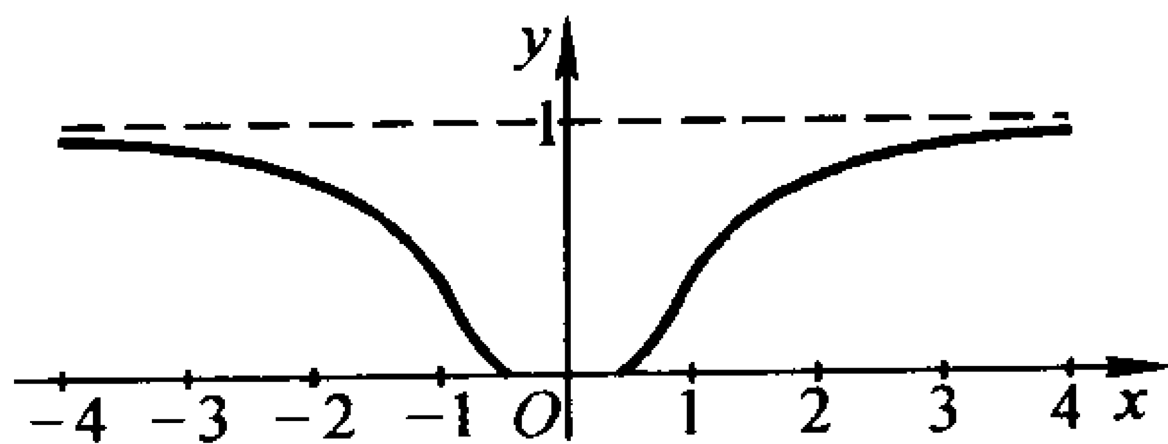


图　6-8

很显然,它在 $x=0$ 处取极小值 0. 但因 $f^{(k)}(0)=0$,$k=1,2,\cdots$. 所以无法用定理 6.14 对它作出判别.

二　最大值与最小值

由连续函数在 $[a,b]$ 上的性质,若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 f 在 $[a,b]$ 上一定有最大、最小值. 这就为我们求连续函数的最大、最小值提供了理论保证. 本段将讨论怎样求出这个最大(小)值.

若函数 f 的最大(小)值点 x_0 在区间 (a,b) 内,则 x_0 必定是 f 的极大(小)值点.又若 f 在 x_0 可导,则 x_0 还是一个稳定点.所以我们只要比较 f 在所有稳定点、不可导点和区间端点上的函数值,就能从中找到 f 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值.下面举例说明这个求解过程.

例4 求函数 $f(x)=|2x^3-9x^2+12x|$ 在闭区间 $\left[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}\right]$ 上的最大值与最小值.

解 函数 f 在闭区间 $\left[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}\right]$ 上连续,故必存在最大最小值.由于

$$\begin{aligned} f(x) &= |2x^3-9x^2+12x| \\ &= |x(2x^2-9x+12)| \\ &= \begin{cases} -x(2x^2-9x+12), & -\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant 0, \\ x(2x^2-9x+12), & 0<x\leqslant\frac{5}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} -6x^2+18x-12, \\ 6x^2-18x+12 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -6(x-1)(x-2), & -\frac{1}{4}\leqslant x<0, \\ 6(x-1)(x-2), & 0<x\leqslant\frac{5}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

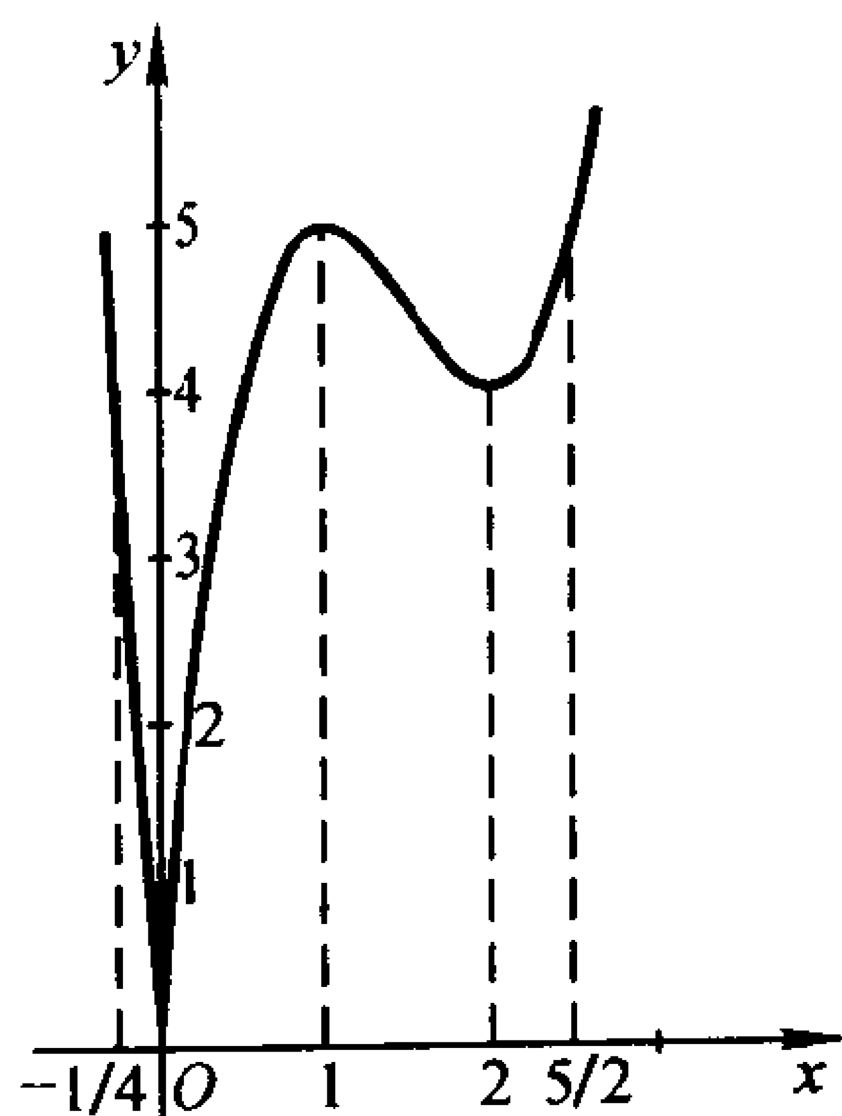


图 6-9

又因 $f'(0-0)=-12, f'(0+0)=12$,所以由导数极限定理推知函数在 $x=0$ 处不可导.求出函数 f 在稳定点 $x=1,2$,不可导点 $x=0$,以及端点 $x=-\frac{1}{4},\frac{5}{2}$ 的函数值

$$f(1)=5, f(2)=4, f(0)=0, f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{115}{32}, f\left(\frac{5}{2}\right)=5.$$

所以函数 f 在 $x=0$ 处取最小值 0,在 $x=1$ 和 $x=\frac{5}{2}$ 处取得最大值 5(图 6-9). □

在生产实践和科学实验中,我们常会遇到求函数的最大值或最小值问题.

例5 一艘轮船在航行中的燃料费和它的速度的立方成正比.已知当速度为 10(km/h),燃料费为每小时 6 元,而其他与速度无关的费用为每小时 96 元.问轮船的速度为多少时,每航行 1 km 所消耗的费用最小?

解 设船速为 x(km/h),据题意每航行 1 km 的耗费为

$$y=\frac{1}{x}(kx^3+96).$$

由已知当 $x=10$ 时，$k\cdot10^3=6$，故得比例系数 $k=0.006$. 所以有

$$y=\frac{1}{x}(0.006x^3+96),x\in(0,+\infty).$$

令

$$y'=\frac{0.012}{x^2}(x^3-8\,000)=0,$$

求得稳定点 $x=20$. 由极值第一充分条件检验得 $x=20$ 是极小值点. 由于在 $(0,+\infty)$ 上该函数处处可导，且只有唯一的极值点，当它为极小值点时必为最小值点. 所以求得当船速为 20(km/h)时，每航行 1 km 的耗费为最少，其值为 $y_{\min}=0.006\times20^2+\frac{96}{20}=7.2$(元). □

例 6　如图6－10所示，剪去正方形四角同样大小的正方形后制成一个无盖盒子，问剪去小方块的边长为何值时，可使盒子的容积最大.

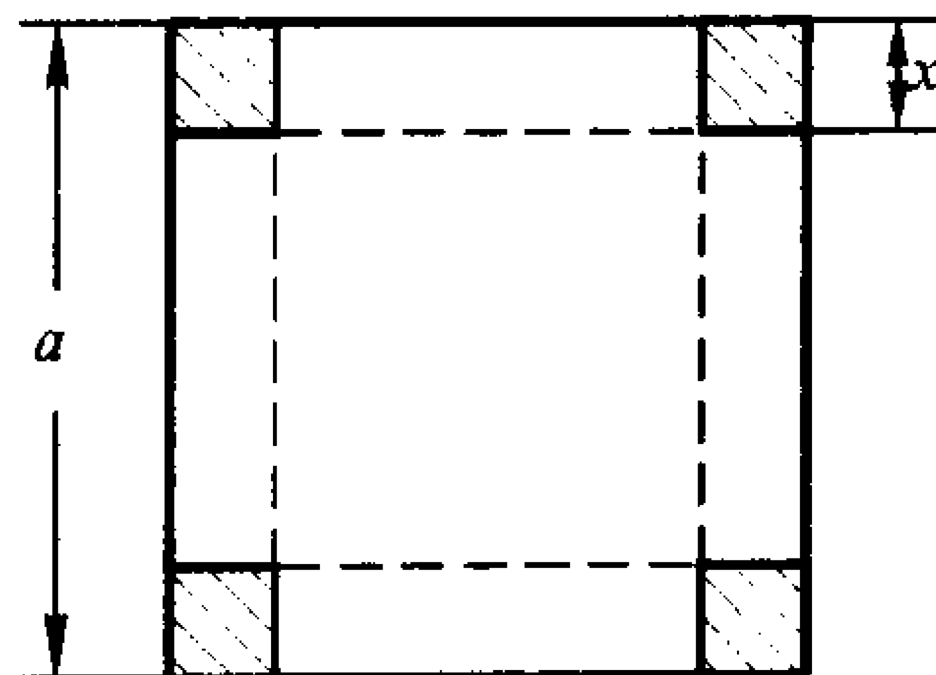


图　6－10

解　设每个小方块边长为 x，则盒子的容积为

$$V(x)=x(a-2x)^2,x\in\left[0,\frac{a}{2}\right].$$

令

$$V'(x)=6\left(x-\frac{a}{6}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right)=0,$$

在 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 内解得稳定点 $x=\frac{a}{6}$，并由 $V''\left(\frac{a}{6}\right)=-4a<0$ 知道 $V\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{2a^3}{27}$ 为极大值. 由于 $V(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 内只有唯一一个极值点，且为极大值点，因此该极大值就是所求的最大值. 即正方形四个角各剪去一块边长为 $\frac{a}{6}$ 的小正方形后，能做容积最大的盒子. □

习　　题

1. 求下列函数的极值：

　(1) $f(x)=2x^3-x^4$；　　(2) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$；

　(3) $f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$；　　(4) $f(x)=\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

2. 设

$$f(x)=\begin{cases}x^4\sin^2\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

(1) 证明：$x=0$ 是极小值点；

(2) 说明 f 的极小值点 $x=0$ 处是否满足极值的第一充分条件或第二充分条件.

3. 证明：若函数 f 在点 x_0 处有 $f'_+(x_0)<0$ (>0) $f'_-(x_0)>0$ (<0)，则 x_0 为 f 的极大(小)值点.

4. 求下列函数在给定区间上的最大最小值：

(1) $y=x^5-5x^4+5x^3+1,[-1,2]$；

(2) $y=2\tan x-\tan^2 x,\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$；

(3) $y=\sqrt{x}\ln x,(0,+\infty)$.

5. 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，并且在 I 上仅有唯一的极值点 x_0. 证明：若 x_0 是 f 的极大(小)值点，则 x_0 必是 $f(x)$ 在 I 上的最大(小)值点.

6. 把长为 l 的线段截为两段，问怎样截法能使以这两段线为边所组成的矩形的面积最大?

7. 有一个无盖的圆柱形容器，当给定体积为 V 时，要使容器的表面积为最小，问底的半径与容器高的比例应该怎样?

8. 设用某仪器进行测量时，读得 n 次实验数据为 $a_1a_2,\cdots,a_n$. 问以怎样的数值 x 表达所要测量的真值，才能使它与这 n 个数之差的平方和为最小.

9. 求一正数 a，使它与其倒数之和最小.

---

10. 求下列函数的极值：

(1) $f(x)=|x(x^2-1)|$；

(2) $f(x)=\dfrac{x(x^2+1)}{x^4-x^2+1}$；

(3) $f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$.

11. 设 $f(x)=a\ln x+bx^2+x$ 在 $x_1=1,x_2=2$ 处都取得极值，试求 a 与 b；并问这时 f 在 x_1 与 x_2 是取得极大值还是极小值?

12. 在抛物线 $y^2=2px$ 哪一点的法线被抛物线所截之线段为最短.

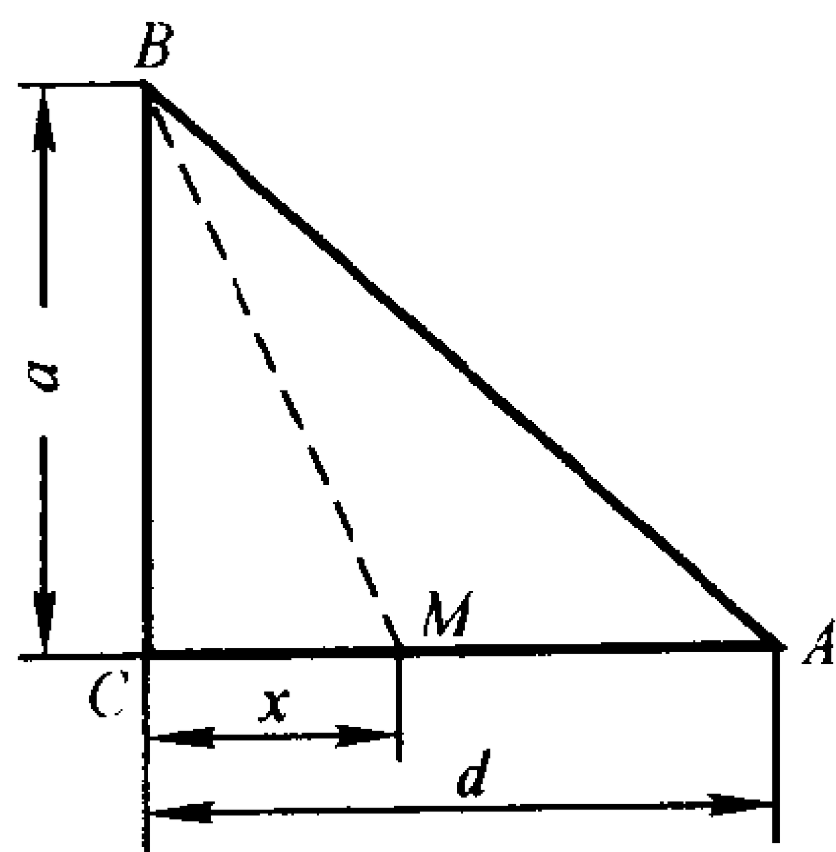


图 6-11

13. 要把货物从运河边上 A 城运往与运河相距为 $BC=a$ km 的 B 城(见图 6-11)，轮船运费的单价是 α 元/km，火车运费的单价是 β 元/km$(\beta>\alpha)$，试求运河边上的一点 M，修建铁路 MB，使总运费最省.

§5 函数的凸性与拐点

读者已经熟悉函数 $f(x)=x^2$ 和 $f(x)=\sqrt{x}$的图象.它们不同的特点是:曲线$y=x^2$ 上任意两点间的弧段总在这两点连线的下方;而曲线 $y=\sqrt{x}$则相反,任意两点间的弧段总在这两点连线的上方.我们把具有前一种特性的曲线称为凸的,相应的函数称为凸函数;后一种曲线称为凹的,相应的函数称为凹函数.

定义 1 设 f 为定义在区间 I 上的函数,若对 I 上的任意两点 x_1,x_2 和任意实数 $\lambda\in(0,1)$总有

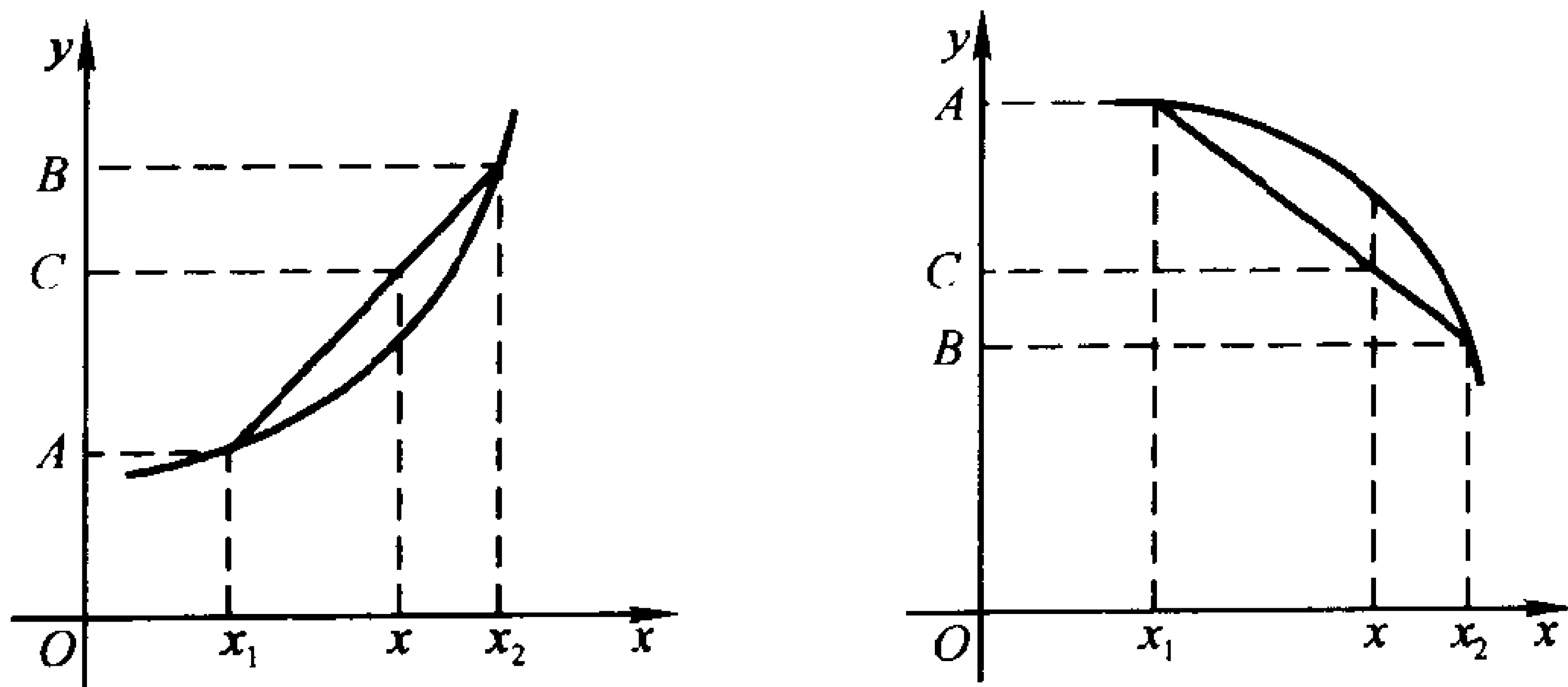
$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),\tag{1}$$

则称 f 为 I 上的**凸函数**.反之,如果总有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),\tag{2}$$

则称 f 为 I 上的**凹函数**.

如果(1)、(2)中的不等式改为严格不等式,则相应的函数称为**严格凸函数**和**严格凹函数**.



(a)凸函数　　(b)凹函数

图 6-12

图 6-12 中的(a)和(b)分别是凸函数和凹函数的几何形状,其中 $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$,$A=f(x_1)$,$B=f(x_2)$,$C=\lambda A+(1-\lambda)B$.

容易证明:若 $-f$ 为区间 I 上的凸函数,则 f 为区间 I 上的凹函数.因此,今后只需讨论凸函数的性质即可.

引理 f 为 I 上的凸函数的充要条件是:对于 I 上的任意三点 $x_1<x_2<x_3$,总有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.\tag{3}$$

证 ［必要性］ 记 $\lambda=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$，则 $x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)x_3$. 由 f 的凸性知道

$$f(x_2)=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_3)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_3)$$
$$=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3),$$

从而有

$$(x_3-x_1)f(x_2)\leqslant(x_3-x_2)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_3),$$
$$(x_3-x_2)f(x_2)+(x_2-x_1)f(x_2)\leqslant(x_3-x_2)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_3),$$

整理后即得(3)式.

［充分性］ 在 I 上任取两点 x_1,x_3 ($x_1<x_3$)，在 $[x_1,x_3]$ 上任取一点 $x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)\cdot x_3$，$\lambda\in(0,1)$，即 $\lambda=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$. 由必要性的推导逆过程，可证得

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_3)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_3),$$

故 f 为 I 上的凸函数. □

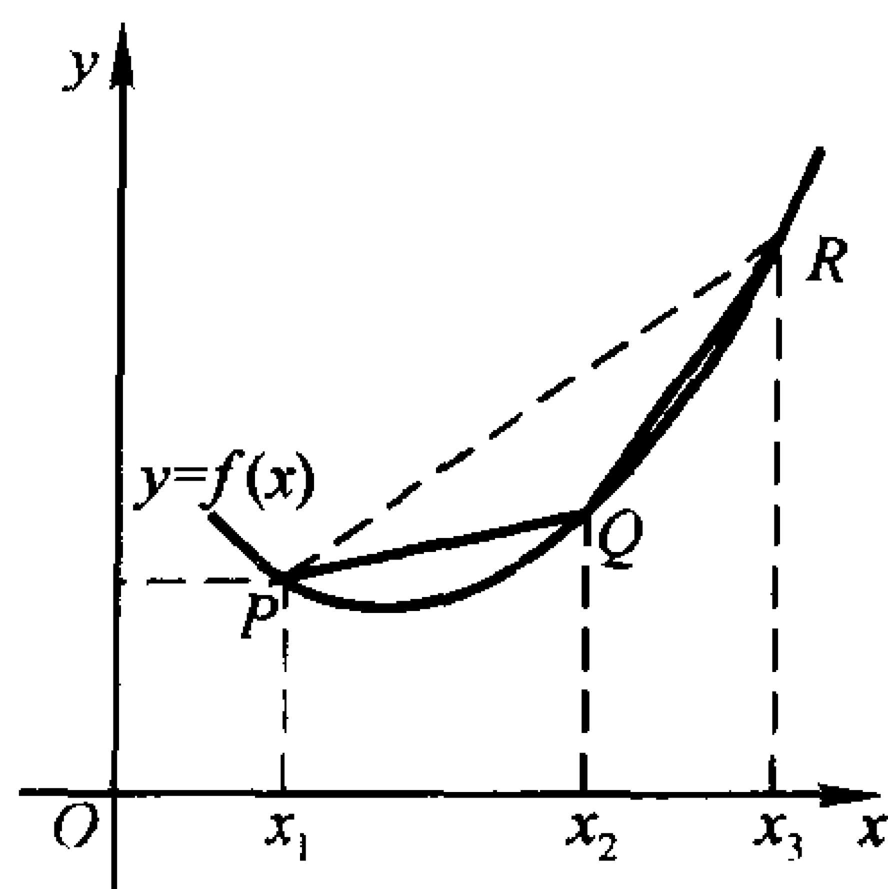


图 6-13

同理可证，f 为 I 上的凸函数的充要条件是：对于 I 上任意三点 $x_1<x_2<x_3$，有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \tag{4}$$

定理 6.13 设 f 为区间 I 上的可导函数，则下述论断互相等价：

1° f 为 I 上凸函数；

2° f' 为 I 上的增函数；

3° 对 I 上的任意两点 x_1,x_2，有

$$f(x_2)\geqslant f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1). \tag{5}$$

证 (1°→2°) 任取 I 上两点 x_1,x_2 ($x_1<x_2$) 及充分小的正数 h. 由于 $x_1-h<x_1<x_2<x_2+h$，根据 f 的凸性及引理有

$$\frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}.$$

由 f 是可导函数，令 $h\to0^+$ 时可得

$$f'(x_1)\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant f'(x_2),$$

所以 f' 为 I 上的递增函数.

(2°→3°) 在以 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 为端点的区间上，应用拉格朗日中值定理和 f' 递增条件，有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\geqslant f'(x_1)(x_2-x_1).$$

移项后即得(5)式成立，且当 $x_1>x_2$ 时仍可得到相同结论.

(3°→1°) 设以 x_1,x_2 为 I 上任意两点，$x_3=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2, 0<\lambda<1$. 由 3°，并利用 $x_1-x_3=(1-\lambda)(x_1-x_2)$ 与 $x_2-x_3=\lambda(x_2-x_1)$，

$$f(x_1)\geqslant f(x_3)+f'(x_3)(x_1-x_3)=f(x_3)+(1-\lambda)f'(x_1)(x_2-x_1),$$

$$f(x_2)\geqslant f(x_3)+f'(x_3)(x_2-x_3)=f(x_3)+\lambda f'(x_2)(x_2-x_1).$$

分别用 λ 和 $1-\lambda$ 乘上列两式并相加，便得

$$\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\geqslant f(x_3)=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2).$$

从而 f 为 I 上的凸函数. □

注意 论断 3° 的几何意义是：曲线 $y=f(x)$ 总是在它的任一切线的上方(图 6-14). 这是可导凸函数的几何特征.

对于凹函数，同样有类似于定理 6.13 的结论.

定理 6.14 设 f 为区间 I 上的二阶可导函数，则在 I 上 f 为凸(凹)函数的充要条件是

$$f''(x)\geqslant 0\ (f''(x)\leqslant 0), x\in I.$$

这个定理的结论可由定理 6.3 和定理 6.13 推出.

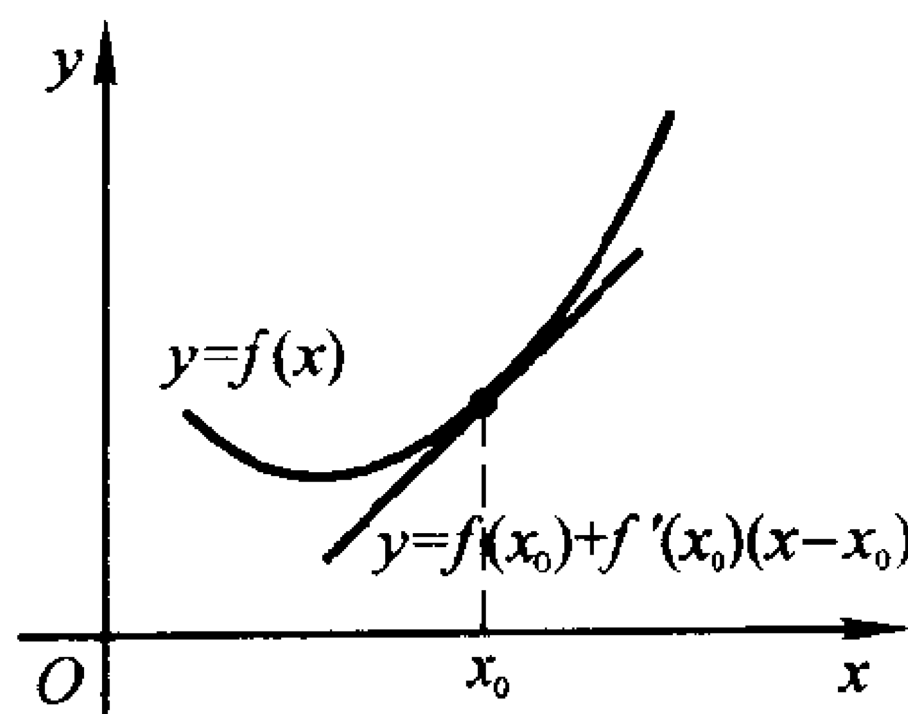


图 6-14

例 1 讨论函数 $f(x)=\arctan x$ 的凸(凹)性区间.

解 由于 $f''(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$，因而当 $x\leqslant 0$ 时，$f''(x)\geqslant 0$；$x\geqslant 0$ 时 $f''(x)\leqslant 0$. 从而在 $(-\infty,0]$ 上 f 为凸函数，在 $[0,+\infty)$ 上 f 为凹函数. □

例 2 若函数 f 为定义在开区间 (a,b) 内的可导的凸(凹)函数，则 $x_0\in(a,b)$ 为 f 的极小(大)值点的充要条件是 x_0 为 f 的稳定点，即 $f'(x_0)=0$.

证 下面只证明 f 为凸函数的情形.

必要性已由费马定理可出，现在证明充分性.

由定理 6.13，任取 (a,b) 内的一点 $x(\neq x_0)$，它与 x_0 一起有

$$f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

因为 $f'(x_0)=0$，故对任何 $x\in(a,b)$ 总有

$$f(x)\geqslant f(x_0)$$

即 x_0 为 f 在 (a,b) 内的极小值点(而且为最小值点). □

下面的例子是定义 1 的一般情况.

例 3(詹森(Jensen)不等式) 若 f 为$[a,b]$上凸函数,则对任意 $x_i\in[a,b]$,$\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$,有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i). \tag{6}$$

证 应用数学归纳法.当 $n=2$ 时,由定义 1 命题显然成立.设 $n=k$ 时命题成立.即对任意 $x_1,x_2,\cdots,x_k\in[a,b]$及

$$\alpha_i>0,i=1,2,\cdots,k,\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1,$$

都有

$$f\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{k}\alpha_i f(x_i).$$

现设 $x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}\in[a,b]$及

$$\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,k+1),\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i=1$$

令 $\alpha_i=\dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}},i=1,2,\cdots,k$,则 $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i=1$.由数学归纳法假设可推得

$$\begin{aligned}
&f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_kx_k+\lambda_{k+1}x_{k+1})\\
&=f\left((1-\lambda_{k+1})\frac{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_kx_k}{1-\lambda_{k+1}}+\lambda_{k+1}x_{k+1}\right)\\
&\leqslant(1-\lambda_{k+1})f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_kx_k)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})\\
&\leqslant(1-\lambda_{k+1})[\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\cdots+\alpha_kf(x_k)]+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})\\
&=(1-\lambda_{k+1})\left[\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}}f(x_1)+\frac{\lambda_2}{1-\lambda_{k+1}}f(x_2)+\cdots+\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}}f(x_k)\right]\\
&\quad+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})=\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_if(x_i).
\end{aligned}$$

这就证明了对任何正整数 $n\ (\geqslant2)$,凸函数 f 总有不等式(8)成立. □

例 4 证明不等式$(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\leqslant a^ab^bc^c$,其中 a,b,c 均为正数.

证 设 $f(x)=x\ln x,x>0$.由 $f(x)$的一阶和二阶导数

$$f'(x)=\ln x+1,\qquad f''(x)=\frac{1}{x}$$

可见,$f(x)=x\ln x$ 在$x>0$时为严格凸函数.依詹森不等式有

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\leqslant\frac{1}{3}(f(a)+f(b)+f(c)),$$

从而

$$\frac{a+b+c}{3}\ln\frac{a+b+c}{3}\leqslant\frac{1}{3}(a\ln a+b\ln b+c\ln c),$$

即

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}\leqslant a^a b^b c^c.$$

又因$\sqrt[3]{abc}\leqslant\frac{a+b+c}{3}$,所以

$$(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\leqslant a^a b^b c^c.$$ □

例 5　设 f 为开区间 I 内的凸(凹)函数,证明 f 在 I 内任一点 x_0 都存在左、右导数.

证　下面只证凸函数 f 在 x_0 存在右导数,同理可证也存在左导数和 f 为凹函数的情形.

设 $0<h_1<h_2$,则对 $x_0<x_0+h_1<x_0+h_2$(这里取充分小的 h_2,使 $x_0+h_2\in I$),由引理中的(4)式有

$$\frac{f(x_0+h_1)-f(x_0)}{h_1}\leqslant\frac{f(x_0+h_2)-f(x_0)}{h_2}.$$

令 $F(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$,故由上式可见 F 为增函数.任取 $x'\in I$ 且 $x'<x_0$,则对任何 $h>0$,只要 $x_0+h\in I$,也有

$$\frac{f(x_0)-f(x')}{x_0-x'}\leqslant\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=F(h)$$

由于上式左端是一个定数,因而函数 $F(h)$在 $h>0$ 上有下界.根据定理 3.10 极限 $F(h)$存在,即 $f'_+(x_0)$存在. □

定义 2　设曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处有穿过曲线的切线.且在切点近旁,曲线在切线的两侧分别是严格凸和严格凹的,这时称点$(x_0,f(x_0))$为曲线 $y=f(x)$的**拐点**.

由定义可见,拐点正是凸和凹曲线的分界点,如图 6-15 中的点 M.

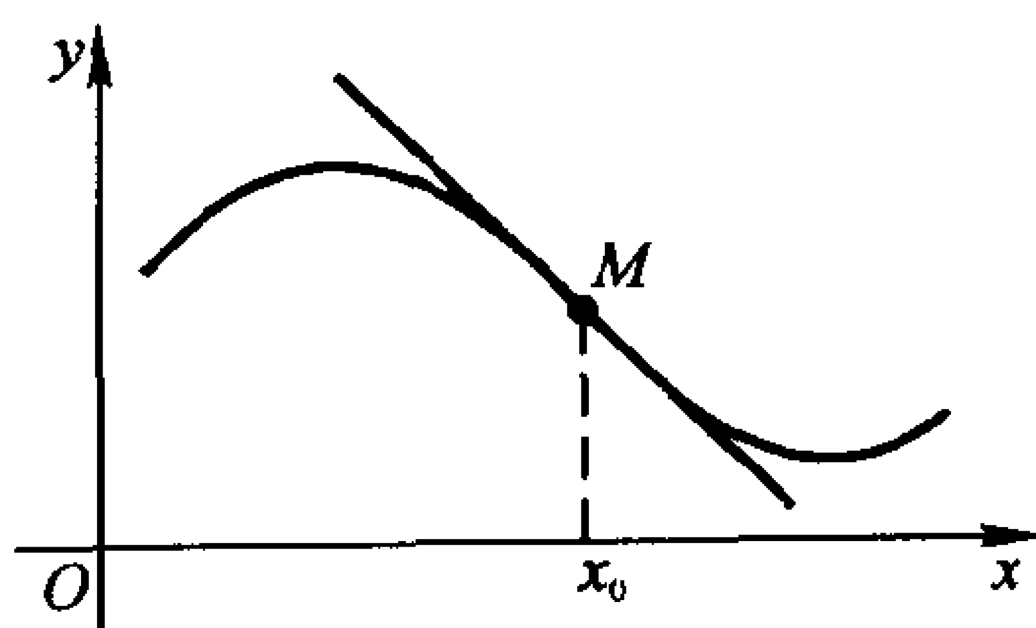


图　6-15

例 1 中的点(0,0)为 $y=\arctan x$ 的拐点.容易验证:正弦曲线 $y=\sin x$ 有拐点$(k\pi,0)$,k 为整数.

读者容易证明下述两个有关拐点的定理.

定理 6.15　若 f 在 x_0 二阶可导,则$(x_0,f(x_0))$为曲线$y=f(x)$的拐点的必要条件是 $f''(x_0)=0$.

定理 6.16 设 f 在 x_0 可导，在某邻域 $U^\circ(x_0)$ 内二阶可导．若在 $U^\circ_+(x_0)$ 和 $U^\circ_-(x_0)$ 上 $f''(x)$ 的符号相反，则 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点．

必须指出：若 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点，$y=f(x)$ 在 x_0 的导数不一定存在．请考察函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 的情况．

习　题

1．确定下列函数的凸性区间与拐点：

(1) $y=2x^3-3x^2-36x+25$；　　(2) $y=x+\dfrac{1}{x}$；

(3) $y=x^2+\dfrac{1}{x}$；　　(4) $y=\ln(x^2+1)$；

(5) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$．

2．问 a 和 b 为何值时，点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点？

3．证明：

(1) 若 f 为凸函数，λ 为非负实数，则 λf 为凸函数；

(2) 若 f,g 均为凸函数，则 $f+g$ 为凸函数；

(3) 若 f 为区间 I 上凸函数，g 为 $J\supset f(I)$ 上凸增函数，则 $g\circ f$ 为 I 上凸函数．

4．设 f 为区间 I 上严格凸函数．证明：若 $x_0\in I$ 为 f 的极小值点，则 x_0 为 f 在 I 上唯一的极小值点．

5．应用凸函数概念证明如下不等式：

(1) 对任意实数 a,b，有 $e^{\frac{a+b}{2}}\leqslant\dfrac{1}{2}(e^a+e^b)$；

(2) 对任何非负实数 a,b，有 $2\arctan\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\geqslant\arctan a+\arctan b$．

6．证明：若 f,g 均为区间 I 上凸函数，则 $F(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ 也是 I 上凸函数．

7．证明：(1) f 为区间 I 上凸函数的充要条件是对 I 上任意三点 $x_1<x_2<x_3$，恒有

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & x_1 & f(x_1)\\ 1 & x_2 & f(x_2)\\ 1 & x_3 & f(x_3)\end{vmatrix}\geqslant 0;$$

(2) f 为严格凸函数的充要条件是 $\Delta>0$．

8．应用詹森不等式证明：

(1) 设 $a_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，有

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n};$$

(2) 设 $a_i,b_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $p>0, q>0, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

§6　函数图象的讨论

在中学里，我们主要依赖描点作图法画出一些简单函数的图象. 一般来说，这样得到的图象比较粗糙，无法确切反映函数的性态(如单调区间，极值点，凸性区间，拐点等). 这一节里，我们将综合应用在本章前几节学过的方法，再综合周期性、奇偶性、渐近线等知识，较完善地作出函数的图象.

作函数图象的一般程序是：

1. 求函数的定义域；
2. 考察函数的奇偶性、周期性；
3. 求函数的某些特殊点，如与两个坐标轴的交点，不连续点，不可导点等；
4. 确定函数的单调区间，极值点，凸性区间以及拐点；
5. 考察渐近线；
6. 综合以上讨论结果画出函数图象.

下面举例说明如何按照上述程序作出函数的图象.

例　讨论函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$ 的性态，并作出其图象.

解　由于

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}=\sqrt[3]{(x-1)^2}\cdot\sqrt[3]{x+1},$$

可见此曲线与坐标轴交于(1,0),(−1,0),(0,1)三点.

求出导数：

$$f'(x)=\frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}=\frac{x+\frac{1}{3}}{\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}},$$

由此得到稳定点 $x=-\frac{1}{3}$，不可导点 $x=\pm1$. 但因函数在 $x=\pm1$ 处连续，$y'|_{x=\pm1}=\infty$，所以在 $x=\pm1$ 处有垂直切线.

再求二阶导数，可得

$$f''(x)=-\frac{8}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^5}}.$$

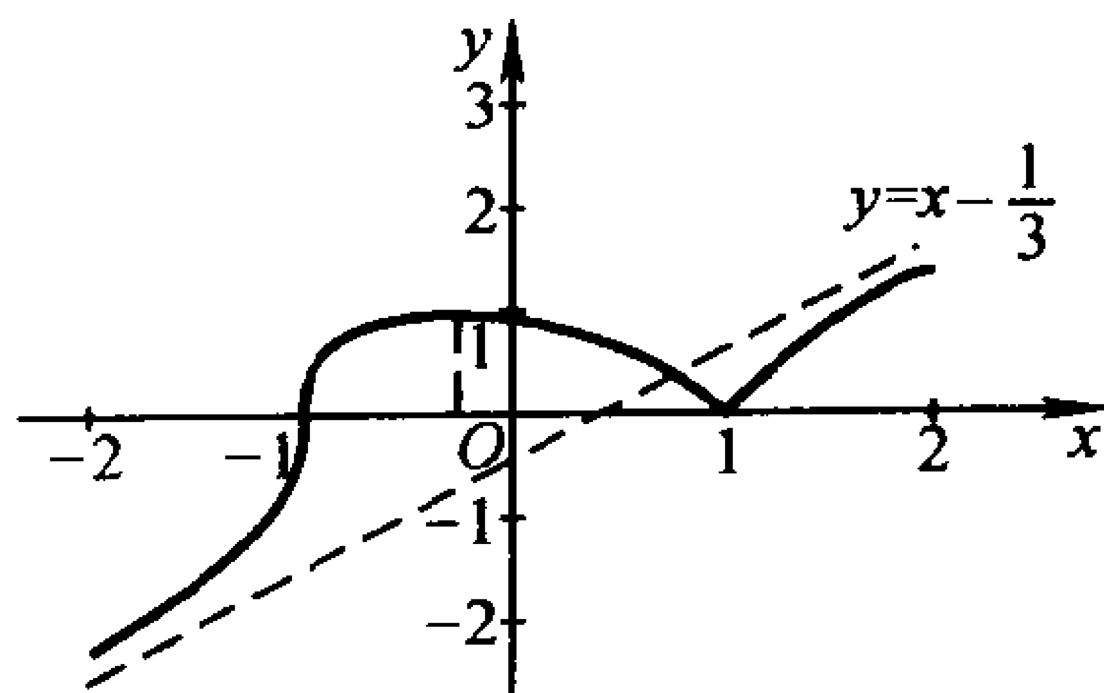


图　6－16

下面列表图示 $f'(x)$ 变号区间($f(x)$ 的单调区间)和 $f''(x)$ 变号区间(即凸性区

间),并说明函数的性态.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	∞	+	0	−	∞	+
$f''(x)$	+	不存在	−	−	−	不存在	−
$f(x)$	凸增↗	拐点 $(-1,0)$	凹增↗	极大值 $\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$	凹减↘	极小值 0	凹增↗

另外,曲线 $y=\sqrt{x^3-x^2-x+1}$ 有渐近线

$$y=x-\frac{1}{3}.$$

这样我们就可作出函数图象如图 6-16 所示. □

习 题

按函数作图步骤,作下列函数图象:

(1) $y=x^3+6x^2-15x-20$;

(2) $y=\dfrac{x^2}{2(1+x)^2}$;

(3) $y=x-2\arctan x$;

(4) $y=xe^{-x}$;

(5) $y=3x^5-5x^3$;

(6) $y=e^{-x^2}$;

(7) $y=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$;

(8) $y=|x|^{\frac{2}{3}}(x-2)^2$.

* §7 方程的近似解

在实际应用中,常常求方程

$$f(x)=0 \tag{1}$$

的解.而方程求解的方法主要有两种:解析法和数值法.解析法也称为公式法,得到的解是精确的,比如一元二次方程的求解公式.然而并不是所有的方程的根都能通过这种方法而求得.法国著名数学家伽罗瓦(Galois)在 19 世纪就证明了形如

$$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0 \quad (a_n\neq 0)$$

的代数方程,当 $n\geqslant 5$ 时,一般不存在求解公式.因此对于一般方程,我们必须寻求其它的求解方法.

下面我们介绍一种数值解法——**牛顿切线法**.

设 f 为 $[a,b]$ 上的二阶可导函数,满足

$$f'(x)\cdot f''(x)\neq 0, f(a)\cdot f(b)<0.$$

牛顿切线法的基本思想是构造一收敛点列$\{x_n\}$,使其极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$恰好是方程(1)的解.因此当$n$充分大时,$x_n$可作为$\xi$的近似值.下面分四种情形进行讨论.

(1) 设$f'(x)<0,f''(x)>0$.从而有$f(a)>0,f(b)<0$,并设$f(\xi)=0$.令

$$x_0=a,x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},n=1,2,\cdots. \tag{2}$$

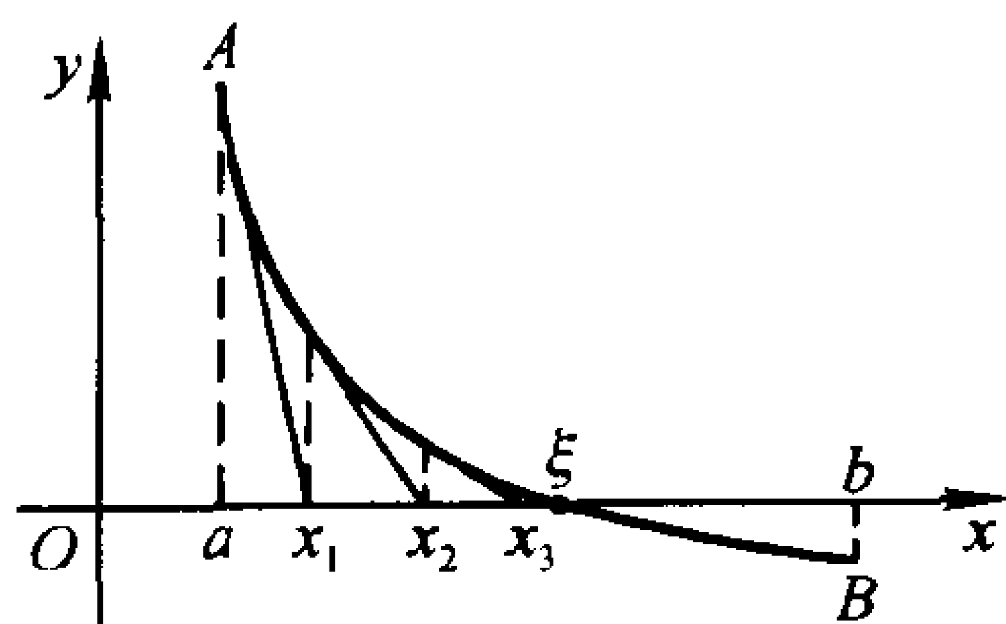
因为$f''(x)>0$,所以f为$[a,b]$上的严格凸函数,由定理6.13

$$f(x)>f(a)+f'(a)(x-a),x\in(a,b]. \tag{3}$$

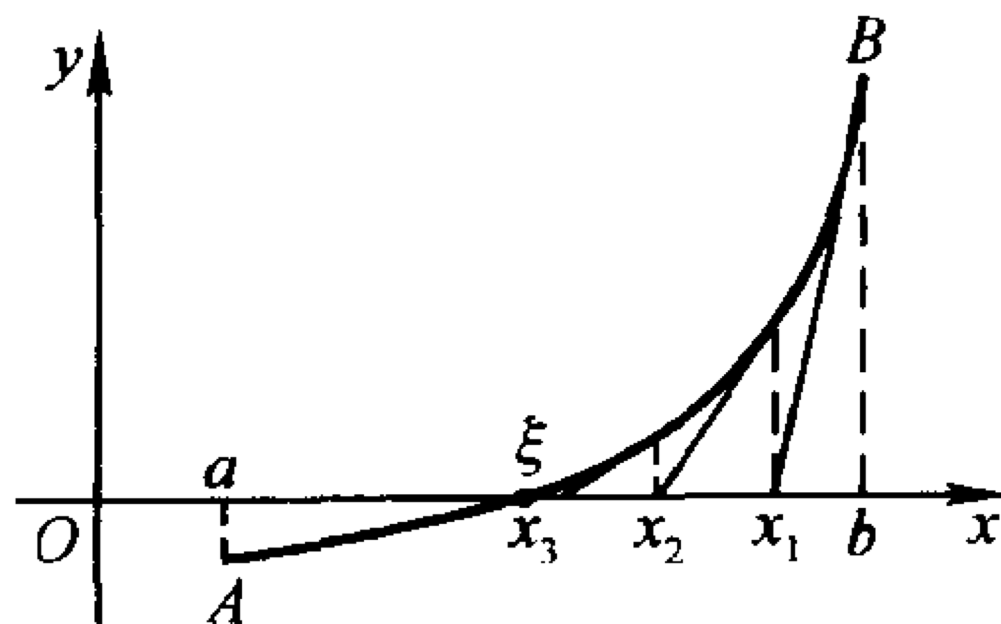
设$x_0=a$,则$y=f(x)$在点a的切线与x轴的交点为

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

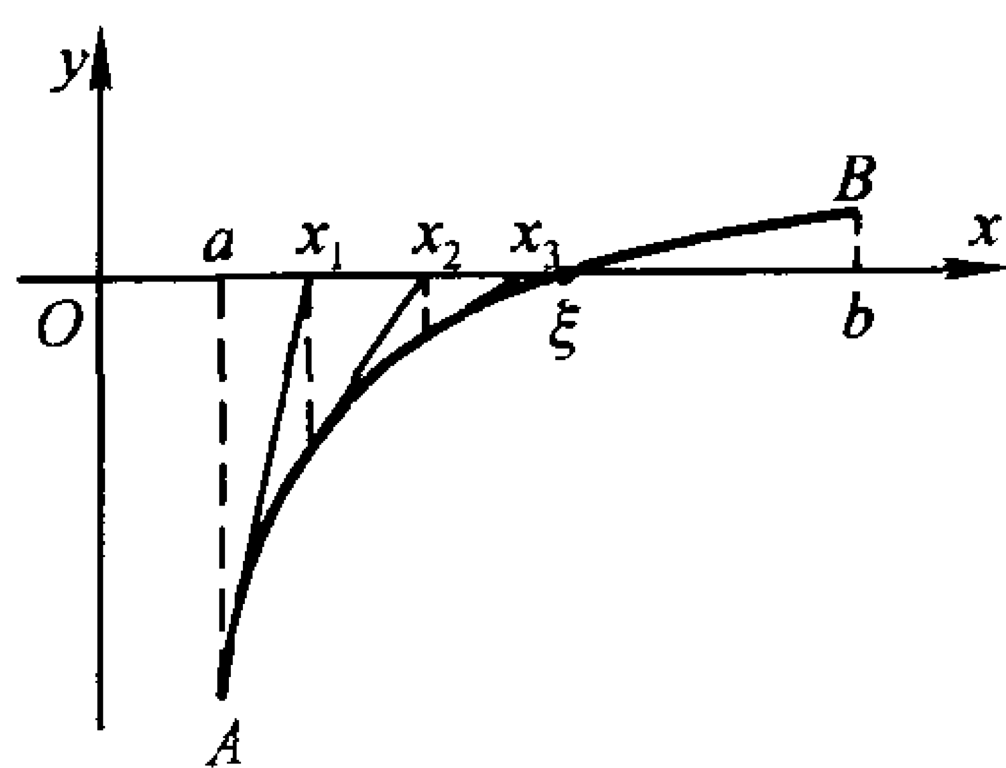
由(3)式可知$f(x_1)>0$(见图6-17(1)).



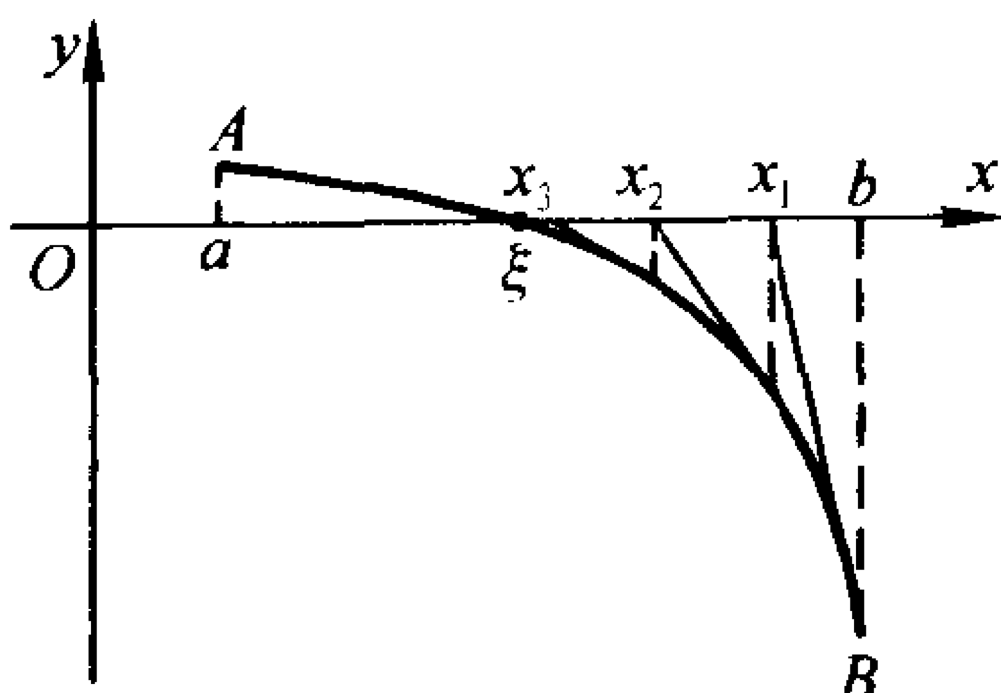
(1)



(2)



(3)



(4)

图 6-17

以$[x_1,b]$代替$[a,b]$重复上述步骤可将$y=f(x)$在点x_1的切线与x轴交点为

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

其中$f(x_2)>0,a=x_0<x_1<x_2<\xi<b$.

如此继续上述过程可得如(2)式确定的点列$\{x_n\}$.显然$\{x_n\}$严格递增且有

上界,故可设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.由于 f 和f'连续,对(2)式取极限,得

$$c = c - \frac{f(c)}{f'(c)}.$$

因而有 $f(c)=0$.由 f 严格单调,可知方程(1)的解唯一,从而 $c=\xi$.

最后我们估计以 x_n 作为ξ 的近似值的误差.由中值定理

$$f(x_n) = f(x_n) - f(\xi) = f'(\eta)(x_n - \xi), x_n < \eta < \xi,$$

因而

$$x_n - \xi = \frac{f(x_n)}{f'(\eta)}.$$

记 $m = \min\limits_{x\in[a,b]}\{|f'(x)|\}$,则

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}.$$

读者可类似讨论余下三种情形.

(2) $f'(x)>0, f''(x)>0$,这时又有 $f(a)<0, f(b)>0$;

(3) $f'(x)>0, f''(x)<0$,这时又有 $f(a)<0, f(b)>0$;

(4) $f'(x)<0, f''(x)<0$,这时又有 $f(a)>0, f(b)<0$.

这三种情形的图象分别如图 6-17 中的(2)、(3)、(4)所示.对它们同样能构造数列(2),并可证明其极限是方程(1)的解.只是在(2)、(4)两种情形下,应改取 $x_0=b$,相应得到的$\{x_n\}$是单调递减的.

例 用牛顿切线法求方程 $x^3-2x^2-4x-7=0$ 的近似解,使误差不超过 0.01.

解 设 $f(x)=x^3-2x^2-4x-7$.求得导数

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 = (3x+2)(x-2),$$

$$f''(x) = 6x - 4.$$

容易检验 $x=-\frac{2}{3}$为极大值点,$x=2$ 为极小值点,并且 $f\left(-\frac{2}{3}\right)<0$.又因

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,所以方程 $f(x)=0$ 有且只有一个根.

注意到 $f(3)=-10<0, f(4)=9>0$,因而方程的根 $\xi\in(3,4)$.由于在$[3,4]$上 $f'(x)$, $f''(x)>0$,因此它是属于(2)的情形,如图 6-18 所示.从点 $B(4,9)$作切线与 x 轴相交于

$$x_1 = 4 - \frac{f(4)}{f'(4)} = 4 - \frac{9}{28} \approx 3.68.$$

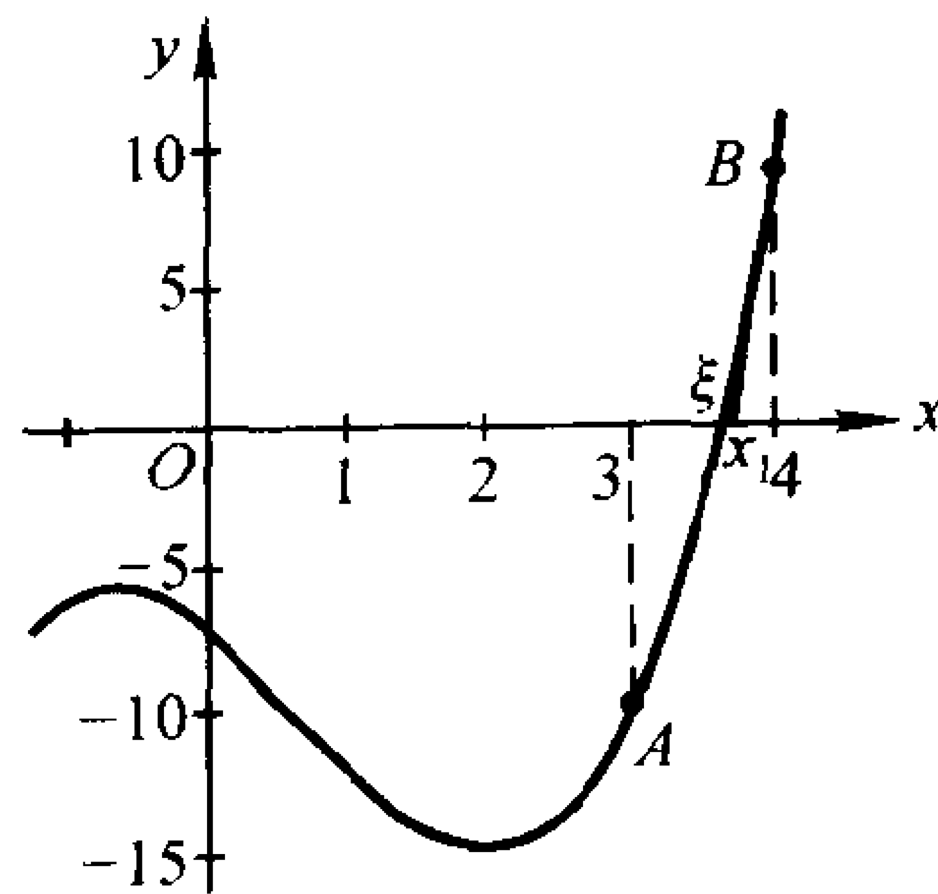


图 6-18

我们来估计以 x_1 代替 ξ 的误差：$f'(x)$ 在 $[3,4]$ 上的最小值为 $m=11$，而 $f(x_1)=f(3.68)=1.03$，由误差估计公式(4)得

$$|x_1-\xi|\leqslant\frac{|f(x_1)|}{m}=\frac{1.03}{11},$$

而 $\frac{1.03}{11}>0.01$，因此尚不合要求.

再在点 $B'(x_1,f(x_1))$ 作切线，求得

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=3.68-\frac{1.03}{21.9}\approx 3.63.$$

由于 $f(x_2)=-0.042$，此时

$$|x_2-\xi|\leqslant\frac{|f(x_2)|}{m}=\frac{0.042}{11}<0.01,$$

因此取 $\xi\approx 3.63$ 已能达到所要求的精确度. □

习　　题

1. 求 $\frac{x^3}{3}-x^2+2$ 的实根到三位有效数字.
2. 求方程 $x=0.538\sin x+1$ 的根的近似值.

总 练 习 题

1. 证明：若 $f(x)$ 在有限开区间 (a,b) 内可导，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

2. 证明：若 $x>0$，则

(1) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$，其中 $\frac{1}{4}\leqslant\theta(x)\leqslant\frac{1}{2}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{4}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

3. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $a\cdot b>0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

4. 设 f 在 $[a,b]$ 上三阶可导，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi).$$

5. 对 $f(x)=\ln(1+x)$ 应用拉格朗日中值定理，试证：对 $x\geqslant 0$ 有

$$0<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<1.$$

6. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个正数,且

$$f(x)=\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

证明:(1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

7. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x^2)^{1/\ln(1-x)}$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

8. 设 $h>0$,函数 f 在 $U(a;h)$ 内具有 $n+2$ 阶连续导数,且 $f^{(n+2)}(a)\neq0$,f 在 $U(a;h)$ 内的泰勒公式为

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1},0<\theta<1.$$

证明:$\lim\limits_{h\to0}\theta=\dfrac{1}{n+2}$.

9. 设 $k>0$,试问 k 为何值时,方程 $\arctan x-kx=0$ 存在正实根.

10. 证明:对任一多项式 $p(x)$,一定存在 x_1 与 x_2,使 $p(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 与 $(x_2,+\infty)$ 分别严格单调.

11. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

(1) 在 $x=0$ 点是否可导?

(2) 是否存在 $x=0$ 的一个邻域,使 f 在该邻域内单调?

12. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导,$f'(a)=f'(b)=0$. 证明存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

13. 设函数 f 在 $[0,a]$ 上具有二阶导数,且 $|f''(x)|\leqslant M$,f 在 $(0,a)$ 内取得最大值. 试证

$$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma.$$

14. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上可微,且 $0\leqslant f'(x)\leqslant f(x)$,$f(0)=0$. 证明:在 $[0,+\infty)$ 上 $f(x)\equiv0$.

15. 设 $f(x)$ 满足 $f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$,其中 $g(x)$ 为任一函数. 证明:若 $f(x_0)=f(x_1)=0\ (x_0<x_1)$,则 f 在 $[x_0,x_1]$ 上恒等于 0.

16. 证明:定圆内接正 n 边形面积将随 n 的增加而增加.

17. 证明:f 为 I 上凸函数的充要条件是对任何 $x_1,x_2\in I$,函数

$$\varphi(\lambda) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$

为[0,1]上的凸函数

18. 证明:(1) 设 f 在$(a,+\infty)$上可导,若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$都存在,则

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$

(2) 设 f 在$(a,+\infty)$上 n 阶可导.若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x)$都存在,则

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(k)}(x) = 0\ (k=1,2,\cdots,n).$$

19. 设 f 为$(-\infty,+\infty)$上的二阶可导函数.若 f 在$(-\infty,+\infty)$上有界,则存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$,使 $f''(\xi)=0$.

第七章　实数的完备性

§1　关于实数集完备性的基本定理

在第一、二章中，我们证明了关于实数集的确界原理和数列的单调有界定理，给出了数列的柯西收敛准则. 这三个命题以不同方式反映了实数集 **R** 的一种特性，通常称为实数的**完备性**或实数的连续性. 可以举例说明，有理数集就不具有这种特性(本节习题 4). 有关实数集完备性的基本定理，除上述三个外，还有区间套定理、聚点定理和有限覆盖定理，在本节中将阐述这三个基本定理，并指出所有这六个基本定理的等价性. 下一节中将应用这些基本定理证明第四章中已给出的关于闭区间上连续函数的性质. 从而使极限理论乃至整个数学分析能建立在坚实的基础之上.

一　区间套定理与柯西收敛准则

定义 1　设闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ 具有如下性质：

(i) $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$, $n=1,2,\cdots$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$,

则称 $\{[a_n,b_n]\}$ 为**闭区间套**，或简称**区间套**.

这里性质(i)表明，构成区间套的闭区间列是前一个套着后一个，即各闭区间的端点满足如下不等式：

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots\leqslant b_n\leqslant\cdots\leqslant b_2\leqslant b_1. \tag{1}$$

定理 7.1(区间套定理)　若 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一个区间套，则在实数系中存在唯一的一点 ξ，使得 $\xi\in[a_n,b_n]$, $n=1,2,\cdots$，即

$$a_n\leqslant\xi\leqslant b_n,\ n=1,2,\cdots. \tag{2}$$

证　由(1)式，$\{a_n\}$ 为递增有界数列，依单调有界定理，$\{a_n\}$ 有极限 ξ，且有

$$a_n\leqslant\xi,\ n=1,2,\cdots. \tag{3}$$

同理，递减有界数列 $\{b_n\}$ 也有极限，并按区间套的条件(ii)有

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}a_n=\xi, \tag{4}$$

且

$$b_n \geqslant \xi, n = 1,2,\cdots. \tag{5}$$

联合(3)、(5)即得(2)式.

最后证明满足(2)的 ξ 是唯一的. 设数 ξ' 也满足

$$a_n \leqslant \xi' \leqslant b_n, n = 1,2,\cdots,$$

则由(2)式有

$$|\xi - \xi'| \leqslant b_n - a_n, n = 1,2,\cdots.$$

由区间套的条件(ii)得

$$|\xi - \xi'| \leqslant \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0,$$

故有 $\xi' = \xi$. □

由(4)式容易推得如下很有用的区间套性质:

推论 若 $\xi \in [a_n, b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$ 是区间套 $\{[a_n, b_n]\}$ 所确定的点,则对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,使得当 $n>N$ 时有

$$[a_n, b_n] \subset U(\xi;\varepsilon).$$

注 区间套定理中要求各个区间都是闭区间,才能保证定理的结论成立. 对于开区间列,如 $\{(0,\frac{1}{n})\}$,虽然其中各个开区间也是前一个包含后一个,且 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}-0)=0$,但不存在属于所有开区间的公共点.

作为区间套定理的应用,我们来证明第二章中叙述而未证明的"数列的柯西收敛准则"(定理 2.10),即

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是:对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,使得对 $m,n>N$ 有 $|a_m - a_n|<\varepsilon$.

证 [必要性] 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. 由数列极限定义,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,当 $m,n>N$ 时有

$$|a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

因而 $|a_m - a_n| \leqslant |a_m - A| + |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

[充分性] 按假设,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,使得对一切 $n \geqslant N$ 有 $|a_n - a_N| \leqslant \varepsilon$,即在区间 $[a_N - \varepsilon, a_N + \varepsilon]$ 内含有 $\{a_n\}$ 中几乎所有的项(这里及以下,为叙述简单起见,我们用"$\{a_n\}$ 中几乎所有的项"表示"$\{a_n\}$ 中除有限项外的所有项").

据此,令 $\varepsilon = \frac{1}{2}$,则存在 N_1,在区间 $[a_{N_1} - \frac{1}{2}, a_{N_1} + \frac{1}{2}]$ 内含有 $\{a_n\}$ 中几乎所有的项. 记这个区间为 $[\alpha_1, \beta_1]$.

再令 $\varepsilon=\frac{1}{2^2}$,则存在 $N_2(>N_1)$,在区间$[a_{N_2}-\frac{1}{2^2},a_{N_2}+\frac{1}{2^2}]$内含有$\{a_n\}$中几乎所有的项.记

$$[\alpha_2,\beta_2]=[a_{N_2}-\frac{1}{2^2},a_{N_2}+\frac{1}{2^2}]\cap[\alpha_1,\beta_1],$$

它也含有$\{a_n\}$中几乎所有的项,且满足

$$[\alpha_1,\beta_1]\supset[\alpha_2,\beta_2] \text{ 及 } \beta_2-\alpha_2\leqslant\frac{1}{2}.$$

继续依次令 $\varepsilon=\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$,照以上方法得一闭区间列$\{[\alpha_n,\beta_n]\}$,其中每个区间都含有$\{a_n\}$中几乎所有的项,且满足

$$[\alpha_n,\beta_n]\supset[\alpha_{n+1},\beta_{n+1}],n=1,2,\cdots,$$

$$\beta_n-\alpha_n\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}\to 0\quad(n\to\infty),$$

即$\{[\alpha_n,\beta_n]\}$是区间套.由区间套定理,存在唯一的一个数 $\xi\in[\alpha_n,\beta_n]$ $(n=1,2,\cdots)$.

现在证明数 ξ 就是数列$\{a_n\}$的极限.事实上,由定理 7.1 的推论,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,使得当 $n>N$ 时有

$$[\alpha_n,\beta_n]\subset U(\xi;\varepsilon).$$

因此在 $U(\xi;\varepsilon)$内含有$\{a_n\}$中除有限项外的所有项,这就证得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$. □

二 聚点定理与有限覆盖定理

定义 2 设 S 为数轴上的点集,ξ 为定点(它可以属于 S,也可以不属于 S).若 ξ 的任何邻域内都含有 S 中无穷多个点,则称 ξ 为点集 S 的一个**聚点**.

例如,点集 $S=\{(-1)^n+\frac{1}{n}\}$有两个聚点 $\xi_1=-1$ 和 $\xi_2=1$;点集 $S=\{\frac{1}{n}\}$只有一个聚点 $\xi=0$;又若 S 为开区间(a,b),则(a,b)内每一点以及端点 a、b 都是 S 的聚点;而正整数集 $\mathbf{N}_+$ 没有聚点,任何有限数集也没有聚点.

聚点概念的另两个等价定义如下:

定义 2′ 对于点集 S,若点 ξ 的任何 ε 邻域内都含有 S 中异于 ξ 的点,即 $U^\circ(\xi;\varepsilon)\cap S\neq\varnothing$,则称 ξ 为 S 的一个聚点.

定义 2″ 若存在各项互异的收敛数列$\{x_n\}\subset S$,则其极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$ 称为 S 的一个聚点.

关于以上三个定义等价性的证明,我们简述如下.

定义 2⇒定义 2′是显然的,定义 2″⇒定义 2 也不难得到;现证定义 2′⇒定义

$2''$:

设 ξ 为 S(按定义 $2'$)的聚点,则对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $x\in U^\circ(\xi;\varepsilon)\cap S$.

令 $\varepsilon_1=1$,则存在 $x_1\in U^\circ(\xi;\varepsilon_1)\cap S$;

令 $\varepsilon_2=\min(\frac{1}{2},|\xi-x_1|)$,则存在 $x_2\in U^\circ(\xi;\varepsilon_2)\cap S$,且显然 $x_2\neq x_1$;

……

令 $\varepsilon_n=\min(\frac{1}{n},|\xi-x_{n-1}|)$,则存在 $x_n\in U^\circ(\xi;\varepsilon_n)\cap S$,且 x_n 与 $x_1,\cdots,$ x_{n-1}互异.

无限地重复以上步骤,得到 S 中各项互异的数列 $\{x_n\}$,且由 $|\xi-x_n|<\varepsilon_n\leqslant\frac{1}{n}$,易见 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$. □

下面我们应用区间套定理来证明聚点定理.

定理 7.2 (魏尔斯特拉斯(Weierstrass)聚点定理) 实轴上的任一有界无限点集 S 至少有一个聚点.

证 因 S 为有界点集,故存在 $M>0$,使得 $S\subset[-M,M]$,记 $[a_1,b_1]=[-M,M]$.

现将 $[a_1,b_1]$ 等分为两个子区间.因 S 为无限点集,故两个子区间中至少有一个含有 S 中无穷多个点,记此子区间为 $[a_2,b_2]$,则 $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]$,且

$$b_2-a_2=\frac{1}{2}(b_1-a_1)=M.$$

再将 $[a_2,b_2]$ 等分为两个子区间,则其中至少有一个子区间含有 S 中无穷多个点,取出这样的一个子区间,记为 $[a_3,b_3]$,则 $[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]$,且

$$b_3-a_3=\frac{1}{2}(b_2-a_2)=\frac{M}{2}.$$

将此等分子区间的手续无限地进行下去,得到一个区间列 $\{[a_n,b_n]\}$,它满足

$$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}],n=1,2,\cdots,$$

$$b_n-a_n=\frac{M}{2^{n-1}}\to 0\ (n\to\infty),$$

即 $\{[a_n,b_n]\}$ 是区间套,且其中每一个闭区间都含有 S 中无穷多个点.

由区间套定理,存在唯一的一点 $\xi\in[a_n,b_n]$,$n=1,2,\cdots$.于是由定理 7.1 的推论,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,当 $n>N$ 时有 $[a_n,b_n]\subset U(\xi;\varepsilon)$.从而 $U(\xi;\varepsilon)$ 内含有 S 中无穷多个点,按定义 2,ξ 为 S 的一个聚点. □

推论(致密性定理) 有界数列必含有收敛子列.

证 设$\{x_n\}$为有界数列.若$\{x_n\}$中有无限多个相等的项,则由这些项组成的子列是一个常数列,而常数列总是收敛的.

若数列$\{x_n\}$不含有无限多个相等的项,则$\{x_n\}$在数轴上对应的点集必为有界无限点集,故由聚点定理,点集$\{x_n\}$至少有一个聚点,记为ξ.于是按定义2″,存在$\{x_n\}$的一个收敛子列(以ξ为其极限). □

作为致密性定理的应用,我们用它重证数列的柯西收敛准则中的充分性.

证 设数列$\{a_n\}$满足柯西条件.先证明$\{a_n\}$是有界的.为此,取$\varepsilon=1$,则存在正整数N,当$m=N+1$及$n>N$时有

$$|a_n-a_{N+1}|<1.$$

由此得$|a_n|=|a_n-a_{N+1}+a_{N+1}|\leqslant|a_n-a_{N+1}|+|a_{N+1}|<|a_{N+1}|+1$.令

$$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,|a_{N+1}|+1\},$$

则对一切正整数n均有$|a_n|\leqslant M$.

于是,由致密性定理,有界数列$\{a_n\}$必有收敛子列$\{a_{n_k}\}$,设$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=A$.对任给的$\varepsilon>0$,存在$K>0$,当$m,n,k>K$时,同时有

$$|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}(\text{由柯西条件}),$$

$$|a_{n_k}-A|<\frac{\varepsilon}{2}(\text{由}\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=A).$$

因而当取$m=n_k(\geqslant k>K)$时,得到

$$|a_n-A|\leqslant|a_n-a_{n_k}|+|a_{n_k}-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这就证明了$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$. □

定义3 设S为数轴上的点集,H为开区间的集合(即H的每一个元素都是形如(α,β)的开区间).若S中任何一点都含在H中至少一个开区间内,则称H为S的一个**开覆盖**,或称H覆盖S.若H中开区间的个数是无限(有限)的,则称H为S的一个**无限开覆盖(有限开覆盖)**.

在具体问题中,一个点集的开覆盖常由该问题的某些条件所确定.例如,若函数f在(a,b)内连续,则给定$\varepsilon>0$,对每一点$x\in(a,b)$,都可确定正数δ_x(它依赖于ε与x),使得当$x'\in U(x;\delta_x)$时有$|f(x')-f(x)|<\varepsilon$.这样就得到一个开区间集

$$H=\{(x-\delta_x,x+\delta_x)\,|\,x\in(a,b)\},$$

它是区间(a,b)的一个无限开覆盖.

定理7.3 **(海涅—博雷尔(Heine-Borel)有限覆盖定理)** 设H为闭区间$[a,b]$的一个(无限)开覆盖,则从H中可选出有限个开区间来覆盖$[a,b]$.

证 用反证法 假设定理的结论不成立,即不能用 H 中有限个开区间来覆盖$[a,b]$.

将$[a,b]$等分为两个子区间,则其中至少有一个子区间不能用 H 中有限个开区间来覆盖.记这个子区间为$[a_1,b_1]$,则$[a_1,b_1]\subset[a,b]$,且 $b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a)$.

再将$[a_1,b_1]$等分为两个子区间,同样,其中至少有一个子区间不能用 H 中有限个开区间来覆盖.记这个子区间为$[a_2,b_2]$,则$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$,且 $b_2-a_2=\frac{1}{2^2}(b-a)$.

重复上述步骤并不断地进行下去,则得到一个闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$,它满足

$$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}],n=1,2,\cdots,$$

$$b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)\to 0\ (n\to\infty),$$

即$\{[a_n,b_n]\}$是区间套,且其中每一个闭区间都不能用 H 中有限个开区间来覆盖.

由区间套定理,存在唯一的一点 $\xi\in[a_n,b_n],n=1,2,\cdots$.由于 H 是$[a,b]$的一个开覆盖,故存在开区间$(\alpha,\beta)\in H$,使 $\xi\in(\alpha,\beta)$.于是,由定理 7.1 推论,当 n 充分大时有

$$[a_n,b_n]\subset(\alpha,\beta).$$

这表明$[a_n,b_n]$只须用 H 中的一个开区间(α,β)就能覆盖,与挑选$[a_n,b_n]$时的假设"不能用 H 中有限个开区间来覆盖"相矛盾.从而证得必存在属于 H 的有限个开区间能覆盖$[a,b]$. □

注 定理 7.3 的结论只对闭区间$[a,b]$成立,而对开区间则不一定成立.例如,开区间集合$\left\{\left(\frac{1}{n+1},1\right)\right\}$ $(n=1,2,\cdots)$构成了开区间$(0,1)$的一个开覆盖,但不能从中选出有限个开区间盖住$(0,1)$.

*三 实数完备性基本定理的等价性

至此,我们已经介绍了有关实数完备性的六个基本定理,即

1. 确界原理(定理 1.1);
2. 单调有界定理(定理 2.9);
3. 区间套定理(定理 7.1);
4. 有限覆盖定理(定理 7.3);
5. 聚点定理(定理 7.2);

6. 柯西收敛准则(定理 2.10).

在本书中,我们首先证明了确界原理,由它证明单调有界定理,再用单调有界定理导出区间套定理,最后用区间套定理分别证明余下的三个定理.事实上,在实数系中这六个命题是相互等价的,即从其中任何一个命题都可推出其余的五个命题.对此,我们可按下列顺序给予证明:

$$1\Rightarrow2\Rightarrow3\Rightarrow4\Rightarrow5\Rightarrow6\Rightarrow1.$$

其中 $1\Rightarrow2$,$2\Rightarrow3$ 与 $3\Rightarrow4$ 分别见定理 2.9,7.1 与 7.3;$4\Rightarrow5$ 和 $5\Rightarrow6$ 请读者作为练习自证(见本节习题 8 和 9);而 $6\Rightarrow1$ 见下例.

例 1　用数列的柯西收敛准则证明确界原理.

证　设 S 为非空有上界数集.由实数的阿基米德性,对任何正数 α,存在整数 K_α,使得 $\lambda_\alpha=k_\alpha\alpha$ 为 S 的上界,而 $\lambda_\alpha-\alpha=(k_\alpha-1)\alpha$ 不是 S 的上界,即存在 $\alpha'\in S$,使得 $\alpha'>(k_\alpha-1)\alpha$.

分别取 $\alpha=\frac{1}{n}$,$n=1,2,\cdots$,则对每一个正整数 n,存在相应的 λ_n,使得 λ_n 为 S 的上界,而 $\lambda_n-\frac{1}{n}$ 不是 S 的上界,故存在 $a'\in S$,使得

$$a'>\lambda_n-\frac{1}{n}.\tag{6}$$

又对正整数 m,λ_m 是 S 的上界,故有 $\lambda_m\geqslant a'$.结合(6)式得 $\lambda_n-\lambda_m<\frac{1}{n}$;同理有 $\lambda_m-\lambda_n<\frac{1}{m}$.从而得

$$|\lambda_m-\lambda_n|<\max\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right).$$

于是,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,使得当 $m,n>N$ 时有

$$|\lambda_m-\lambda_n|<\varepsilon.$$

由柯西收敛准则,数列 $\{\lambda_n\}$ 收敛.记

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda.\tag{7}$$

现在证明 λ 就是 S 的上确界.首先,对任何 $a\in S$ 和正整数 n 有 $a\leqslant\lambda_n$,由(7)式得 $a\leqslant\lambda$,即 λ 是 S 的一个上界.其次,对任何 $\delta>0$,由 $\frac{1}{n}\to0\ (n\to\infty)$ 及(7)式,对充分大的 n 同时有

$$\frac{1}{n}<\frac{\delta}{2},\lambda_n>\lambda-\frac{\delta}{2}.$$

又因 $\lambda_n-\frac{1}{n}$ 不是 S 的上界,故存在 $a'\in S$,使得 $a'>\lambda_n-\frac{1}{n}$.结合上式得

$$a' > \lambda - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} = \lambda - \delta.$$

这说明 λ 为 S 的上确界.

同理可证:若 S 为非空有下界数集,则必存在下确界. □

习 题

1. 验证数集 $\{(-1)^n + \frac{1}{n}\}$ 有且只有两个聚点 $\xi_1 = -1$ 和 $\xi_2 = 1$.

2. 证明:任何有限数集都没有聚点.

3. 设 $\{(a_n, b_n)\}$ 是一个严格开区间套,即满足

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < b_n < \cdots < b_2 < b_1,$$

且 $\lim\limits_{n \to \infty}(b_n - a_n) = 0$. 证明:存在唯一的一点 ξ,使得

$$a_n < \xi < b_n, n = 1,2,\cdots.$$

4. 试举例说明:在有理数集内,确界原理、单调有界定理、聚点定理和柯西收敛准则一般都不能成立.

5. 设 $H = \{(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}) \mid n = 1,2,\cdots\}$. 问

(1) H 能否覆盖 $(0,1)$?

(2) 能否从 H 中选出有限个开区间覆盖(i) $(0, \frac{1}{2})$, (ii) $(\frac{1}{100}, 1)$?

6. 证明:闭区间 $[a,b]$ 的全体聚点的集合是 $[a,b]$ 本身.

7. 设 $\{x_n\}$ 为单调数列. 证明:若 $\{x_n\}$ 存在聚点,则必是唯一的,且为 $\{x_n\}$ 的确界。

---

8. 试用有限覆盖定理证明聚点定理.

9. 试用聚点定理证明柯西收敛准则.

§2 闭区间上连续函数性质的证明

在本节中,我们将利用关于实数完备性的基本定理,来证明第四章§2中给出的闭区间上连续函数的基本性质.

有界性定理 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

证 [证法一](应用有限覆盖定理) 由连续函数的局部有界性(定理4.2),对每一点 $x' \in [a,b]$,都存在邻域 $U(x';\delta_{x'})$ 及正数 $M_{x'}$,使得

$$|f(x)| \leqslant M_{x'}, x \in U(x';\delta_{x'}) \cap [a,b].$$

考虑开区间集

$$H = \{U(x';\delta_{x'}) \mid x' \in [a,b]\},$$

显然 H 是$[a,b]$的一个无限开覆盖. 由有限覆盖定理,存在 H 的一个有限子集

$$H^* = \{U(x_i;\delta_i) \mid x_i \in [a,b], i = 1,2,\cdots,k\}$$

覆盖了$[a,b]$,且存在正数 $M_1, M_2, \cdots, M_k$,使得对一切 $x \in U(x_i;\delta_i) \cap [a,b]$ 有 $|f(x)| \leqslant M_i, i = 1,2,\cdots,k$. 令

$$M = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} M_i,$$

则对任何 $x \in [a,b]$, x 必属于某 $U(x_i;\delta_i) \Rightarrow |f(x)| \leqslant M_i \leqslant M$. 这就证得 f 在$[a,b]$上有界. □

[证法二](应用致密性定理) 倘若 f 在$[a,b]$上无上界,则对任何正整数 n,存在 $x_n \in [a,b]$,使得 $f(x_n) > n$. 依次取 $n = 1,2,\cdots$,则得到数列$\{x_n\} \subset [a,b]$. 由致密性定理,它含有收敛子列$\{x_{n_k}\}$,记 $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = \xi$. 由 $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$ 及数列极限的保不等式性,$\xi \in [a,b]$. 利用 f 在点 ξ 连续,推得

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi) < +\infty. \tag{1}$$

另一方面,由 x_n 的选取方法又有

$$f(x_{n_k}) > n_k \geqslant k \to +\infty \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = +\infty,$$

这与(1)式相矛盾. 所以 f 在$[a,b]$上有上界. 类似地可证 f 在$[a,b]$上有下界,从而 f 在$[a,b]$上有界. □

最大、最小值定理(定理 4.6) 若函数 f 在闭区间$[a,b]$上连续,则 f 在$[a,b]$上有最大值与最小值.

证 (应用确界原理) 由于已证得 f 在$[a,b]$上有界,故由确界原理,f 的值域 $f([a,b])$有上确界,记为 M. 以下我们证明:存在 $\xi \in [a,b]$,使 $f(\xi) = M$. 倘若不然,对一切 $x \in [a,b]$都有 $f(x) < M$. 令

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}, x \in [a,b].$$

易见函数 g 在$[a,b]$上连续,故 g 在$[a,b]$上有上界. 设 G 是 g 的一个上界,则

$$0 < g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leqslant G, \quad x \in [a,b].$$

从而推得

$$f(x) \leqslant M - \frac{1}{G}, x \in [a,b].$$

但这与 M 为 $f([a,b])$的上确界(最小上界)相矛盾. 所以必存在 $\xi \in [a,b]$,使 $f(\xi) = M$,即 f 在$[a,b]$上有最大值. 同理可证 f 在$[a,b]$上有最小值. □

介值性定理(定理 4.7) 设函数 f 在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a) \neq f(b)$. 若 μ 为介于 $f(a)$与 $f(b)$之间的任何实数($f(a) < \mu < f(b)$或 $f(a) > \mu > f(b)$),则存在 $x_0 \in (a,b)$,使得 $f(x_0) = \mu$.

证[证法一](应用确界原理) 不妨设 $f(a)<\mu<f(b)$.令 $g(x)=f(x)-\mu$,则 g 也是$[a,b]$上的连续函数,且 $g(a)<0,g(b)>0$.于是定理的结论转化为:存在 $x_0\in(a,b)$,使得 $g(x_0)=0$.这个简化的情形称为根的存在性定理(定理4.7的推论).

记 $E=\{x\mid g(x)>0,x\in[a,b]\}$.显然 E 为非空有界数集($E\subset[a,b]$且 $b\in E$),故由确界原理,E 有下确界,记 $x_0=\inf E$.因 $g(a)<0,g(b)>0$,由连续函数的局部保号性,存在 $\delta>0$,使得在$[a,a+\delta)$内 $g(x)<0$,在$(b-\delta,b]$内 $g(x)>0$,由此易见 $x_0\neq a,x_0\neq b$,即 $x_0\in(a,b)$.

下证 $g(x_0)=0$.倘若 $g(x_0)\neq0$,不妨设 $g(x_0)>0$,则又由局部保号性,存在 $U(x_0;\eta)$ ($\subset(a,b)$),使在其内 $g(x)>0$,特别有 $g\left(x_0-\frac{\eta}{2}\right)>0\Rightarrow x_0-\frac{\eta}{2}\in E$.但这与 $x_0=\inf E$ 相矛盾,故必有 $g(x_0)=0$. □

[证法二](应用区间套定理) 同上述证法一,我们把问题转化为证明根的存在性定理,即若函数 g 在$[a,b]$上连续,$g(a)<0,g(b)>0$,则存在 $x_0\in(a,b)$使得 $g(x_0)=0$.

将$[a,b]$等分为两个子区间$[a,c]$与$[c,b]$.若 $g(c)=0$,则 c 即为所求;若 $g(c)\neq0$,则当 $g(c)>0$ 时记$[a_1,b_1]=[a,c]$,当 $g(c)<0$ 时记$[a_1,b_1]=[c,b]$.于是有 $g(a_1)<0,g(b_1)>0$,且

$$[a_1,b_1]\subset[a,b],b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a).$$

再从区间$[a_1,b_1]$出发,重复上述过程,得到:或者在$[a_1,b_1]$的中点 c_1 上有 $g(c_1)=0$,或者有闭区间$[a_2,b_2]$,满足 $g(a_2)<0,g(b_2)>0$,且

$$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1],b_2-a_2=\frac{1}{2^2}(b-a).$$

将上述过程不断地进行下去,可能出现两种情形:

(1) 在某一区间的中点 c_i 上有 $g(c_i)=0$,则 c_i 即为所求;

(2) 在任一区间的中点 c_i 上均有 $g(c_i)\neq0$,则得到闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$,满足 $g(a_n)<0,g(b_n)>0$,且

$$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n],b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a),n=1,2,\cdots.$$

由区间套定理,存在点 $x_0\in[a_n,b_n],n=1,2,\cdots$.下证 $g(x_0)=0$.倘若 $g(x_0)\neq0$,不妨设 $g(x_0)>0$,则由局部保号性,存在 $U(x_0;\delta)$,使在其内有 $g(x)>0$.而由定理7.1的推论,当 n 充分大时有$[a_n,b_n]\subset U(x_0;\delta)$,因而有 $g(a_n)>0$.但这与$[a_n,b_n]$选取时应满足的 $g(a_n)<0$ 相矛盾,故必有 $g(x_0)=0$. □

一致连续性定理(定理 4.9) 若函数 f 在闭区间$[a,b]$上连续,则 f 在$[a,b]$上一致连续.

证[证法一](应用有限覆盖定理) 由 f 在$[a,b]$上的连续性,任给 $\varepsilon>0$,对每一点 $x\in[a,b]$,都存在 $\delta_x>0$,使得当 $x'\in U(x;\delta_x)$时有

$$|f(x')-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

考虑开区间集合

$$H=\left\{U\left(x,\frac{\delta_x}{2}\right)\middle|\, x\in[a,b]\right\},$$

显然 H 是$[a,b]$的一个开覆盖.由有限覆盖定理,存在 H 的一个有限子集

$$H^*=\left\{U\left(x_i,\frac{\delta_i}{2}\right)\middle|\, i=1,2,\cdots,k\right\}$$

覆盖了$[a,b]$.记

$$\delta=\min_{1\leqslant i\leqslant k}\left\{\frac{\delta_i}{2}\right\}>0.$$

对任何 $x',x''\in[a,b]$, $|x'-x''|<\delta$, x'必属于 H^* 中某开区间,设 $x'\in U\left(x_i;\frac{\delta_i}{2}\right)$即$|x'-x_i|<\frac{\delta_i}{2}$.此时有

$$|x''-x_i|\leqslant|x''-x'|+|x'-x_i|<\delta+\frac{\delta_i}{2}\leqslant\frac{\delta_i}{2}+\frac{\delta_i}{2}=\delta_i,$$

故由(2)式同时有

$$|f(x')-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2}\quad 和\quad |f(x'')-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由此得$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.所以 f 在$[a,b]$上一致连续. □

[证法二](应用致密性定理) 用反证法.倘若 f 在$[a,b]$上不一致连续,则存在某 $\varepsilon_0>0$,对任何 $\delta>0$,都存在相应的两点 $x',x''\in[a,b]$,尽管$|x'-x''|<\delta$,但有

$$|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon_0.$$

令 $\delta=\frac{1}{n}$(n 为正整数),与它相应的两点记为 $x_n',x_n''\in[a,b]$,尽管$|x'-x''|<\frac{1}{n}$,但有

$$|f(x'_n)-f(x''_n)|\geqslant\varepsilon_0. \tag{3}$$

当 n 取遍所有正整数时,得数列$\{x_n'\}$与$\{x_n''\}\subset[a,b]$.由致密性定理,存在$\{x_n'\}$的收敛子列$\{x_{n_k}'\}$,设 $x_{n_k}'\to x_0\in[a,b]$ $(k\to\infty)$.同时由

$$|x'_{n_k}-x''_{n_k}|<\frac{1}{n_k}\Rightarrow|x''_{n_k}-x_0|\leqslant|x''_{n_k}-x'_{n_k}|+|x'_{n_k}-x_0|\to 0\quad(k\to\infty),$$

又得 $x''_{n_k}\to x_0(k\to\infty)$.

最后,由(3)式有

$$|f(x'_{n_k})-f(x''_{n_k})|\geqslant\varepsilon_0,$$

在上式中令 $k\to\infty$,由 f 的连续性及数列极限的保不等式性,得到

$$0=|f(x_0)-f(x_0)|=\lim_{k\to\infty}|f(x'_{n_k})-f(x''_{n_k})|\geqslant\varepsilon_0.$$

这与 $\varepsilon_0>0$ 相矛盾.所以 f 在 $[a,b]$ 上一致连续. □

习 题

1. 设 f 为 $\mathbf{R}$ 上连续的周期函数.证明:f 在 $\mathbf{R}$ 上有最大值与最小值.

2. 设 I 为有限区间.证明:若 f 在 I 上一致连续,则 f 在 I 上有界.举例说明此结论当 I 为无限区间时不一定成立.

3. 证明:$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

---

4. 试用有限覆盖定理证明根的存在定理.

5. 证明:在 (a,b) 上的连续函数 f 为一致连续的充要条件是 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 都存在.

* §3 上极限和下极限

定义 1 若在数 a 的任一邻域内含有数列 $\{x_n\}$ 的无限多个项,则称 a 为 $\{x_n\}$ 的一个聚点[①].

例如,数列 $\left\{(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\right\}$ 有聚点 -1 与 1;数列 $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{4}\right\}$ 有 $-1,-\dfrac{\sqrt2}{2},0,\dfrac{\sqrt2}{2}$ 和 1 五个聚点;数列 $\left\{\dfrac1n\right\}$ 只有一个聚点 0;常数列 $\{1,1,\cdots,1,\cdots\}$ 只有一个聚点 1.

注 点列(或数列)的聚点定义与上一节中关于点集(或数集)的聚点定义是有区别的.当把点列看作点集时,点列中对应于相同数值的项,只能作为一个点来看待.如上述点列 $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{4}\right\}$ 作为点集来看待时,它仅含有五个点,即

$$\left\{\sin\frac{n\pi}{4}\right\}=\left\{-1,-\frac{\sqrt2}{2},0,\frac{\sqrt2}{2},1\right\},$$

---

① 本节中同前面一样,不区分实数与数轴上的点,因此点列的聚点等同于数列的聚点.数列或点列的聚点也称为**极限点**.

按点集聚点的定义,这个有限集没有聚点.然而,我们在点列聚点的定义中只考虑项,只要在一点的任意小邻域内聚集了无穷多个项(不论其数值是否相同),该点就成为点列的聚点.所以,点列的聚点实际上就是其收敛子列的极限.

定理 7.4 有界点列(数列)$\{x_n\}$至少有一个聚点,且存在最大聚点与最小聚点.

证 关于$\{x_n\}$聚点存在性的证明,完全类似于定理 7.2 的证明方法,只须把那个证明中的"无限多个点"改为"无限多个项"即可.

至于最大聚点的存在性,只须在定理 7.2 的证明过程中,当每次把区间$[a_{k-1},b_{k-1}]$等分为两个子区间时,若右边一个含有$\{x_n\}$中无穷多个项,则取它为$[a_k,b_k]$,否则取左边的子区间为$[a_k,b_k]$.这样的选取方法既保证了每次选出的$[a_k,b_k]$都含有$\{x_n\}$中无限多个项,同时在$[a_k,b_k]$的右边却至多只有$\{x_n\}$的有限个项,于是由区间套$\{[a_k,b_k]\}$所确定的点列$\{x_n\}$的聚点ξ必是$\{x_n\}$的最大聚点.因若不然,设另有$\{x_n\}$的聚点$\zeta>\xi$,则令$\delta=\frac{1}{3}(\zeta-\xi)>0$,在$U(\zeta;\delta)$内含有$\{x_n\}$中无限多个项.但当$n$充分大时,$U(\zeta,\delta)$将完全落在$[a_n,b_n]$的右边,这与区间列$\{[a_k,b_k]\}$的上述选取方法相矛盾.所以$\xi$必为$\{x_n\}$的最大聚点.

类似地,只要把每次优先挑选右边一个子区间改为优先挑选左边一个,就能证得最小聚点的存在性. □

定义 2 有界数列(点列)$\{x_n\}$的最大聚点$\overline{A}$与最小聚点$\underline{A}$分别称为$\{x_n\}$的**上极限**与**下极限**,记作

$$\overline{A}=\varlimsup_{n\to\infty}x_n,\quad \underline{A}=\varliminf_{n\to\infty}x_n.$$

由定理 7.4 立刻可得:任何有界数列必存在上、下极限.

例 1

$$\varlimsup_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}=1,\varliminf_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}=-1;$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sin\frac{n\pi}{4}=1,\varliminf_{n\to\infty}\sin\frac{n\pi}{4}=-1;$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$ □

定理 7.5 对任何有界数列$\{x_n\}$有

$$\varliminf_{n\to\infty}x_n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}x_n.$$

定理 7.6 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 的充要条件是$\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

以上两个定理的证明由定理 7.4 与定义 2 立即可得.

定理 7.7 设$\{x_n\}$为有界数列.

(1) $\overline{A}$ 为$\{x_n\}$上极限的充要条件是:任给 $\varepsilon>0$,

(i) 存在 $N>0$,使得当 $n>N$ 时有$x_n<\overline{A}+\varepsilon$;

(ii) 存在子列$\{x_{n_k}\}$,$x_{n_k}>\overline{A}-\varepsilon,k=1,2,\cdots$.

(2) $\underline{A}$ 为$\{x_n\}$下极限的充要条件是:任给 $\varepsilon>0$,

(i) 存在 $N>0$,使得当 $n>N$ 时有$x_n>\underline{A}-\varepsilon$;

(ii) 存在子列$\{x_{n_k}\}$,$x_{n_k}<\underline{A}+\varepsilon,k=1,2,\cdots$.

证 (1)[必要性] 因$\overline{A}$是$\{x_n\}$的聚点,故对任给的 $\varepsilon>0$,在 $U(\overline{A};\varepsilon)$内含有$\{x_n\}$中无穷多项,设为$\{x_{n_k}\}$,则有 $x_{n_k}>\overline{A}-\varepsilon,k=1,2,\cdots$.

又因 $\overline{A}$ 是$\{x_n\}$的最大聚点,故在 $\overline{A}+\varepsilon$ 的右边至多只有$\{x_n\}$的有限个项,设此有限项的最大下标为 N,则当 $n>N$ 时有$x_n<\overline{A}+\varepsilon$.

[充分性] 任给 $\varepsilon>0$,由条件(i)和(ii)易见,在 $U(\overline{A};\varepsilon)$内含有$\{x_n\}$中无穷多个项,故 $\overline{A}$ 是$\{x_n\}$的一个聚点.

又设 $\alpha>\overline{A}$.记 $\varepsilon=\frac{1}{2}(\alpha-\overline{A})$,则由条件(i)易见在 $U(\alpha;\varepsilon)$内至多只有$\{x_n\}$中有限个项,故 α 不是$\{x_n\}$的聚点.所以 $\overline{A}$ 是$\{x_n\}$的最大聚点.

(2) 类似地证明. □

定理 7.7 的另一种形式如下:

定理 7.7′ 设$\{x_n\}$为有界数列.

(1) $\overline{A}$ 为$\{x_n\}$上极限的充要条件是:对任何 $\alpha>\overline{A}$,$\{x_n\}$中大于 α 的项至多有限个;对任何 $\beta<\overline{A}$,$\{x_n\}$中大于 β 的项有无限多个.

(2) $\underline{A}$ 为$\{x_n\}$下极限的充要条件是:对任何 $\beta<\underline{A}$,$\{x_n\}$中小于 β 的项至多有限个;对任何 $\alpha>\underline{A}$,$\{x_n\}$中小于 α 的项有无限多个.

定理 7.8(上、下极限的保不等式性) 设有界数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$满足:存在 $N_0>0$,当 $n>N_0$ 时有 $a_n\leqslant b_n$,则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}a_n\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}b_n.$$

特别,若 α,β 为常数,又存在 $N_0>0$,当 $n>N_0$ 时有 $\alpha\leqslant a_n\leqslant\beta$,则

$$\alpha\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n\leqslant\beta.$$

这个定理的证明留给读者.

例 2 设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$为有界数列.证明

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n.\tag{1}$$

证 设$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=A$,$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}b_n=B$.由定理 7.7,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,当

$n > N$时有

$$a_n < A + \frac{\varepsilon}{2}, b_n < B + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow a_n + b_n < A + B + \varepsilon.$$

再利用上极限的保不等式性(定理 7.8)得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n + b_n) \leqslant A + B + \varepsilon.$$

故由 ε 的任意性得$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n + b_n) \leqslant A + B$,即(1)式成立. □

注 (1)式有可能成立严格的不等式. 例如,设 $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n+1}$,则易见(1)式左边等于 0,右边等于 2.

定理 7.9 设$\{x_n\}$为有界数列.

(1) $\overline{A}$ 为$\{x_n\}$上极限的充要条件是

$$\overline{A} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n}\{x_k\}; \tag{2}$$

(2) $\underline{A}$ 为$\{x_n\}$下极限的充要条件是

$$\underline{A} = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n}\{x_k\}. \tag{3}$$

做过第二章§3 习题 12 的读者,对这个定理应该不会感到陌生,并能自行写出其证明. 有些教科书上也用(2)、(3)分别作为有界数列$\{x_n\}$上、下极限的定义.

若定义 1 中的 a 可允许是非正常点 $+\infty$或 $-\infty$,则定理 7.4 可相应地扩充为:任一点列$\{x_n\}$至少有一个聚点,且存在最大聚点与最小聚点.

不难证明:无上(下)界点列的最大(小)聚点为 $+\infty(-\infty)$. 于是,无上(下)界点列有非正常上(下)极限 $+\infty(-\infty)$. 例如,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}((-1)^n + 1)n = +\infty, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}((-1)^n + 1)n = 0;$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(-1)^n n = +\infty, \underline{\lim_{n\to\infty}}(-1)^n n = -\infty.$$

注 对于非正常上、下极限,上述定理 7.5 至 7.9 也成立(其中定理 7.7 应作相应的修改. 例如,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$的充要条件是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty).$$

习　　题

1. 求以下数列的上、下极限:

(1) $\{1 + (-1)^n\}$;　　(2) $\left\{(-1)^n \frac{n}{2n+1}\right\}$;

(3) $\{2n + 1\}$;　　(4) $\left\{\frac{2n}{n+1}\sin\frac{n\pi}{4}\right\}$;

(5) $\left\{\dfrac{n^2+1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}\right\}$; (6) $\left\{\sqrt[n]{\left|\cos\dfrac{n\pi}{3}\right|}\right\}$.

2. 设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$为有界数列,证明:

(1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\varlimsup\limits_{n\to\infty}(-a_n)$;

(2) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$;

(3) 若 $a_n>0, b_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$,则

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \varliminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} a_nb_n, \quad \varlimsup_{n\to\infty} a_n \varlimsup_{n\to\infty} b_n \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_nb_n;$$

(4) 若 $a_n>0$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n>0$,则

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n}.$$

3. 证明:若$\{a_n\}$为递增数列,则$\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

---

4. 证明:若 $a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$且$\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=1$,则数列$\{a_n\}$收敛.

5. 证明定理 7.8.

6. 证明定理 7.9.

总练习题

1. 证明:$\{x_n\}$为有界数列的充要条件是$\{x_n\}$的任一子列都存在其收敛子列.

2. 设 f 在(a,b)内连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=0$. 证明:$f$ 在(a,b)内有最大值或最小值.

3. 设 f 在$[a,b]$上连续,又有$\{x_n\}\subset[a,b]$,使$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$. 证明:存在 $x_0\in[a,b]$,使得 $f(x_0)=A$.

4. 设函数 f 和 g 都在区间 I 上一致连续.

(1) 若 I 为有限区间,证明 $f\cdot g$ 在 I 上一致连续;

(2) 若 I 为无限区间,举例说明 $f\cdot g$ 在 I 上不一定一致连续.

5. 设 f 定义在(a,b)上. 证明:若对(a,b)内任一收敛数列$\{x_n\}$,极限$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$都存在,则 f 在(a,b)上一致连续.

6. 设函数 f 在$[a,+\infty)$上连续,且有斜渐近线,即有数 b 与 c,使得

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-bx-c]=0.$$

证明 f 在$[a,+\infty)$上一致连续.

第八章 不定积分

§1 不定积分概念与基本积分公式

正如加法有其逆运算减法,乘法有其逆运算除法一样,微分法也有它的逆运算——积分法.我们已经知道,微分法的基本问题是研究如何从已知函数求出它的导函数,那么与之相反的问题是:求一个未知函数,使其导函数恰好是某一已知函数.提出这个逆问题,首先是因为它出现在许多实际问题之中.例如:已知速度求路程;已知加速度求速度;已知曲线上每一点处的切线斜率(或斜率所满足的某一规律),求曲线方程等等.本章与其后两章(定积分与定积分的应用)构成一元函数积分学.

一 原函数与不定积分

定义 1 设函数 f 与 F 在区间 I 上都有定义.若

$$F'(x)=f(x),x\in I,$$

则称 F 为 f 在区间 I 上的一个**原函数**.

例如,$\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数,因为 $(\frac{1}{3}x^3)'=x^2$;又如 $-\frac{1}{2}\cos 2x$ 与 $-\frac{1}{2}\cos 2x+1$ 都是 $\sin 2x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的原函数,因为

$$(-\frac{1}{2}\cos 2x)'=(-\frac{1}{2}\cos 2x+1)'=\sin 2x.$$

如果这些简单的例子都可从基本求导公式反推而得的话,那么

$$F(x)=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

是 $f(x)=\arctan x$ 的一个原函数,就不那样明显了.事实上,研究原函数必须解决下面两个重要问题:

1. 满足何种条件的函数必定存在原函数? 如果存在,是否唯一?

2. 若已知某个函数的原函数存在,又怎样把它求出来?

关于第一个问题,我们用下面两个定理来回答;至于第二个问题,其解答则是本章接着要介绍的各种积分方法.

定理 8.1　若函数 f 在区间 I 上连续，则 f 在 I 上存在原函数 F，即 $F'(x)=f(x),x\in I$.

本定理要到第九章 §5 中才能获得证明.

由于初等函数为连续函数，因此每个初等函数都有原函数（只是初等函数的原函数不一定仍是初等函数）. 当然，一个函数如果存在间断点，那么此函数在其间断点所在的区间上就不一定存在原函数（参见本节习题第 4 题）.

定理 8.2　设 F 是 f 在区间 I 上的一个原函数，则

(i) $F+C$ 也是 f 在 I 上的原函数，其中 C 为任意常量函数[①]；

(ii) f 在 I 上的任意两个原函数之间，只可能相差一个常数.

证(i)这是因为 $[F(x)+C]'=F'(x)=f(x),x\in I$.

(ii) 设 F 和 G 是 f 在 I 上的任意两个原函数，则有

$$\begin{aligned}[F(x)-G(x)]' &= F'(x)-G'(x) \\ &= f(x)-f(x)=0,x\in I.\end{aligned}$$

根据第六章拉格朗日中值定理的推论，知道

$$F(x)-G(x)\equiv C,x\in I. \qquad □$$

定义 2　函数 f 在区间 I 上的全体原函数称为 f 在 I 上的**不定积分**，记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x, \tag{1}$$

其中称 $\int$ 为积分号，$f(x)$为**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$ 为**被积表达式**[②]，x 为**积分变量**. 尽管记号(1)中各个部分都有其特定的名称，但在使用时必须把它们看作一整体.

由定义 2 可见，不定积分与原函数是总体与个体的关系，即若 F 是 f 的一个原函数，则 f 的不定积分是一个函数族 $\{F+C\}$，其中 C 是任意常数. 为方便起见，写作

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C. \tag{2}$$

这时又称 C 为**积分常数**，它可取任一实数值. 于是又有

$$\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = [F(x)+C]' = f(x), \tag{3}$$

$$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}[F(x)+C] = f(x)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

按照写法(2)，本节开头所举的几个例子可写作

① 这里既把 C 看作常量函数，又把它作为该常量函数的函数值. 在不致混淆时，以后常说"C 为任意常数".

② 不久可看到，被积表达式可认同为 f 的原函数 F 的微分，即 $\mathrm{d}F=F'(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$.

$$\int x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C,$$

$$\int \sin 2x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos 2x + C,$$

$$\int \arctan x\mathrm{d}x = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

此外,一个函数"存在不定积分"与"存在原函数"显然是等同的说法.

不定积分的几何意义 若 F 是 f 的一个原函数,则称 $y=F(x)$ 的图象为 f 的一条**积分曲线**.于是,f 的不定积分在几何上表示 f 的某一积分曲线沿纵轴方向任意平移所得一切积分曲线组成的曲线族(图 8-1).显然,若在每一条积分曲线上横坐标相同的点处作切线,则这些切线互相平行.

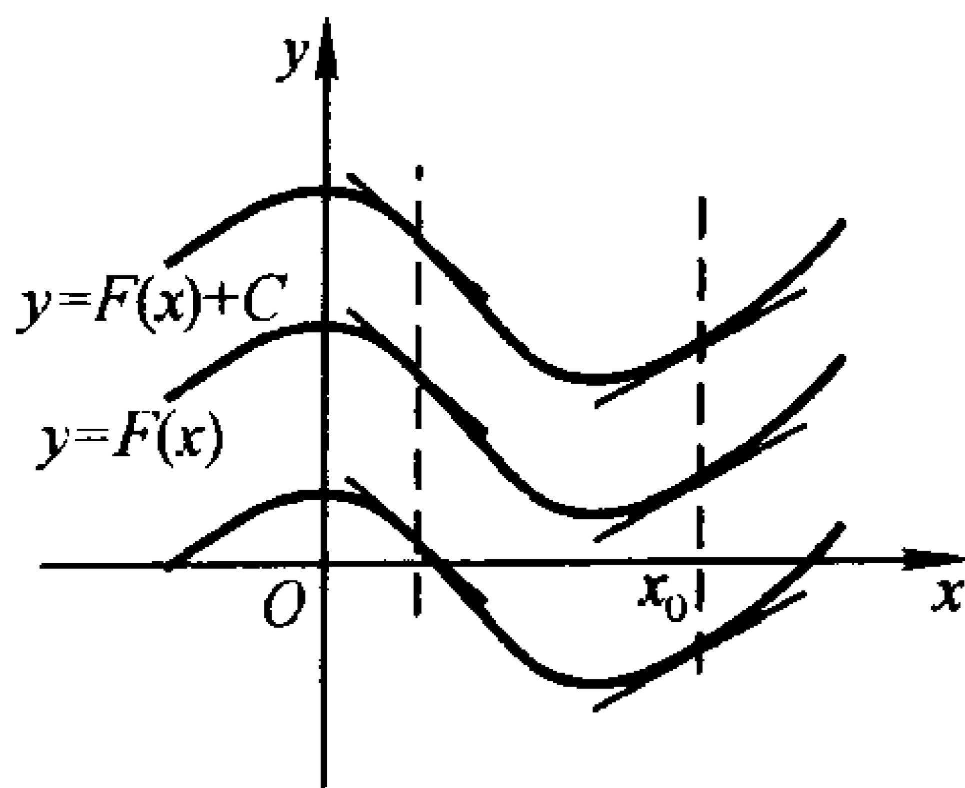


图 8-1

在求原函数的具体问题中,往往先求出全体原函数,然后从中确定一个满足条件 $F(x_0)=y_0$(称为**初始条件**,它由具体问题所规定)的原函数,它就是积分曲线族中通过点 (x_0,y_0)的那一条积分曲线.例如,质点作匀加速直线运动时,$a(t)=v'(t)=a$,则

$$v(t) = \int a\mathrm{d}t = at + C.$$

若已知 $v(t_0)=v_0$,代入上式后确定积分常数 $C=v_0-at_0$,于是就有

$$v(t) = a(t-t_0) + v_0.$$

又因 $s'(t)=v(t)$,所以又有

$$\begin{aligned} s(t) &= \int [a(t-t_0)+v_0]\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}a(t-t_0)^2 + v_0 t + C_1. \end{aligned}$$

若已知 $s(t_0)=s_0$,则 $C_1=s_0-v_0t_0$,代入上式得到

$$s(t) = \frac{1}{2}a(t-t_0)^2 + v_0(t-t_0) + s_0.$$

二 基本积分表

怎样求原函数? 读者很快就会发现这要比求导数困难得多.原因在于原函数的定义不像导数定义那样具有构造性,即它只告诉我们其导数恰好等于某个已知函数 f,而没有指出怎样由 f 求出它的原函数的具体形式和途径.因此,我

们只能先按照微分法的已知结果去试探.

首先,我们把基本导数公式改写成基本积分公式:

1. $\int 0\mathrm{d}x = C$.

2. $\int 1\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C$.

3. $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1, x > 0)$.

4. $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$ [①] $(x \neq 0)$.

5. $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C$.

6. $\int a^{x}\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C \ (a > 0, a \neq 1)$.

7. $\int \cos ax\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin ax + C \ (a \neq 0)$.

8. $\int \sin ax\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos ax + C \ (a \neq 0)$.

9. $\int \sec^{2}x\mathrm{d}x = \tan x + C$.

10. $\int \csc^{2}x\mathrm{d}x = -\cot x + C$.

11. $\int \sec x \cdot \tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$.

12. $\int \csc x \cdot \cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$.

13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2}}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_{1}$.

14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2}} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C_{1}$.

上列基本积分公式,读者必须牢牢记住,因为其他函数的不定积分经运算变形后,最后归为这些基本不定积分.当然,仅有这些基本公式是不够用的,即使像 $\ln x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x, \arcsin x, \arctan x$ 这样一些基本初等函数,现在还不知道怎样去求得它们的原函数.所以我们还需要从一些求导法则去导出相应的不定积分法则,并逐步扩充不定积分公式.

---

① 公式 4 适用于不含坐标原点的任何区间,读者容易验证

$$(\ln|x| + C)' = \frac{1}{x}, x \neq 0.$$

最简单的是从导数线性运算法则得到不定积分的线性运算法则:

定理 8.3 若函数 f 与 g 在区间 I 上都存在原函数, k_1、k_2 为两个任意常数,则 k_1f+k_2g 在 I 上也存在原函数,且

$$\int[k_1f(x)+k_2g(x)]\mathrm{d}x = k_1\int f(x)\mathrm{d}x + k_2\int g(x)\mathrm{d}x. \tag{5}$$

证 这是因为

$$\left[k_1\int f(x)\mathrm{d}x + k_2\int g(x)\mathrm{d}x\right]' = k_1\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' + k_2\left(\int g(x)\mathrm{d}x\right)'$$
$$= k_1f(x)+k_2g(x).$$ □

线性法则(5)的一般形式为

$$\int\left(\sum_{i=1}^{n}k_if_i(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}\left(k_i\int f_i(x)\mathrm{d}x\right). \tag{6}$$

根据上述线性运算法则和基本积分公式,可求得一些简单函数的不定积分.

例 1 $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

$$\int p(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}x^2+a_nx+C.$$ □

例 2 $\displaystyle\int\frac{x^4+1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int\left(x^2-1+\frac{2}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x + 2\arctan x + C.$$ □

例 3 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2x\sin^2x} = \int\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x\sin^2x}\mathrm{d}x$

$$= \int(\csc^2x+\sec^2x)\mathrm{d}x = -\cot x + \tan x + C.$$ □

例 4 $\displaystyle\int\cos 3x\cdot\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(\sin 4x - \sin 2x)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C$$
$$= -\frac{1}{8}(\cos 4x - 2\cos 2x) + C.$$ □

例 5 $\displaystyle\int(10^x-10^{-x})^2\mathrm{d}x = \int(10^{2x}+10^{-2x}-2)\mathrm{d}x$

$$= \int[(10^2)^x+(10^{-2})^x-2]\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2\ln 10}(10^{2x}-10^{-2x}) - 2x + C.$$ □

习　　题

1. 验证下列等式,并与(3)、(4)两式相比照:

(1) $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)+C$;　　(2) $\int \mathrm{d}f(x) = f(x)+C$.

2. 求一曲线 $y=f(x)$，使得在曲线上每一点 (x,y) 处的切线斜率为 $2x$，且通过点 $(2,5)$.

3. 验证 $y=\frac{x^2}{2}\operatorname{sgn} x$ 是 $|x|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数.

4. 据理说明为什么每一个含有第一类间断点的函数都没有原函数?

5. 求下列不定积分：

(1) $\int\left(1-x+x^3-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2gx}}$ (g 为正常数);　　(4) $\int(2^x+3^x)^2\mathrm{d}x$;

(5) $\int\frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}\mathrm{d}x$;　　(6) $\int\frac{x^2}{3(1+x^2)}\mathrm{d}x$;

(7) $\int\tan^2 x\,\mathrm{d}x$;　　(8) $\int\sin^2 x\,\mathrm{d}x$;

(9) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$;　　(10) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\mathrm{d}x$;

(11) $\int 10^t\cdot 3^{2t}\mathrm{d}t$;　　(12) $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$;

(13) $\int\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\mathrm{d}x$;　　(14) $\int(\cos x+\sin x)^2\mathrm{d}x$;

(15) $\int\cos x\cdot\cos 2x\,\mathrm{d}x$;　　(16) $\int(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^3\mathrm{d}x$.

§2 换元积分法与分部积分法

一 换元积分法

由复合函数求导法，可以导出换元积分法.

定理 8.4(换元积分法)　设 $g(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有定义，$u=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $\alpha\leqslant\varphi(x)\leqslant\beta$，$x\in[a,b]$，并记

$$f(x)=g(\varphi(x))\varphi'(x),\ x\in[a,b].$$

(i) 若 $g(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上存在原函数 $G(u)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上也存在原函数 $F(x)$，$F(x)=G(\varphi(x))+C$，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int g(u)\mathrm{d}u$$
$$=G(u)+C=G(\varphi(x))+C. \tag{1}$$

(ii) 又若 $\varphi'(x)\neq 0$，$x\in[a,b]$，则上述命题(i)可逆，即当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上

存在原函数 $F(x)$ 时，$g(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上也存在原函数 $G(u)$，且 $G(u)=F(\varphi^{-1}(u))+C$，即

$$\int g(u)\mathrm{d}u=\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x$$
$$=F(x)+C=F(\varphi^{-1}(u))+C. \tag{2}$$

证 (i) 用复合函数求导法进行验证：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(\varphi(x))=G'(\varphi(x))\varphi'(x)$$
$$=g(\varphi(x))\varphi'(x)=f(x).$$

所以 $f(x)$ 以 $G(\varphi(x))$ 为其原函数，(1)式成立.

(ii) 在 $\varphi'(x)\neq 0$ 的条件下，$u=\varphi(x)$ 存在反函数 $x=\varphi^{-1}(u)$，且

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=\left.\frac{1}{\varphi'(x)}\right|_{x=\varphi^{-1}(u)}.$$

于是又能验证(2)式成立：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}F(\varphi^{-1}(u))=F'(x)\cdot\frac{1}{\varphi'(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{\varphi'(x)}$$
$$=g(\varphi(x))\varphi'(x)\cdot\frac{1}{\varphi'(x)}$$
$$=g(\varphi(x))=g(u).$$

□

上述换元积分法中的公式(1)与(2)反映了正、逆两种换元方式，习惯上分别称为**第一换元积分法**和**第二换元积分法**(公式(1)与(2)分别称为**第一换元公式**与**第二换元公式**).

下面的例1至例5采用第一换元积分法求解.在使用公式(1)时，也可把它写成如下简便形式：

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int g(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x)=G(\varphi(x))+C. \tag{1'}$$

例1 求 $\int\tan x\mathrm{d}x$.

解 由

$$\int\tan x\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=-\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}\mathrm{d}x,$$

可令 $u=\cos x$，$g(u)=\frac{1}{u}$，则得

$$\int\tan x\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{u}\mathrm{d}u=-\ln|u|+C$$
$$=-\ln|\cos x|+C.$$

□

例2 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}\ (a>0)$.

解 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ （令 $u=\frac{x}{a}$）

$$=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\frac{1}{a}\arctan u+C$$

$$=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$$ □

对换元积分法较熟练后，可以不写出换元变量 u，而直接使用公式(1′).

例 3 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

$$=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$ □

例 4 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}\ (a\neq 0)$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{\mathrm{d}(x-a)}{x-a}-\int\frac{\mathrm{d}(x+a)}{x+a}\right]$$

$$=\frac{1}{2a}[\ln|x-a|-\ln|x+a|]+C$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$ □

例 5 求 $\displaystyle\int\sec x\,\mathrm{d}x$.

解 [解法一]利用例 4 的结果可得

$$\int\sec x\,\mathrm{d}x=\int\frac{\cos x}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1-\sin^2x}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C.$$

[解法二]

$$\int\sec x\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + C.$$ □

这两种解法所得结果只是形式上的不同,请读者将它们统一起来.

从以上几例看到,使用第一换元积分法的关键在于把被积表达式 $f(x)\mathrm{d}x$ 凑成$g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 的形式,以便选取变换 $u=\varphi(x)$,化为易于积分的 $\int g(u)\mathrm{d}u$. 最终不要忘记把新引入的变量(u)还原为起始变量(x).

第二换元公式(2)从形式上看是公式(1)的逆行,但目的都是为了化为容易求得原函数的形式(最终同样不要忘记变量还原). 以下例 6 至例 9 采用第二换元积分法求解.

例 6 求 $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}+\sqrt[3]{u}}$.

解 为去掉被积函数中的根式,取根次数 2 与 3 的最小公倍数 6,并令 $u=x^6$,则可把原来的不定积分化为简单有理式的积分:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}+\sqrt[3]{u}} = \int \frac{6x^5}{x^3+x^2}\mathrm{d}x = 6\int\left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$= 6\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1|\right) + C$$

$$= 2\sqrt{u} - 3\sqrt[3]{u} + 6\sqrt[6]{u} - 6\ln|\sqrt[6]{u}+1| + C.$$ □

例 7 求 $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$.

解 令 $x=a\sin t$, $|t|<\frac{\pi}{2}$(这是存在反函数 $t=\arcsin\frac{x}{a}$ 的一个单调区间). 于是

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int a\cos t\ \mathrm{d}(a\sin t) = a^2\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right) + C.$$ □

例 8 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}\ (a>0)$.

解 令 $x=a\sec t$, $0<t<\frac{\pi}{2}$,于是有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int\frac{a\sec t\cdot\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t = \int\sec t\,\mathrm{d}t$$

$$= \ln|\sec t + \tan t| + C.$$

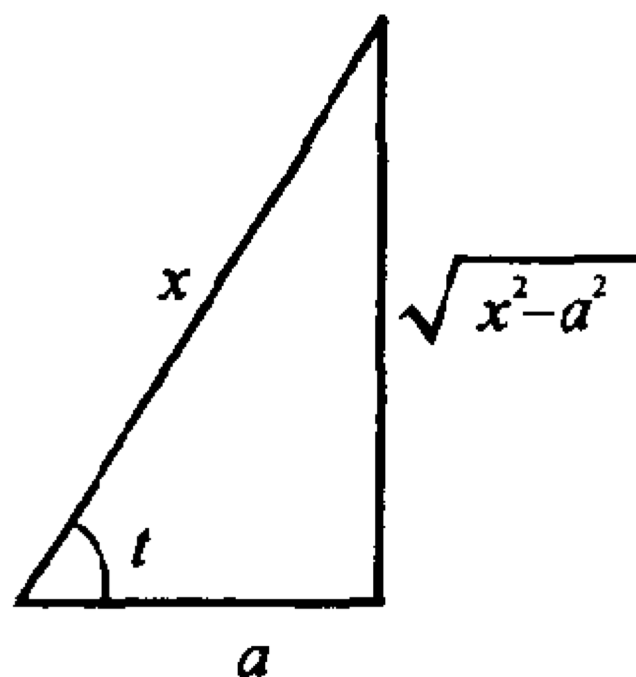


图 8-2

借助图 8-2 的辅助直角三角形，便于求出 $\sec t = \dfrac{x}{a}$，$\tan t = \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$，故得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C_1.$$ □

例 9 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}\ (a>0)$.

解 令 $x = a\tan t$，$|t| < \dfrac{\pi}{2}$，于是有

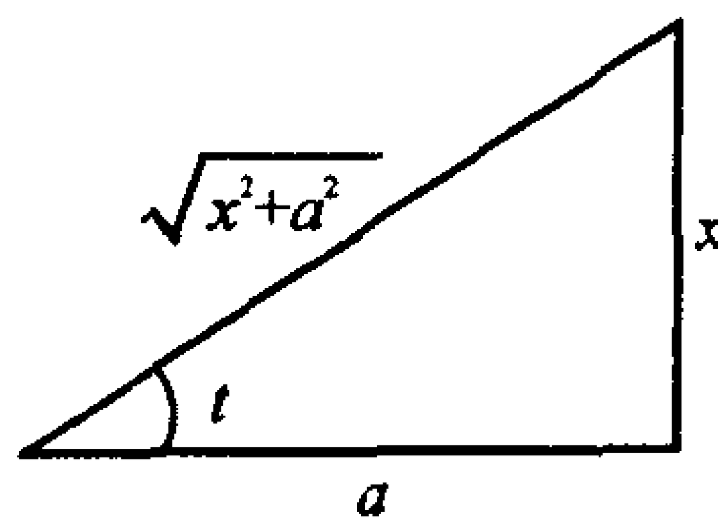


图 8-3

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \int \frac{a\sec^2 t}{a^4\sec^4 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2a^3}\int (1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2a^3}(t + \sin t\cos t) + C$$

$$= \frac{1}{2a^3}\left(\arctan\frac{x}{a} + \frac{ax}{x^2+a^2}\right) + C.$$ □

有些不定积分还可采用两种换元方法来计算.

例 10 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

解 [解法一] 采用第一换元积分法：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}} = \int \frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \int \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u = \sqrt{1-u^2} + C$$

$$= \frac{1}{x}\sqrt{x^2-1} + C.$$

[解法二] 采用第二换元积分法(令 $x = \sec t$)：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec t\cdot\tan t}{\sec^2 t\cdot\tan t}\mathrm{d}t = \int \cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= \sin t + C = \frac{1}{x}\sqrt{x^2-1} + C.$$ □

二 分部积分法

由乘积求导法,可以导出分部积分法.

定理 8.5(分部积分法) 若 $u(x)$ 与 $v(x)$ 可导,不定积分 $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ 存在,则 $\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ 也存在,并有

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

证 由

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

或

$$u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x),$$

对上式两边求不定积分,就得到(3)式. □

公式(3)称为**分部积分公式**,常简写作

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u. \tag{4}$$

例 11 求 $\int x\cos x\mathrm{d}x$.

解 令 $u=x, v'=\cos x$,则有 $u'=1, v=\sin x$. 由公式(3)求得

$$\int x\cos x\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C.$$ □

例 12 求 $\int \arctan x\mathrm{d}x$.

解 令 $u=\arctan x, v'=1$,则 $u'=\dfrac{1}{1+x^2}, v=x$,由公式(3)求得

$$\int \arctan x\mathrm{d}x = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$ □

例 13 求 $\int x^3\ln x\mathrm{d}x$.

解 令 $u=\ln x, v'=x^3$,由公式(4)则有

$$\int x^3\ln x\mathrm{d}x = \int \ln x\mathrm{d}\left(\frac{x^4}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(x^4\ln x - \int x^3\mathrm{d}x\right) = \frac{x^4}{16}(4\ln x - 1) + C.$$ □

有时需要接连使用几次分部积分才能求得结果;有些还会出现与原不定积分同类的项,需经移项合并后方能完成求解.现分别示例如下.

例 14 求 $\int x^2 e^{-x} dx$.

解
$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x} dx &= \int x^2 d(-e^{-x}) = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} dx \\ &= -x^2 e^{-x} + 2\int x d(-e^{-x}) \\ &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2\int e^{-x} dx \\ &= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C.\end{aligned}$$
□

例 15 求 $I_1 = \int e^{ax}\cos bx dx$ 和 $I_2 = \int e^{ax}\sin b x dx$.

解
$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{a}\int \cos bx d(e^{ax}) = \frac{1}{a}\left(e^{ax}\cos bx + b\int e^{ax}\sin bx\right) \\ &= \frac{1}{a}(e^{ax}\cos bx + bI_2),\end{aligned}$$
$$I_2 = \frac{1}{a}\int \sin bx d(e^{ax}) = \frac{1}{a}(e^{ax}\sin bx - bI_1).$$

由此得到
$$\begin{cases} aI_1 - bI_2 = e^{ax}\cos bx, \\ bI_1 + aI_2 = e^{ax}\sin bx. \end{cases}$$

解此方程组,求得
$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx dx = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2 + b^2} + C,$$
$$I_2 = \int e^{ax}\sin bx dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2} + C.$$
□

习 题

1. 应用换元积分法求下列不定积分:

(1) $\int \cos(3x + 4) dx$; (2) $\int x e^{2x^2} dx$;

(3) $\int \frac{dx}{2x + 1}$; (4) $\int (1 + x)^n dx$;

(5) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{3 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - 3x^2}}\right) dx$; (6) $\int 2^{2x+3} dx$;

(7) $\int \sqrt{8 - 3x} dx$; (8) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{7 - 5x}}$;

(9) $\int x\sin x^2 \mathrm{d}x$;

(10) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$;

(11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$;

(12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$;

(13) $\int \csc x \mathrm{d}x$;

(14) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(15) $\int \frac{x}{4+x^4}\mathrm{d}x$;

(16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$;

(17) $\int \frac{x^4}{(1-x^5)^3}\mathrm{d}x$;

(18) $\int \frac{x^3}{x^8-2}\mathrm{d}x$;

(19) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)}$;

(20) $\int \cot x \mathrm{d}x$;

(21) $\int \cos^5 x \mathrm{d}x$;

(22) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x}$;

(23) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$;

(24) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+8}\mathrm{d}x$;

(25) $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3}\mathrm{d}x$;

(26) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}\ (a>0)$;

(27) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\ (a>0)$;

(28) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(29) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$;

(30) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x$.

2. 应用分部积分法求下列不定积分:

(1) $\int \arcsin x \mathrm{d}x$;

(2) $\int \ln x \mathrm{d}x$;

(3) $\int x^2\cos x \mathrm{d}x$;

(4) $\int \frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x$;

(5) $\int (\ln x)^2 \mathrm{d}x$;

(6) $\int x\arctan x \mathrm{d}x$;

(7) $\int \left[\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right]\mathrm{d}x$;

(8) $\int (\arcsin x)^2 \mathrm{d}x$;

(9) $\int \sec^3 x \mathrm{d}x$;

(10) $\int \sqrt{x^2\pm a^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

3. 求下列不定积分:

(1) $\int [f(x)]^\alpha f'(x)\mathrm{d}x\ (\alpha\neq -1)$;

(2) $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$;

(4) $\int \mathrm{e}^{f(x)}f'(x)\mathrm{d}x$.

---

4. 证明:

(1) 若 $I_n=\int \tan^n x \mathrm{d}x, n=2,3,\cdots$,则

$$I_n = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - I_{n-2}.$$

(2) 若 $I(m,n) = \int \cos^m x \sin^n x \mathrm{d}x$，则当 $m+n \neq 0$ 时，

$$\begin{aligned} I(m,n) &= \frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}I(m-2,n) \\ &= -\frac{\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}I(m,n-2), \\ & n,m = 2,3,\cdots. \end{aligned}$$

5. 利用上题的递推公式计算：

(1) $\int \tan^3 x \mathrm{d}x$；　　(2) $\int \tan^4 x \mathrm{d}x$；

(3) $\int \cos^2 x \sin^4 x \mathrm{d}x$.

6. 导出下列不定积分对于正整数 n 的递推公式：

(1) $I_n = \int x^n e^{kx} \mathrm{d}x$；　　(2) $I_n = \int (\ln x)^n \mathrm{d}x$；

(3) $I_n = \int (\arcsin x)^n \mathrm{d}x$；　　(4) $I_n = \int e^{ax}\sin^n x \mathrm{d}x$.

7. 利用上题所得递推公式计算：

(1) $\int x^3 e^{2x} \mathrm{d}x$；　　(2) $\int (\ln x)^3 \mathrm{d}x$；

(3) $\int (\arcsin x)^3 \mathrm{d}x$；　　(4) $\int e^x \sin^3 x \mathrm{d}x$.

§3 有理函数和可化为有理函数的不定积分

至此我们已经学得了一些最基本的积分方法.在此基础上,本节将讨论某些特殊类型的不定积分,这些不定积分无论怎样复杂,原则上都可按一定的步骤把它求出来.

一 有理函数的不定积分

有理函数是指由两个多项式函数的商所表示的函数,其一般形式为

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_n}{\beta_0 x^m + \beta_1 x^{m-1} + \cdots + \beta_m}, \tag{1}$$

其中 n,m 为非负整数,$\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_m$ 都是常数,且 $\alpha_0 \neq 0$,$\beta_0 \neq 0$.若 $m > n$,则称它为**真分式**;若 $m \leqslant n$,则称它为**假分式**.由多项式的除法可知,假分式总能化为一个多项式与一个真分式之和.由于多项式的不定积分是容易求得的,因此只需研究真分式的不定积分,故设(1)为一有理真分式.

根据代数知识,有理真分式必定可以表示成若干个部分分式之和(称为**部分**

分式分解).因而问题归结为求那些部分分式的不定积分.为此,先把怎样分解部分分式的步骤简述如下(可与后面的例1对照着做):

第一步 对分母 $Q(x)$在实系数内作标准分解:

$$Q(x)=(x-a_1)^{\lambda_1}\cdots(x-a_s)^{\lambda_s}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{\mu_t},\tag{2}$$

其中 $\beta_0=1,\lambda_i,\mu_j(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,t)$均为自然数,而且

$$\sum_{i=1}^{s}\lambda_i+2\sum_{j=1}^{t}\mu_j=m;p_j^2-4q_j<0,j=1,2,\cdots,t.$$

第二步 根据分母的各个因式分别写出与之相应的部分分式:对于每个形如$(x-a)^k$ 的因式,它所对应的部分分式是

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k};$$

对每个形如$(x^2+px+q)^k$ 的因式,它所对应的部分分式是

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k}.$$

把所有部分分式加起来,使之等于 $R(x)$.(至此,部分分式中的常数系数 A_i,B_i,C_i 尚为待定的.)

第三步 确定待定系数:一般方法是将所有部分分式通分相加,所得分式的分母即为原分母 $Q(x)$,而其分子亦应与原分子 $P(x)$恒等.于是,按同幂项系数必定相等,得到一组关于待定系数的线性方程,这组方程的解就是需要确定的系数.

例1 对 $R(x)=\dfrac{2x^4-x^3+4x^2+9x-10}{x^5+x^4-5x^3-2x^2+4x-8}$作部分分式分解.

解 按上述步骤依次执行如下:

$$\begin{aligned}Q(x)&=x^5+x^4-5x^3-2x^2+4x-8\\&=(x-2)(x+2)^2(x^2-x+1).\end{aligned}$$

部分分式分解的待定形式为

$$R(x)=\frac{A_0}{x-2}+\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{(x+2)^2}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.\tag{3}$$

用 $Q(x)$乘上式两边,得一恒等式

$$\begin{aligned}2x^4-x^3+4x^2+9x-10&\equiv A_0(x+2)^2(x^2-x+1)\\&+A_1(x-2)(x+2)(x^2-x+1)+A_2(x-2)(x^2-x+1)\\&+(Bx+C)(x-2)(x+2)^2.\end{aligned}\tag{4}$$

然后使等式两边同幂项系数相等，得到线性方程组：

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + B = 2, \cdots\cdots x^4 \text{ 的系数} \\ 3A_0 - A_1 + A_2 + 2B + C = -1, \cdots\cdots x^3 \text{ 的系数} \\ A_0 - 3A_1 - 3A_2 - 4B + 2C = 4, \cdots\cdots x^2 \text{ 的系数} \\ 4A_1 + 3A_2 - 8B - 4C = 9, \cdots\cdots x \text{ 的系数} \\ 4A_0 - 4A_1 - 2A_2 - 8C = -10. \cdots\cdots \text{常数项} \end{cases}$$

求出它的解：$A_0=1, A_1=2, A_2=-1, B=-1, C=1$，并代入(3)式，这便完成了对 $R(x)$ 的部分分式分解：

$$R(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{x-1}{x^2-x+1}. \qquad \square$$

上述**待定系数法**有时可用较简便的方法去替代. 例如可将 x 的某些特定值(如 $Q(x)=0$ 的根)代入(4)式，以便得到一组较简单的方程，或直接求得某几个待定系数的值. 对于上例，若分别用 $x=2$ 和 $x=-2$ 代入(4)式，立即求得

$$A_0 = 1 \quad \text{和} \quad A_2 = -1.$$

于是(4)式简化成为

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^3 + 12x - 16 = & A_1(x-2)(x+2)(x^2-x+1) \\ & + (Bx+C)(x-2)(x+2)^2. \end{aligned}$$

为继续求得 A_1, B, C，还可用 x 的三个简单值代入上式，如令 $x=0,1,-1$，相应得到

$$\begin{cases} A_1 + 2C = 4, \\ A_1 + 3B + 3C = 2, \\ 3A_1 - B + C = 8. \end{cases}$$

由此易得 $A_1=2, B=-1, C=1$. 这就同样确定了所有待定系数.

一旦完成了部分分式分解，最后求各个部分分式的不定积分. 由以上讨论知道，任何有理真分式的不定积分都将归为求以下两种形式的不定积分：

$$(\text{I}) \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k}; \qquad (\text{II}) \int \frac{Lx+M}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x \ (p^2-4q<0).$$

对于(Ⅰ)，已知

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k} = \begin{cases} \ln|x-a| + C, & k=1, \\ \dfrac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C, & k>1. \end{cases}$$

对于(Ⅱ)，只要作适当换元$\left(\text{令 } t = x + \dfrac{p}{2}\right)$，便化为

$$\int \frac{Lx+M}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x = \int \frac{Lt+N}{(t^2+r^2)^k}\mathrm{d}t$$

$$= L\int\frac{t}{(t^2+r^2)^k}\mathrm{d}t + N\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+r^2)^k}, \tag{5}$$

其中 $r^2=q-\frac{p^2}{4}, N=M-\frac{p}{2}L$.

当 $k=1$ 时,(5)式右边两个不定积分分别为

$$\int\frac{t}{t^2+r^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(t^2+r^2)+C,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+r^2} = \frac{1}{r}\arctan\frac{t}{r}+C. \tag{6}$$

当 $k\geqslant 2$ 时,(5)式右边第一个不定积分为

$$\int\frac{t}{(t^2+r^2)^k}\mathrm{d}t = \frac{1}{2(1-k)(t^2+r^2)^{k-1}}+C.$$

对于第二个不定积分,记

$$I_k = \int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+r^2)^k},$$

可用分部积分法导出递推公式如下:

$$\begin{aligned}
I_k &= \frac{1}{r^2}\int\frac{(t^2+r^2)-t^2}{(t^2+r^2)^k}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{r^2}I_{k-1} - \frac{1}{r^2}\int\frac{t^2}{(t^2+r^2)^k}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{r^2}I_{k-1} + \frac{1}{2r^2(k-1)}\int t\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{(t^2+r^2)^{k-1}}\right) \\
&= \frac{1}{r^2}I_{k-1} + \frac{1}{2r^2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+r^2)^{k-1}} - I_{k-1}\right].
\end{aligned}$$

经整理得到

$$I_k = \frac{t}{2r^2(k-1)(t^2+r^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2r^2(k-1)}I_{k-1}. \tag{7}$$

重复使用递推公式(7),最终归为计算 I_1,这已由(6)式给出.

把所有这些局部结果代回(5)式,并令 $t=x+\frac{p}{2}$,就完成了对不定积分(Ⅱ)的计算.

例 2 求 $\int\frac{x^2+1}{(x^2-2x+2)^2}\mathrm{d}x$.

解 在本题中,由于被积函数的分母只有单一因式,因此,部分分式分解能被简化为

$$\frac{x^2+1}{(x^2-2x+2)^2} = \frac{(x^2-2x+2)+(2x-1)}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$= \frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2x - 1}{(x^2 - 2x + 2)^2}.$$

现分别计算部分分式的不定积分如下：

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2 + 1} = \arctan(x-1) + C_1.$$

$$\int \frac{2x - 1}{(x^2 - 2x + 2)^2}dx = \int \frac{(2x-2)+1}{(x^2 - 2x + 2)^2}dx$$
$$= \int \frac{d(x^2 - 2x + 2)}{(x^2 - 2x + 2)^2} + \int \frac{d(x-1)}{[(x-1)^2 + 1]^2}$$
$$= \frac{-1}{x^2 - 2x + 2} + \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2}.$$

由递推公式(7)，求得其中

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} = \frac{t}{2(t^2 + 1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + 1}$$
$$= \frac{x - 1}{2(x^2 - 2x + 2)} + \frac{1}{2}\arctan(x-1) + C_2.$$

于是得到

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 2x + 2)^2}dx = \frac{x - 3}{2(x^2 - 2x + 2)} + \frac{3}{2}\arctan(x-1) + C. \qquad \square$$

下面再介绍几类被积函数能变换为有理函数的不定积分.

二 三角函数有理式的不定积分

由 $u(x)$、$v(x)$ 及常数经过有限次四则运算所得到的函数称为关于 $u(x)$、$v(x)$ 的有理式，并用 $R(u(x), v(x))$ 表示.

$\int R(\sin x, \cos x)dx$ 是三角函数有理式的不定积分. 一般通过变换 $t = \tan\frac{x}{2}$，可把它化为有理函数的不定积分. 这是因为

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \tag{8}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \tag{9}$$

$$dx = \frac{2}{1 + t^2}dt, \tag{10}$$

所以 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$

例 3 求 $\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x.$

解 令 $t=\tan\frac{x}{2}$，将(8)、(9)、(10)代入被积表达式，

$$\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\int\frac{1}{2}\left(t+2+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}+2t+\ln|t|\right)+C$$

$$=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$ □

注意 上面所用的变换 $t=\tan\frac{x}{2}$ 对三角函数有理式的不定积分虽然总是有效的，但并不意味着在任何场合都是简便的.

例 4 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\ (ab\neq 0).$

解 由于

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}=\int\frac{\sec^2x}{a^2\tan^2x+b^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{a^2\tan^2x+b^2},$$

故令 $t=\tan x$，就有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}=\int\frac{\mathrm{d}t}{a^2t^2+b^2}=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}(at)}{(at)^2+b^2}$$

$$=\frac{1}{ab}\arctan\frac{at}{b}+C$$

$$=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)+C.$$ □

通常当被积函数是 $\sin^2x,\cos^2x$ 及 $\sin x\cos x$ 的有理式时，采用变换 $t=\tan x$ 往往较为简便. 其它特殊情形可因题而异，选择合适的变换.

三 某些无理根式的不定积分

1. $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ 型不定积分 $(ad-bc\neq 0)$. 对此只需令 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$，就可化为有理函数的不定积分.

例5 求$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\mathrm{d}x$.

解 令$t=\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$,则有$x=\frac{2(t^2+1)}{t^2-1}$,$\mathrm{d}x=\frac{-8t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\mathrm{d}x&=\int \frac{4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}\mathrm{d}t\\&=\int\left(\frac{2}{1-t^2}-\frac{2}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\\&=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-2\arctan t+C\\&=\ln\left|\frac{1+\sqrt{(x+2)/(x-2)}}{1-\sqrt{(x+2)/(x-2)}}\right|-2\arctan\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}+C.\end{aligned}$$ □

例6 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{2+x-x^2}}$.

解 由于

$$\frac{1}{(1+x)\sqrt{2+x-x^2}}=\frac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{2-x}},$$

故令$t=\sqrt{\frac{1+x}{2-x}}$,则有$x=\frac{2t^2-1}{1+t^2}$,$\mathrm{d}x=\frac{6t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{2+x-x^2}}&=\int \frac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{2-x}}\mathrm{d}x\\&=\int \frac{(1+t^2)^2}{9t^4}\cdot t\cdot\frac{6t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t=\int\frac{2}{3t^2}\mathrm{d}t\\&=-\frac{2}{3t}+C=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2-x}{1+x}}+C.\end{aligned}$$ □

2. $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$型不定积分($a>0$时$b^2-4ac\neq0$,$a<0$时$b^2-4ac>0$).由于

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right],$$

若记$u=x+\frac{b}{2a}$,$k^2=\left|\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right|$,则此二次三项式必属于以下三种情形之一:

$$|a|(u^2+k^2),\ |a|(u^2-k^2),\ |a|(k^2-u^2).$$

因此上述无理根式的不定积分也就转化为以下三种类型之一:

$$\int R(u,\sqrt{u^2\pm k^2})\mathrm{d}u,\qquad \int R(u,\sqrt{k^2-u^2})\mathrm{d}u.$$

当分别令 $u=k\tan t, u=k\sec t, u=k\sin t$ 后，它们都化为三角有理式的不定积分.

例 7 求 $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-2x-3}}$.

解[解法一] 按上述一般步骤，求得

$$I=\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{(x-1)^2-4}}=\int \frac{\mathrm{d}u}{(u+1)\sqrt{u^2-4}} \quad (x=u+1)$$

$$=\int \frac{2\sec\theta\tan\theta}{(2\sec\theta+1)\cdot 2\tan\theta}\mathrm{d}\theta \quad (u=2\sec\theta)$$

$$=\int \frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta}=\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\mathrm{d}t \quad \left(t=\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\int \frac{2}{t^2+3}\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{\theta}{2}\right)+C.$$

由于

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\tan\theta}{\sec\theta+1}$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\frac{u}{2}\right)^2-1}}{\frac{u}{2}+1}=\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x+1},$$

因此

$$I=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{\sqrt{3}(x+1)}+C.$$

[解法二] 若令 $\sqrt{x^2-2x-3}=x-t$，则可解出

$$x=\frac{t^2+3}{2(t-1)}, \mathrm{d}x=\frac{t^2-2t-3}{2(t-1)^2}\mathrm{d}t,$$

$$\sqrt{x^2-2x-3}=\frac{t^2+3}{2(t-1)}-t=\frac{-(t^2-2t-3)}{2(t-1)}.$$

于是所求不定积分直接化为有理函数的不定积分：

$$I=\int \frac{2(t-1)}{t^2+3}\cdot\frac{2(t-1)}{-(t^2-2t-3)}\cdot\frac{t^2-2t-3}{2(t-1)^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\int \frac{2}{t^2+3}\mathrm{d}t=-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}+C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{x^2-2x-3}-x}{\sqrt{3}}+C. \qquad \square$$

注 1 可以证明

$$\arctan\frac{\sqrt{x^2-2x-3}-x}{\sqrt{3}} = \arctan\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{\sqrt{3}(x+1)}-\frac{\pi}{3},$$

所以两种解法所得结果是一致的.

注 2 相比之下,解法二优于解法一.这是因为它所选择的变换能直接化为有理形式(而解法一通过三次换元才化为有理形式).如果改令

$$\sqrt{x^2-2x-3} = x+t,$$

显然有相同效果——两边各自平方后能消去 x^2 项,从而解出 x 为 t 的有理函数.一般地,二次三项式 ax^2+bx+c 中若 $a>0$,则可令

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x \pm t;$$

若 $c>0$,还可令

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}.$$

这类变换称为**欧拉变换**.

至此我们已经学过了求不定积分的基本方法,以及某些特殊类型不定积分的求法.需要指出的是,通常所说的"求不定积分",是指用初等函数的形式把这个不定积分表示出来.在这个意义下,并不是任何初等函数的不定积分都能"求出"来的.例如

$$\int e^{\pm x^2}dx,\int\frac{dx}{\ln x},\int\frac{\sin x}{x}dx,\int\sqrt{1-k^2\sin^2x}\,dx\,(0<k^2<1)$$

等等,虽然它们都存在,但却无法用初等函数来表示(这个结论证明起来是非常难的,刘维尔(Liouville)于 1835 年作出过证明).因此可以说,初等函数的原函数不一定是初等函数.在下一章将会知道,这类非初等函数可采用定积分形式来表示.

最后顺便指出,在求不定积分时,还可利用现成的**积分表**.在积分表中所有的积分公式是按被积函数分类编排的,人们只要根据被积函数的类型,或经过适当变形化为表中列出的类型,查阅公式即可.此外,有些计算器(例如 TI-92 型)和电脑软件(例如 Mathemetica,Maple 等)也都具有求不定积分的实用功能.但对于初学者来说,首先应该掌握各种基本的积分方法.

在附录Ⅲ中列出了一份容量不大的积分表,它大体上是典型例题和习题的总结.列出这份积分表的主要目的是为大家学习后继课程提供方便.

习 题

1. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{x^3}{x-1}dx$;　(2) $\int \frac{x-2}{x^2-7x+12}dx$;

(3) $\int \frac{dx}{1+x^3}$;　(4) $\int \frac{dx}{1+x^4}$;

(5) $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)^2}$;　(6) $\int \frac{x-2}{(2x^2+2x+1)^2}dx$.

2. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$;　(2) $\int \frac{dx}{2+\sin^2 x}$;

(3) $\int \frac{dx}{1+\tan x}$;　(4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$;

(5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$;　(6) $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

总 练 习 题

求下列不定积分：

(1) $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}}dx$;　(2) $\int x\arcsin x dx$;

(3) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;　(4) $\int e^{\sin x}\sin 2x dx$;

(5) $\int e^{\sqrt{x}}dx$;　(6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

(7) $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx$;　(8) $\int \frac{x^2-x}{(x-2)^3}dx$;

(9) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$;　(10) $\int \sin^4 x dx$;

(11) $\int \frac{x-5}{x^3-3x^2+4}dx$;　(12) $\int \arctan(1+\sqrt{x})dx$;

(13) $\int \frac{x^7}{x^4+2}dx$;　(14) $\int \frac{\tan x}{1+\tan x+\tan^2 x}dx$;

(15) $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx$;　(16) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$;

(17) $\int x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$;　(18) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^7 x}}$;

(19) $\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2dx$;

(20) $I_n=\int \frac{v^n}{\sqrt{u}}dx$,其中 $u=a_1+b_1x, v=a_2+b_2x$,求递推形式解.

第九章　定　积　分

§1　定积分概念

一　问题提出

不定积分和定积分是积分学中的两大基本问题.求不定积分是求导数的逆运算,定积分则是某种特殊和式的极限,它们之间既有区别又有联系.现在先从两个例子来看定积分概念是怎样提出来的.

1. 曲边梯形的面积　　设 f 为闭区间$[a,b]$上的连续函数,且 $f(x)\geqslant 0$.由曲线 $y=f(x)$,直线 $x=a$,$x=b$ 以及 x 轴所围成的平面图形(图 9-1),称为**曲边梯形**.下面讨论曲边梯形的面积(这是求任何曲线边界图形面积的基础).

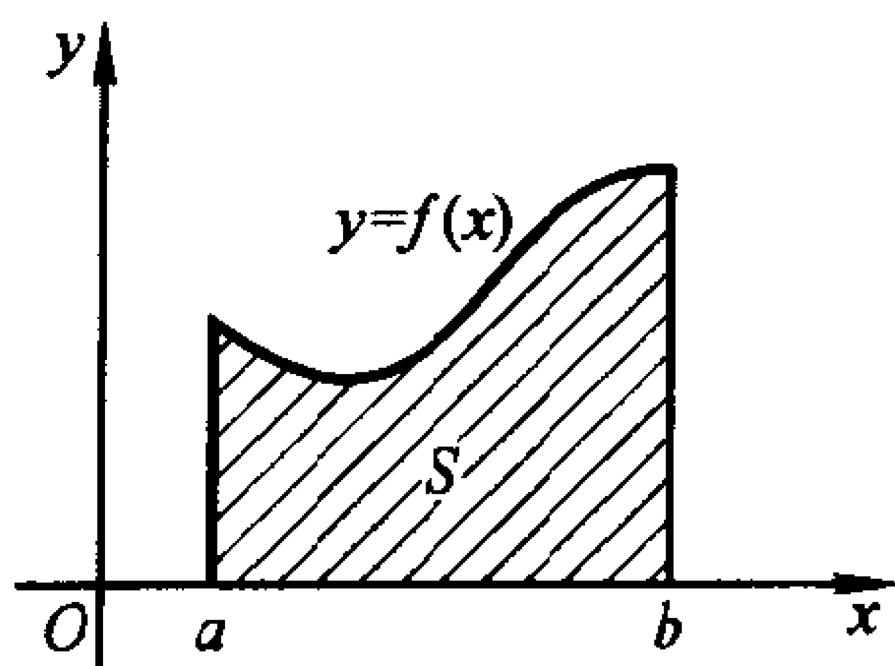


图　9-1

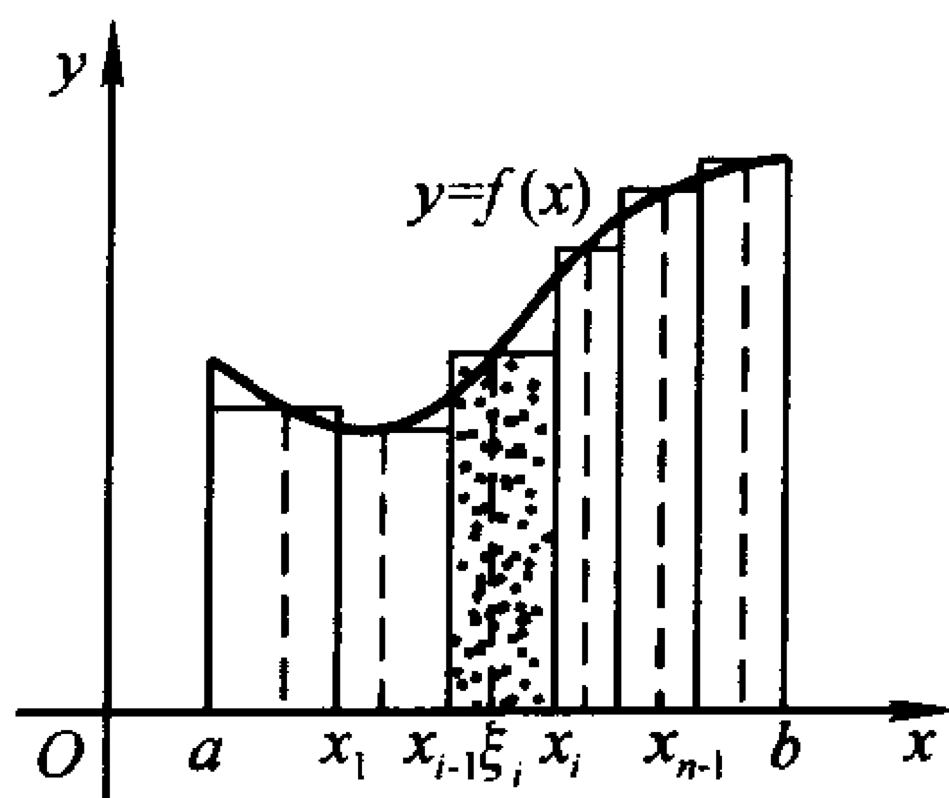


图　9-2

在初等数学里,圆面积是用一系列边数无限增多的内接(或外切)正多边形面积的极限来定义的.现在我们仍用类似的办法来定义曲边梯形的面积.

在区间$[a,b]$内任取 $n-1$ 个分点,它们依次为

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

这些点把$[a,b]$分割成 n 个小区间$[x_{i-1},x_i]$,$i=1,2,\cdots,n$.再用直线 $x=x_i$,$i=1,2,\cdots,n-1$把曲边梯形分割成 n 个小曲边梯形(图 9-2).

在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点 ξ_i,作以 $f(\xi_i)$为高,$[x_{i-1},x_i]$为底的小矩形.当分割$[a,b]$的分点较多,又分割得较细密时,由于 f 为连续函数,它在每个小区间上的值变化不大,从而可用这些小矩形的面积近似替代相应小曲边

梯形的面积.于是,这 n 个小矩形面积之和就可作为该曲边梯形面积 S 的近似值,即

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}). \tag{1}$$

注意到(1)式右边的和式既依赖于对区间$[a,b]$的分割,又与所有中间点 ξ_i $(i=1,2,\cdots,n)$的取法有关.可以想象,当分点无限增多,且对$[a,b]$无限细分时,如果此和式与某一常数无限接近,而且与分点 x_i 和中间点ξ_i 的选取无关,则就把此常数定义作为曲边梯形的面积 S.

2. 变力所作的功　设质点受力 F 的作用沿 x 轴由点a 移动到点b,并设 F 处处平行于 x 轴(图 9-3).如果 F 为常力,则它对质点所作的功为 $W=F(b-a)$.现在的问题是,F 为变力,它连续依赖于质点所在位置的坐标 x,即 $F=F(x)$,$x\in[a,b]$为一连续函数,此时 F 对质点所作的功 W 又该如何计算?

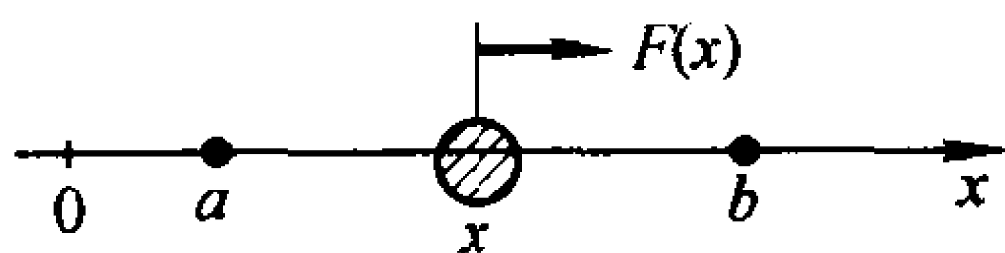


图 9-3

由假设 $F(x)$为一连续函数,故在很小的一段位移区间上 $F(x)$可以近似地看作一常量.类似于求曲边梯形面积那样,把$[a,b]$细分为 n 个小区间$[x_{i-1},x_i]$,$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$,$i=1,2,\cdots,n$;并在每个小区间上任取一点 ξ_i,就有

$$F(x) \approx F(\xi_i),\ x \in [x_{i-1},x_i],\ i = 1,2,\cdots,n.$$

于是,质点从 x_{i-1}位移到 x_i 时,力 F 所作的功就近似等于$F(\xi_i)\Delta x_i$,从而

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i. \tag{2}$$

同样地,对$[a,b]$作无限细分时,若(2)式右边的和式与某一常数无限接近,则就把此常数定义作为变力所作的功 W.

上面两个例子,一个是计算曲边梯形面积的几何问题,另一个是求变力作功的力学问题,它们最终都归结为一个特定形式的和式逼近.在科学技术中还有许多同样类型的数学问题,解决这类问题的思想方法概括说来就是"**分割,近似求和,取极限**".这就是产生定积分概念的背景.

二　定积分的定义

定义 1　设闭区间$[a,b]$内有 $n-1$ 个点,依次为

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

它们把$[a,b]$分成 n 个小区间 $\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$,$i=1,2,\cdots,n$.这些分点或这些闭子区间构成对$[a,b]$的一个**分割**,记为

$$T = \{x_0,x_1,\cdots,x_n\} \text{ 或}\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}.$$

小区间 Δ_i 的长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$,并记

$$\|T\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\},$$

称为分割 T 的**模**.

注 由于 $\Delta x_i \leqslant \|T\|, i=1,2,\cdots,n$,因此 $\|T\|$ 可用来反映$[a,b]$被分割的细密程度.另外,分割 T 一旦给出,$\|T\|$ 就随之而确定;但是,具有同一细度 $\|T\|$ 的分割 T 却有无限多个.

定义 2 设 f 是定义在$[a,b]$上的一个函数.对于$[a,b]$的一个分割 $T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}$,任取点 $\xi_i\in\Delta_i, i=1,2,\cdots,n$,并作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

称此和式为函数 f 在$[a,b]$上的一个**积分和**,也称**黎曼和**.

显然,积分和既与分割 T 有关,又与所选取的点集$\{\xi_i\}$有关.

定义 3 设 f 是定义在$[a,b]$上的一个函数,J 是一个确定的实数.若对任给的正数 ε,总存在某一正数 δ,使得对$[a,b]$的任何分割 T,以及在其上任意选取的点集$\{\xi_i\}$,只要 $\|T\|<\delta$,就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J\right| < \varepsilon,$$

则称函数 f 在区间$[a,b]$上**可积**或**黎曼可积**;数 J 称为 f 在$[a,b]$上的**定积分**或**黎曼积分**,记作

$$J = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

其中,f 称为**被积函数**,x 称为**积分变量**,$[a,b]$称为**积分区间**,a、b 分别称为这个定积分的**下限**和**上限**.

以上定义 1 至定义 3 是定积分抽象概念的完整叙述.下面是与定积分概念有关的几点补充注释.

注 1 把定积分定义的 $\varepsilon-\delta$ 说法和函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 说法相对照,便会发现两者有相似的陈述方式,因此我们也常用极限符号来表达定积分,即把它写作

$$J = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

然而,积分和的极限与函数的极限之间其实有着很大的区别:在函数极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$中,对每一个极限变量 x 来说,$f(x)$的值是唯一确定的;而对于积分和的极限而言,每一个 $\|T\|$ 并不唯一对应积分和的一个值.这使得积分和的极限要比通常的函数极限复杂得多.

注 2 可积性是函数的又一分析性质.稍后(定理 9.3)就会知道连续函数是可积的,于是本节开头两个实例都可用定积分记号来表示:

1) 连续曲线 $y=f(x)\geqslant 0$ 在$[a,b]$上形成的曲边梯形面积为

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x;$$

2) 在连续变力 $F(x)$ 作用下,质点从 a 位移到 b 所作的功为 $W = \int_a^b F(x)\mathrm{d}x$.

注 3 (定积分的几何意义) 由上述 1)看到,对于 $[a,b]$ 上的连续函数 f,当 $f(x)\geqslant 0, x\in[a,b]$ 时,定积分(3)的几何意义就是该曲边梯形的面积;当 $f(x)\leqslant 0, x\in[a,b]$ 时,这时 $J = -\int_a^b[-f(x)]\mathrm{d}x$ 是位于 x 轴下方的曲边梯形面积的相反数,不妨称之为"负面积";对于一般非定号的 $f(x)$ 而言(图 9-4),定积分 J 的值则是曲线 $y=f(x)$ 在 x 轴上方部分所有曲边梯形的正面积与下方部分所有曲边梯形的负面积的代数和.

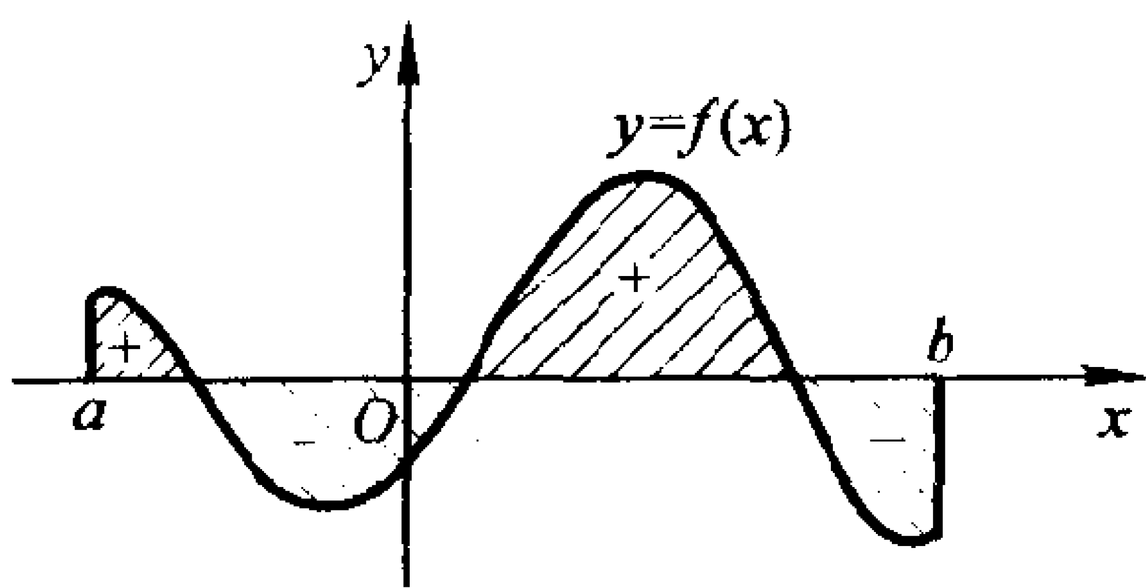


图 9-4

注 4 定积分作为积分和的极限,它的值只与被积函数 f 和积分区间 $[a,b]$ 有关,而与积分变量所用的符号无关,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(\theta)\mathrm{d}\theta = \cdots.$$

例 1 求在区间 $[0,1]$ 上,以抛物线 $y=x^2$ 为曲边的曲边三角形的面积(图 9-5).

解 由注 3,因 $y=x^2$ 在 $[0,1]$ 上连续,故所求面积为

$$S = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n \xi_i^2\Delta x_i.$$

为求得此极限,在定积分存在的前提下,允许选择某种特殊的分割 T 和特殊的点集 $\{\xi_i\}$. 在此只需取等分分割:

$$T = \left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1\right\}, \|T\| = \frac{1}{n};$$

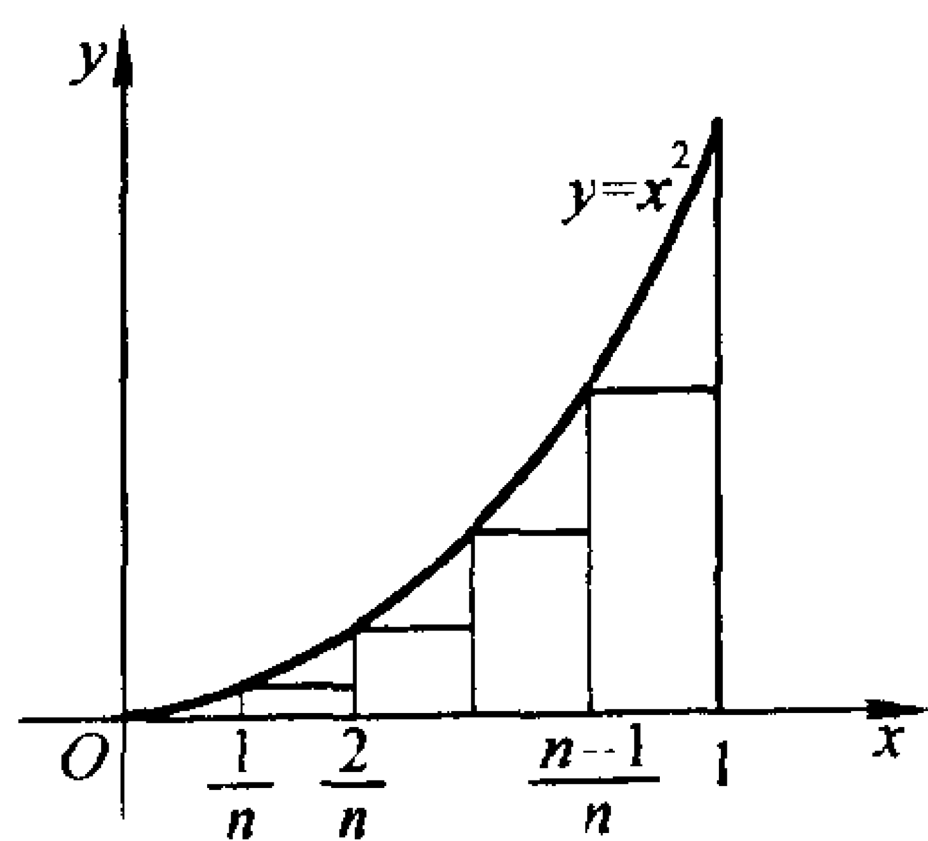


图 9-5

并取 $\xi_i = \frac{i-1}{n}\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right], i=1,2,\cdots,n$. 则有

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^n(i-1)^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

□

习 题

1. 按定积分定义证明：$\int_a^b k\mathrm{d}x = k(b-a)$.
2. 通过对积分区间作等分分割，并取适当的点集$\{\xi_i\}$，把定积分看作是对应的积分和的极限，来计算下列定积分：

(1) $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$；提示：$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；　　(3) $\int_a^b \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；

(4) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2}(0<a<b)$.（提示：取 $\xi_i = \sqrt{x_{i-1}x_i}$）

§2 牛顿—莱布尼茨公式

从上节例题和习题看到，通过求积分和的极限来计算定积分一般是很困难的. 下面要介绍的牛顿—莱布尼茨公式不仅为定积分计算提供了一个有效的方法，而且在理论上把定积分与不定积分联系了起来.

定理 9.1 若函数 f 在$[a,b]$上连续，且存在原函数 F，即 $F'(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$，则 f 在$[a,b]$上可积，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{1}$$

这称为**牛顿—莱布尼茨公式**，它也常写成

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b.$$

证 由定积分定义，任给 $\varepsilon>0$，要证存在 $\delta>0$，当 $\|T\|<\delta$ 时，有 $\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - [F(b)-F(a)]\right| < \varepsilon$. 下面证明满足如此要求的 δ 确实是存在的.

事实上，对于$[a,b]$的任一分割 $T=\{a=x_0,x_1,\cdots,x_n=b\}$，在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上对 $F(x)$使用拉格朗日中值定理，则分别存在 $\eta_i\in(x_{i-1},x_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，使得

$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= \sum_{i=1}^n [F(x_i)-F(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n F'(\eta_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\eta_i)\Delta x_i. \end{aligned} \tag{2}$$

因为 f 在$[a,b]$上连续，从而一致连续，所以对上述 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 x'、

$x''\in[a,b]$且$|x'-x''|<\delta$时,有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

于是,当$\Delta x_i\leqslant\|T\|<\delta$时,任取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,便有$|\xi_i-\eta_i|<\delta$,这就证得

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-[F(b)-F(a)]\right|&=\left|\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)-f(\eta_i)]\Delta x_i\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)-f(\eta_i)|\Delta x_i\\&<\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以f在$[a,b]$上可积,且有公式(1)成立. □

注 1 在应用牛顿—莱布尼茨公式时,$F(x)$可由积分法求得.

注 2 定理条件尚可适当减弱,例如:

1) 对F的要求可减弱为:在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且$F'(x)=f(x)$,$x\in(a,b)$.这不影响定理的证明.

2) 对f的要求可减弱为:在$[a,b]$上可积(不一定连续).这时(2)式仍成立,且由f在$[a,b]$上可积,(2)式右边当$\|T\|\to 0$时的极限就是$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,而左边恒为一常数.(更一般的情形参见本节习题第3题.)

注 3 至§5证得连续函数必有原函数之后,本定理的条件中对F的假设便是多余的了.

例 1 利用牛顿—莱布尼茨公式计算下列定积分:

1) $\int_a^b x^n\mathrm{d}x$(n为正整数);

2) $\int_a^b \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$; 3) $\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x^2}(0<a<b)$;

4) $\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x$; 5) $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$.

解 其中1)—3)即为§1中的例题和习题,现在用牛顿—莱布尼茨公式来计算就十分方便:

1) $\int_a^b x^n\mathrm{d}x=\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b=\frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1})$.

2) $\int_a^b\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\Big|_a^b=\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a$.

3) $\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=-\left.\frac{1}{x}\right|_a^b=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$.

4) $\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\pi}=2.$

(这是图 9-6 所示正弦曲线一拱下的面积，其余各题也可作此联想.)

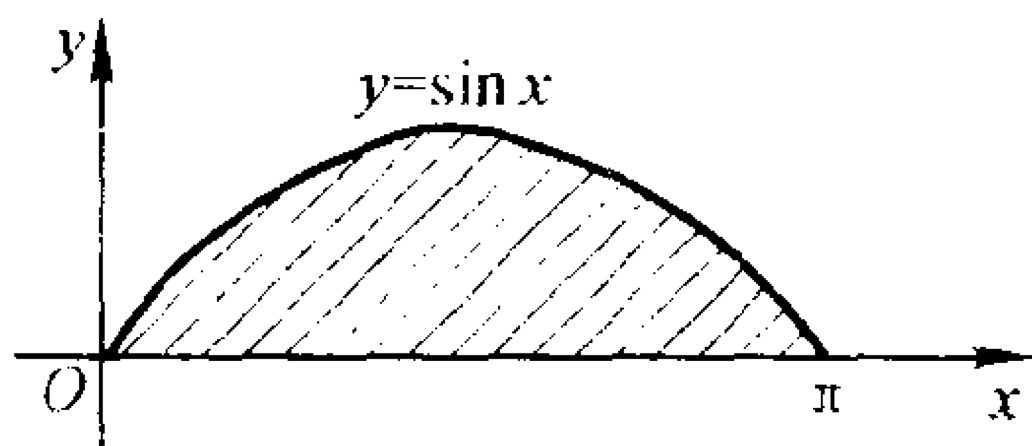


图 9-6

5) 先用不定积分法求出 $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ 的任一原函数，然后完成定积分计算：

$$\int x\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}(4-x^2)=-\frac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}+C,$$

$$\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}\Big|_0^2=\frac{8}{3}.$$ □

例 2 利用定积分求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=J.$$

解 把此极限式化为某个积分和的极限式，并转化为计算定积分. 为此作如下变形：

$$J=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}.$$

不难看出，其中的和式是函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 在区间 $[0,1]$ 上的一个积分和(这里所取的是等分分割，$\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$，$\xi_i=\dfrac{i}{n}\in\left[\dfrac{i-1}{n},\dfrac{i}{n}\right]$，$i=1,2,\cdots,n$). 所以

$$J=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2.$$

当然，也可把 J 看作 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上的定积分，同样有

$$J=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{x-1}=\cdots=\ln 2.$$ □

习 题

1. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^1(2x+3)\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^1\frac{1-x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$；　　(4) $\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 x\mathrm{d}x$；　　(6) $\int_4^9\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$；

(7) $\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$;　　(8) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x}(\ln x)^2 \mathrm{d}x$.

2. 利用定积分求极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}(1+2^3+\cdots+n^3)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right]$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{2n^2}\right)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$.

---

3. 证明:若 f 在$[a,b]$上可积,F 在$[a,b]$上连续,且除有限个点外有 $F'(x)=f(x)$,则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

§3 可积条件

从定理 9.1 及其后注中看到,要判别一个函数是否可积,必须研究可积条件.

一 可积的必要条件

定理 9.2 若函数 f 在$[a,b]$上可积,则 f 在$[a,b]$上必定有界.

证 用反证法.若 f 在$[a,b]$上无界,则对于$[a,b]$的任一分割 T,必存在属于 T 的某个小区间 Δ_k,f 在 Δ_k 上无界.在 $i\neq k$ 的各个小区间 Δ_i 上任意取定 ξ_i,并记

$$G = \left|\sum_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta x_i\right|.$$

现对任意大的正数 M,由于 f 在 Δ_k 上无界,故存在 $\xi_k\in\Delta_k$,使得

$$|f(\xi_k)| > \frac{M+G}{\Delta x_k}.$$

于是有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \geqslant |f(\xi_k)\Delta x_k| - \left|\sum_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta x_i\right|$$

$$> \frac{M+G}{\Delta x_k}\cdot\Delta x_k - G = M.$$

由此可见,对于无论多小的 $\|T\|$,按上述方法选取点集 $\{\xi_i\}$ 时,总能使积分和的绝对值大于任何预先给出的正数,这与 f 在$[a,b]$上可积相矛盾. □

这个定理指出,任何可积函数一定是有界的;但要注意,有界函数却不一定可积.

例 1 证明狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

在[0,1]上有界但不可积.

证 显然 $|D(x)|\leqslant 1, x\in[0,1]$.

对于[0,1]的任一分割 T,由有理数和无理数在实数中的稠密性,在属于 T 的任一小区间 Δ_i 上,当取 ξ_i 全为有理数时,$\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=1$;当取 ξ_i 全为无理数时,$\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=0$. 所以不论 $\|T\|$ 多么小,只要点集 $\{\xi_i\}$ 取法不同(全取有理数或全取无理数),积分和有不同极限,即 $D(x)$ 在[0,1]上不可积. □

由此例可见,有界是可积的必要条件.所以在以后讨论函数的可积性时,总是首先假设函数是有界的,今后不再一一申明.

二 可积的充要条件

要判断一个函数是否可积,固然可以根据定义,直接考察积分和是否能无限接近某一常数,但由于积分和的复杂性和那个常数不易预知,因此这是极其困难的.下面即将给出的可积准则只与被积函数本身有关,而不涉及定积分的值.

设 $T=\{\Delta_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 为对 $[a,b]$ 的任一分割.由 f 在 $[a,b]$ 上有界,它在每个 Δ_i 上存在上、下确界:

$$M_i=\sup_{x\in\Delta_i}f(x),\ m_i=\inf_{x\in\Delta_i}f(x),\ i=1,2,\cdots,n.$$

作和

$$S(T)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,\ s(T)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i,$$

分别称为 f 关于分割 T 的**上和**与**下和**(或称**达布上和**与**达布下和**,统称**达布和**).任给 $\xi_i\in\Delta_i, i=1,2,\cdots,n$,显然有

$$s(T)\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant S(T). \tag{1}$$

与积分和相比较,达布和只与分割 T 有关,而与点集 $\{\xi_i\}$ 无关.由不等式(1),就能通过讨论上和与下和当 $\|T\|\to 0$ 时的极限来揭示 f 在 $[a,b]$ 上是否可积.所以,可积性理论总是从讨论上和与下和的性质入手的.

定理 9.3 (可积准则) 函数 f 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是:任给 $\varepsilon>0$,

总存在相应的一个分割 T,使得

$$S(T)-s(T)<\varepsilon. \tag{2}$$

本定理的证明依赖对上和与下和性质的详尽讨论,这里从略(完整证明补述于§6).

设 $\omega_i=M_i-m_i$,称为 f 在 Δ_i 上的**振幅**,有必要时也记为 ω_i^f.由于

$$S(T)-s(T)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i(\text{或记为}\sum_T\omega_i\Delta x_i),$$

因此可积准则又可改述如下:

定理 9.3′ 函数 f 在$[a,b]$上可积的充要条件是:任给 $\varepsilon>0$,总存在相应的某一分割 T,使得

$$\sum_T\omega_i\Delta x_i<\varepsilon. \tag{2′}$$

不等式(2)或(2′)的几何意义是:若 f 在$[a,b]$上可积,则图 9-7 中包围曲线 $y=f(x)$的一系列小矩形面积之和可以达到任意小,只要分割充分地细;反之亦然.

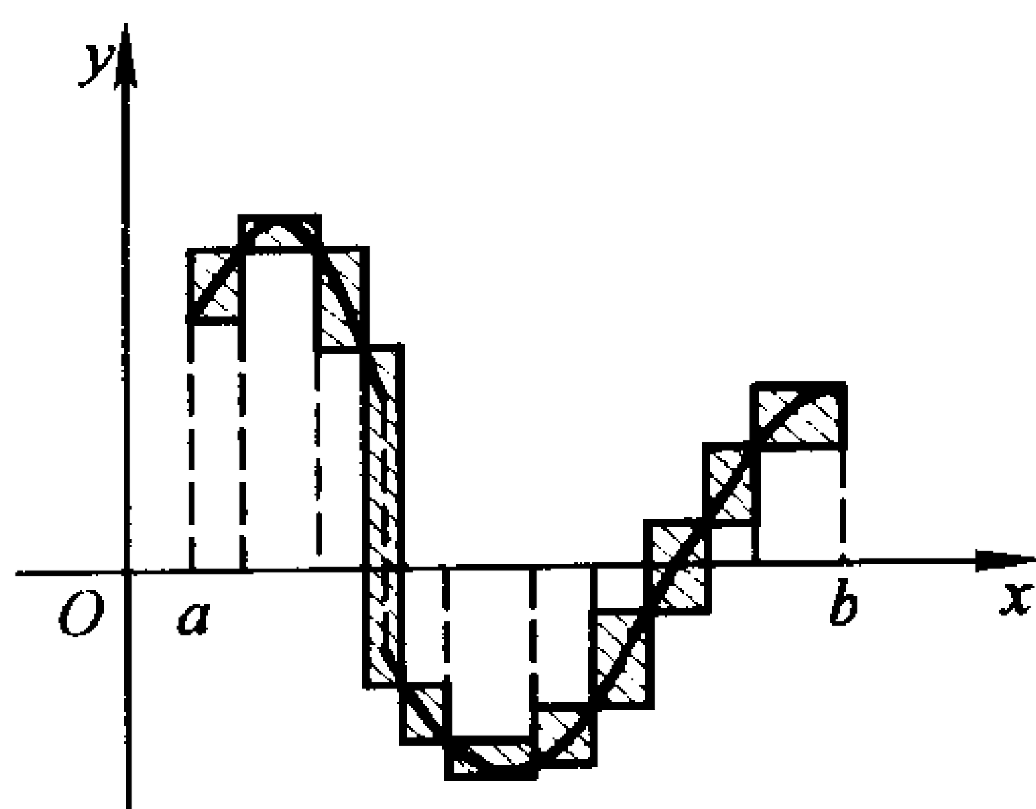


图 9-7

三 可积函数类

根据可积的充要条件,我们证明下面一些类型的函数是可积的(即可积的充分条件).

定理 9.4 若 f 为$[a,b]$上的连续函数,则 f 在$[a,b]$上可积.

证 由于 f 在闭区间$[a,b]$上连续,因此在$[a,b]$上一致连续.这就是说,任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,对$[a,b]$中任意两点 x'、x'',只要$|x'-x''|<\delta$,便有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

所以只要对$[a,b]$所作的分割 T 满足 $\|T\|<\delta$,在 T 所属的任一小区间 Δ_i 上,就能使 f 的振幅满足

$$\omega_i=M_i-m_i=\sup_{x',x''\in\Delta_i}|f(x')-f(x'')|^{①}\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a},$$

从而导致

$$\sum_T\omega_i\Delta x_i\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_T\Delta x_i=\varepsilon.$$

由定理 9.2′证得 f 在$[a,b]$上可积. □

① 此等式成立的证明留作本节习题(第 5 题).

读者应该注意到，一致连续性在本定理证明中所起的重要作用.

定理 9.5 若 f 是区间 $[a,b]$ 上只有有限个间断点的有界函数，则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

证 不失一般性，这里只证明 f 在 $[a,b]$ 上仅有一个间断点的情形，并假设该间断点即为端点 b.

任给 $\varepsilon>0$，取 δ' 满足 $0<\delta'<\dfrac{\varepsilon}{2(M-m)}<b-a$，其中 M 与 m 分别为 f 在 $[a,b]$ 上的上确界与下确界(设 $m<M$，否则 f 为常量函数，显然可积). 记 f 在小区间 $\Delta'=[b-\delta',b]$ 上的振幅为 ω'，则

$$\omega'\delta' < (M-m)\cdot\frac{\varepsilon}{2(M-m)} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 f 在 $[a,b-\delta']$ 上连续，由定理 9.3 知 f 在 $[a,b-\delta']$ 上可积. 再由定理 9.2′(必要性)，存在对 $[a,b-\delta']$ 的某个分割 $T'=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_{n-1}\}$，使得

$$\sum_{T'}\omega_i\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $\Delta_n=\Delta'$，则 $T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_{n-1},\Delta_n\}$ 是对 $[a,b]$ 的一个分割，对于 T，有

$$\sum_{T}\omega_i\Delta x_i = \sum_{T'}\omega_i\Delta x_i + \omega'\delta' < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

根据定理 9.2′(充分性)，证得 f 在 $[a,b]$ 上可积. □

定理 9.6 若 f 是 $[a,b]$ 上的单调函数，则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

证 设 f 为增函数，且 $f(a)<f(b)$(若 $f(a)=f(b)$，则 f 为常量函数，显然可积). 对 $[a,b]$ 的任一分割 T，由 f 的增性，f 在 T 所属的每个小区间 Δ_i 上的振幅为

$$\omega_i = f(x_i)-f(x_{i-1}),$$

于是有

$$\begin{aligned}\sum_{T}\omega_i\Delta x_i &\leqslant \sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\,\|T\| \\ &= [f(b)-f(a)]\,\|T\|.\end{aligned}$$

由此可见，任给 $\varepsilon>0$，只要 $\|T\|<\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$，这时就有

$$\sum_{T}\omega_i\Delta x_i < \varepsilon,$$

所以 f 在 $[a,b]$ 上可积. □

注意，单调函数即使有无限多个间断点，仍不失其可积性.

例 2 试用两种方法证明函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}, n=1,2,\cdots\end{cases}$$

在区间[0,1]上可积.

证 [证法一] 由于 f 是一增函数(图 9-8),虽然它在[0,1]上有无限多个间断点 $x_n=\frac{1}{n}, n=2,3,\cdots$,但由定理 9.5,仍保证它在[0,1]上可积. □

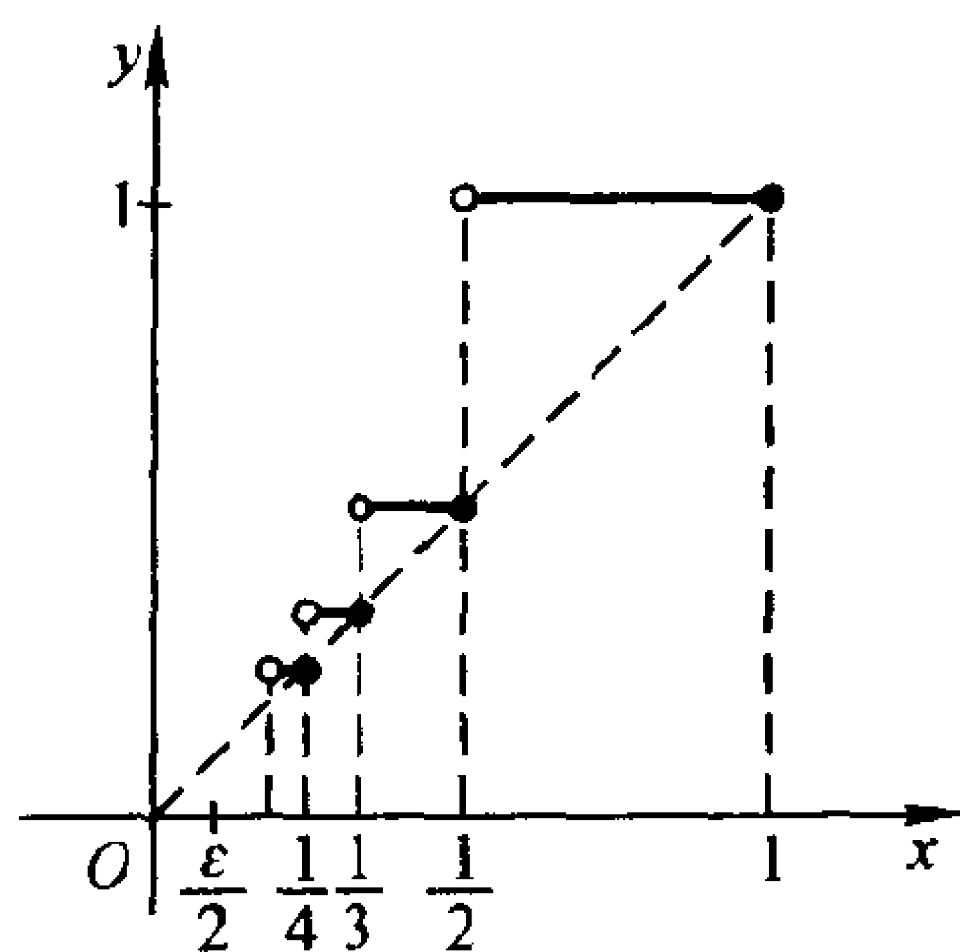


图 9-8

[证法二](仅利用定理 9.2′和定理 9.4) 任给 $\varepsilon>0$,由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,因此当 n 充分大时 $\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$,这说明 f 在 $\left[\frac{\varepsilon}{2},1\right]$ 上只有有限个间断点. 利用定理 9.4 和定理 9.2′推知 f 在 $\left[\frac{\varepsilon}{2},1\right]$ 上可积,且存在对 $\left[\frac{\varepsilon}{2},1\right]$ 的某一分割 T',使得

$$\sum_{T'}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}.$$

再把小区间 $\left[0,\frac{\varepsilon}{2}\right]$ 与 T' 合并,成为对[0,1]的一个分割 T. 由于 f 在 $\left[0,\frac{\varepsilon}{2}\right]$ 上的振幅 $\omega_0<1$,因此得到

$$\sum_{T}\omega_i\Delta x_i=\omega_0\cdot\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{T'}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以 f 在[0,1]上可积. □

事实上,例 2 的第二种证法并不限于该例中的具体函数,更一般的命题见本节习题第 4 题. 下面例 3 的证明思想与它可谓异曲同工.

例 3 证明黎曼函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q}, p、q \text{ 互素}, q>p,\\ 0, & x=0,1 \text{ 以及}(0,1)\text{ 内的无理数}\end{cases}$$

在区间[0,1]上可积,且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0.$$

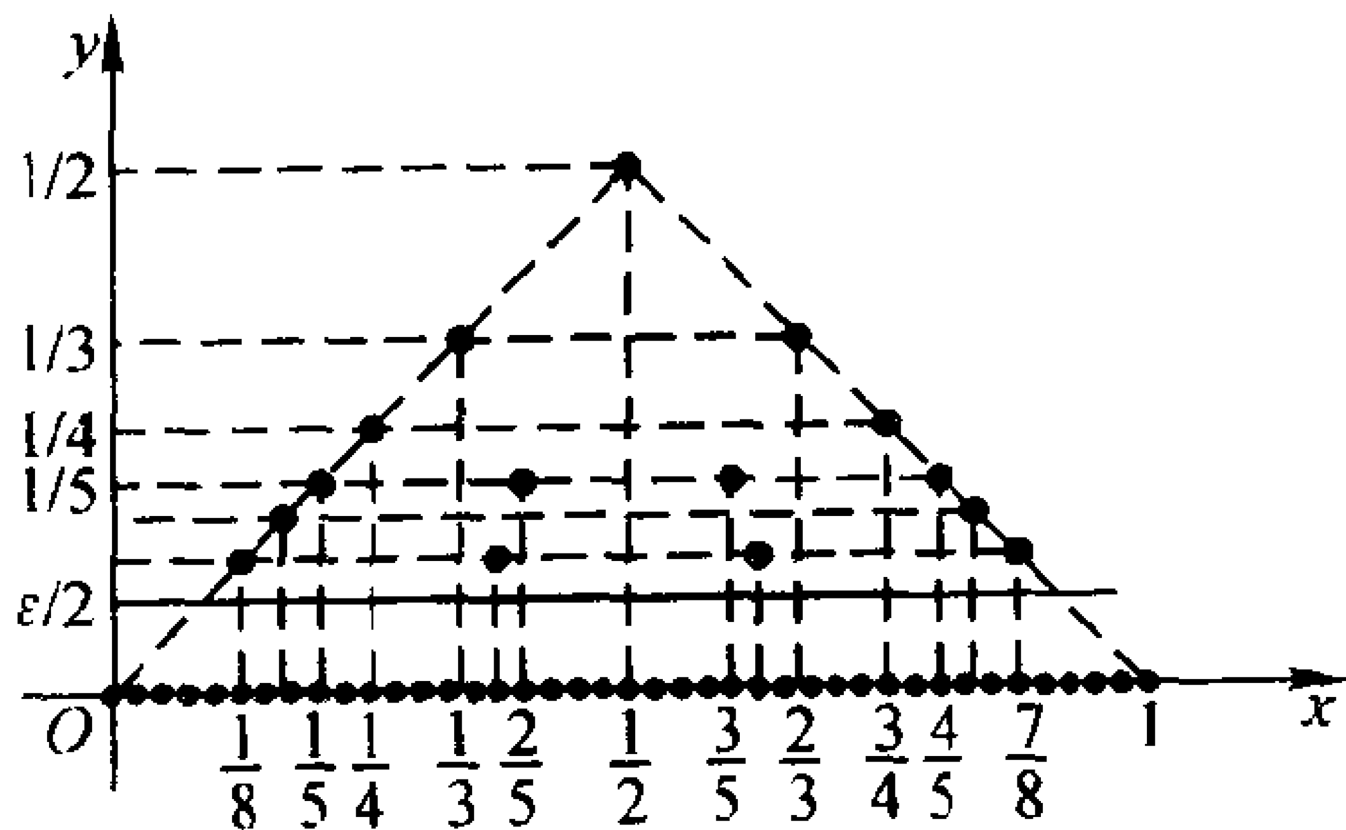


图 9-9

分析 已知黎曼函数在 $x=0,1$ 以及一切无理点处连续,而在(0,1)内的一切有理点处间断. 证明它在[0,1]上可积的直观构思如下:如图 9-9 所示,在黎曼函数的图象中画一条水平直线 $y=\frac{\varepsilon}{2}$. 在此直线上方只有函数图象中有限个点,这些点所对应的自变量可被含于属于分割 T 的有限个小区间中,当 $\|T\|$ 足够小

时,这有限个小区间的总长可为任意小;而 T 中其余小区间上函数的振幅不大于$\frac{\varepsilon}{2}$,把这两部分相合,便可证得 $\sum\limits_{T}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$.下面写出这个证明.

证　任给 $\varepsilon>0$,在$[0,1]$内使得$\frac{1}{q}>\frac{\varepsilon}{2}$的有理点$\frac{p}{q}$只有有限个,设它们为 $r_1,\cdots,r_k$.现对$[0,1]$作分割 $T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}$,使 $\|T\|<\frac{\varepsilon}{2k}$,并把 T 中所有小区间分为$\{\Delta'_i\mid i=1,2,\cdots,m\}$和$\{\Delta''_i\mid i=1,2,\cdots,n-m\}$两类.其中$\{\Delta'_i\}$为含有$\{r_i\mid i=1,2,\cdots,k\}$中点的所有小区间,这类小区间的个数 $m\leqslant 2k$(当所有 r_i 恰好都是 T 的分割点时才有 $m=2k$);而$\{\Delta''_i\}$为 T 中所有其余不含$\{r_i\}$中点的小区间.由于 f 在 Δ'_i 上的振幅 $\omega'_i\leqslant\frac{1}{2}$,于是

$$\sum_{i=1}^{m}\omega'_i\Delta x'_i\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\Delta x'_i\leqslant\frac{1}{2}\cdot 2k\|T\|<\frac{\varepsilon}{2};$$

而 f 在 Δ''_i 上的振幅 $\omega''_i\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$,于是

$$\sum_{i=1}^{n-m}\omega''_i\Delta x''_i\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{n-m}\Delta x''_i<\frac{\varepsilon}{2}.$$

把这两部分合起来,便证得

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{m}\omega'_i\Delta x'_i+\sum_{i=1}^{n-m}\omega''_i\Delta x''_i<\varepsilon,$$

即 f 在$[0,1]$上可积.

因为已经证得 f 在$[0,1]$上可积,所以当取 ξ_i 全为无理点时,使 $f(\xi_i)=0$,从而

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=0.$$ □

习　　题

1. 证明:若 T'是 T 增加若干个分点后所得的分割,则 $\sum\limits_{T'}\omega'_i\Delta x'_i\leqslant\sum\limits_{T}\omega_i\Delta x_i$.

2. 证明:若 f 在$[a,b]$上可积,$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$,则 f 在$[\alpha,\beta]$上也可积.

3. 设 f、g 均为定义在$[a,b]$上的有界函数.证明:若仅在$[a,b]$中有限个点处 $f(x)\neq g(x)$,则当 f 在$[a,b]$上可积时,g 在$[a,b]$上也可积,且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

4. 设 f 在$[a,b]$上有界,$\{a_n\}\subset[a,b]$,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$.证明:若 f 在$[a,b]$上只有 $a_n(n=1,2,\cdots)$为其间断点,则 f 在$[a,b]$上可积.

5. 证明:若 f 在区间 Δ 上有界,则

$$\sup_{x\in\Delta}f(x)-\inf_{x\in\Delta}f(x)=\sup_{x',x''\in\Delta}|f(x')-f(x'')|.$$

§4 定积分的性质

一 定积分的基本性质

性质 1 若 f 在$[a,b]$上可积,k 为常数,则 kf 在$[a,b]$上也可积,且

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

证 当 $k=0$ 时结论显然成立.

当 $k\neq 0$ 时,由于

$$\left|\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i - kJ\right| = |k|\cdot\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J\right|,$$

其中 $J=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,因此当 f 在$[a,b]$上可积时,由定义,任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $\|T\|<\delta$ 时,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J\right| < \frac{\varepsilon}{|k|},$$

从而

$$\left|\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i - kJ\right| < \varepsilon.$$

即 kf 在$[a,b]$上可积,且

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = kJ = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$ □

性质 2 若 f、g 都在$[a,b]$上可积,则 $f\pm g$ 在$[a,b]$上也可积,且

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

证明与性质 1 类同,留给读者.

性质 1 与性质 2 是定积分的线性性质,合起来即为

$$\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

其中 α、β 为常数.

性质 3 若 f、g 都在$[a,b]$上可积,则 $f\cdot g$ 在$[a,b]$上也可积.

证 由 f、g 都在$[a,b]$上可积,从而都有界,设

$$A = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|,\quad B = \sup_{x\in[a,b]}|g(x)|,$$

且 $A>0$,$B>0$(否则 f、g 中至少有一个恒为零值函数,于是 $f\cdot g$ 亦为零值函数,结论显然成立).

任给 $\varepsilon>0$,由 f、g 可积,必分别存在分割 T'、T'',使得

$$\sum_{T'}\omega_i^f\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2B}, \quad \sum_{T''}\omega_i^g\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2A}.$$

令 $T = T' + T''$(表示把 T'、T''的所有分割点合并而成的一个新的分割 T). 对于 $[a,b]$上 T 所属的每一个 Δ_i,有

$$\begin{aligned}\omega_i^{f\cdot g} &= \sup_{x',x''\in\Delta_i}|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')|\\ &\leqslant \sup_{x',x''\in\Delta_i}[|g(x')|\cdot|f(x') - f(x'')| + |f(x'')|\cdot|g(x') - g(x'')|]\\ &\leqslant B\omega_i^f + A\omega_i^g.\end{aligned}$$

利用 §3 习题第 1 题,可知

$$\begin{aligned}\sum_T\omega_i^{f\cdot g}\Delta x_i &\leqslant B\sum_T\omega_i^f\Delta x_i + A\sum_T\omega_i^g\Delta x_i\\ &\leqslant B\sum_{T'}\omega_i^f\Delta x_i + A\sum_{T''}\omega_i^g\Delta x_i\\ &< B\cdot\frac{\varepsilon}{2B} + A\cdot\frac{\varepsilon}{2A} = \varepsilon,\end{aligned}$$

这就证得 $f\cdot g$ 在$[a,b]$上可积. □

注意,在一般情形下 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \neq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

性质 4 f 在$[a,b]$上可积的充要条件是:任给 $c\in(a,b)$,f 在$[a,c]$与$[c,b]$上都可积.此时又有等式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

证 [充分性] 由于 f 在$[a,c]$与$[c,b]$上都可积,故任给 $\varepsilon>0$,分别存在对$[a,c]$与$[c,b]$的分割 T'与 T'',使得

$$\sum_{T'}\omega_i'\Delta x_i' < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{T''}\omega_i''\Delta x_i'' < \frac{\varepsilon}{2}.$$

现令 $T = T' + T''$,它是对$[a,b]$的一个分割,且有

$$\sum_T\omega_i\Delta x_i = \sum_{T'}\omega_i'\Delta x_i' + \sum_{T''}\omega_i''\Delta x_i'' < \varepsilon.$$

由此证得 f 在$[a,b]$上可积.

[必要性] 已知 f 在$[a,b]$上可积,故任给 $\varepsilon > 0$,存在对$[a,b]$的某分割 T,使得 $\sum\limits_T\omega_i\Delta x_i < \varepsilon$. 在 T 上再增加一个分点 c,得到一个新的分割 T^*. 由 §3 习题第 1 题,又有

$$\sum_{T^*}\omega_i^*\Delta x_i^* \leqslant \sum_T\omega_i\Delta x_i < \varepsilon.$$

分割 T^*在$[a,c]$和$[c,b]$上的部分,分别构成对$[a,c]$和$[c,b]$的分割,记为 T'和 T'',则有

$$\sum_{T'}\omega_i'\Delta x_i' \leqslant \sum_{T^*}\omega_i^*\Delta x_i^* < \varepsilon,$$

$$\sum_{T''}\omega_i''\Delta x_i'' \leqslant \sum_{T^*}\omega_i^*\Delta x_i^* < \varepsilon.$$

这就证得 f 在$[a,b]$与$[b,c]$上都可积.

在证得上面结果的基础上最后来证明等式(3).为此对$[a,b]$作分割 T,恒使点 c 为其中的一个分点,这时 T 在$[a,c]$与$[c,b]$上的部分各自构成对$[a,c]$与$[c,b]$的分割,分别记为 T'与 T''.由于

$$\sum_T f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{T'} f(\xi_i')\Delta x_i' + \sum_{T''} f(\xi_i'')\Delta x_i'',$$

因此当 $\|T\|\to 0$(同时有 $\|T'\|\to 0$, $\|T''\|\to 0$)时,对上式取极限,就得到(3)式成立. □

性质 4 及公式(3)称为**关于积分区间的可加性**.当 $f(x)\geqslant 0$ 时,(3)式的几何意义就是曲边梯形面积的可加性.如图 9-10 所示,曲边梯形 $AabB$ 的面积等于曲边梯形 $AacC$ 的面积与 $CcbB$ 的面积之和.

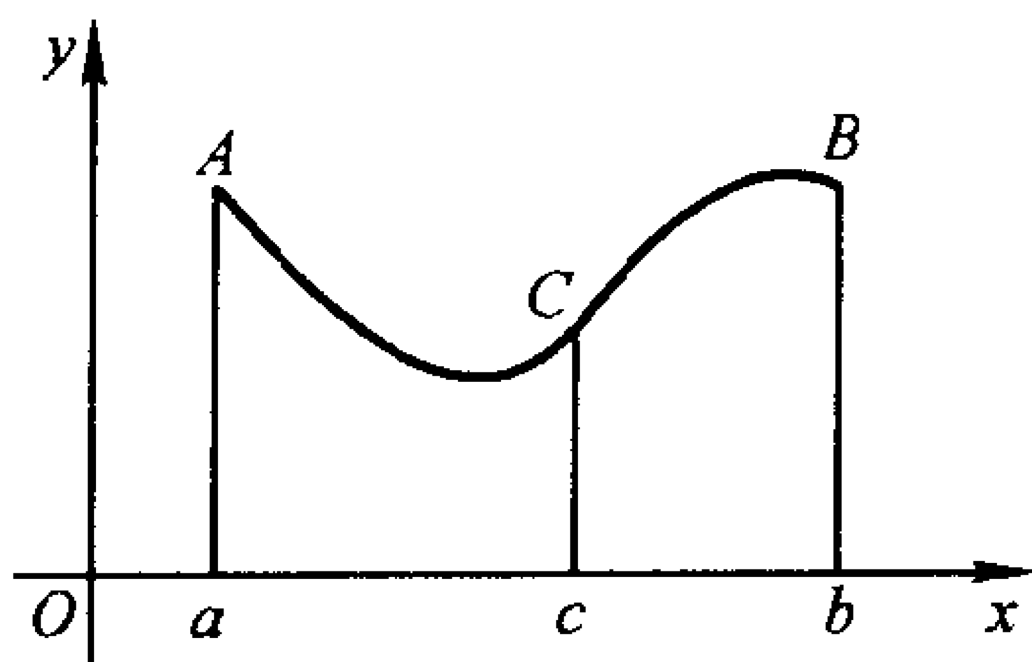


图 9-10

按定积分的定义,记号 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 只有当 $a<b$ 时才有意义,而当 $a=b$ 或$a>b$ 时本来是没有意义的.但为了运用上的方便,对它作如下规定:

规定 1 当 $a=b$ 时,令 $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$;

规定 2 当 $a > b$ 时,令$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

有了这个规定之后,等式(3)对于 a、b、c 的任何大小顺序都能成立.例如,当 $a<b<c$ 时,只要 f 在$[a,c]$上可积,则有

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x &= \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x\right) - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

性质 5 设 f 为$[a,b]$上的可积函数.若 $f(x)\geqslant 0, x\in[a,b]$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0. \tag{4}$$

证 由于在$[a,b]$上 $f(x)\geqslant 0$,因此 f 的任一积分和都为非负.由 f 在$[a,b]$上可积,则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \geqslant 0.$$ □

推论(积分不等式性)　若 f 与 g 为 $[a,b]$ 上的两个可积函数，且 $f(x)\leqslant g(x)$，$x\in[a,b]$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{5}$$

证　令 $F(x)=g(x)-f(x)\geqslant 0, x\in[a,b]$，由性质 2 知道 F 在 $[a,b]$ 上可积，且由性质 5 推得

$$0\leqslant\int_a^b F(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

不等式(5)得证. □

性质 6　若 f 在 $[a,b]$ 上可积，则 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x. \tag{6}$$

证　由于 f 在 $[a,b]$ 上可积，故任给 $\varepsilon>0$，存在某分割 T，使得 $\sum\limits_T \omega_i^f\Delta x_i < \varepsilon$.
由绝对值不等式

$$\big||f(x')|-|f(x'')|\big| \leqslant |f(x')-f(x'')|,$$

可得 $\omega_i^{|f|}\leqslant\omega_i^f$，于是有

$$\sum_T \omega_i^{|f|}\Delta x_i \leqslant \sum_T \omega_i^f\Delta x_i < \varepsilon.$$

从而证得 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上可积.

再由不等式 $-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|$，应用性质 5(推论)，即证得不等式(6)成立. □

注意　这个性质的逆命题一般不成立，例如

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ -1, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上不可积(类似于狄利克雷函数)；但 $|f(x)|\equiv 1$，它在 $[0,1]$ 上可积.

例 1　求 $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$，其中

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, & -1\leqslant x<0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

解　对于分段函数的定积分，通常利用积分区间可加性来计算，即

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^0 (2x-1)\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\\ &= (x^2-x)\Big|_{-1}^0 + (-\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^1\end{aligned}$$

$$= -2 - e^{-1} + 1 = -(e^{-1} + 1).$$ □

注 1 上述解法中取 $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}(2x-1)\mathrm{d}x$，其中被积函数在 $x=0$ 处的值已由原来的 $f(0) = e^{-x}\Big|_{x=0} = 1$ 改为 $(2x-1)\Big|_{x=0} = -1$，由 §3 习题第 3 题知道这一改动并不影响 f 在 $[-1,0]$ 上的可积性和定积分的值.

注 2 如果要求直接在 $[-1,1]$ 上使用牛顿—莱布尼茨公式来计算 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = F(1) - F(-1)$，这时 $F(x)$ 应取怎样的函数？读者可对照 §2 习题第 3 题来回答.

例 2 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x) \geqslant 0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$，则 $f(x) \equiv 0$，$x \in [a,b]$.

证 用反证法. 倘若有某 $x_0 \in [a,b]$，使 $f(x_0) > 0$，则由连续函数的局部保号性，存在 x_0 的某邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$（当 $x_0 = a$ 或 $x_0 = b$ 时，则为右邻域或左邻域），使在其中 $f(x) \geqslant \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$. 由性质 4 和性质 5 推知

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{x_0-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant 0 + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2}\mathrm{d}x + 0 = f(x_0)\delta > 0,$$

这与假设 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$ 相矛盾. 所以 $f(x) \equiv 0, x \in [a,b]$. □

注 从此例证明中看到，即使 f 为一非负可积函数，只要它在某一点 x_0 处连续，且 $f(x_0) > 0$，则必有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.（至于可积函数必有连续点，这是一个较难证明的命题，读者可参阅 §6 习题第 7 题.）

二 积分中值定理

定理 9.7（积分第一中值定理） 若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a). \tag{7}$$

证 由于 f 在 $[a,b]$ 上连续，因此存在最大值 M 和最小值 m. 由

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, x \in [a,b],$$

使用积分不等式性质得到

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a),$$

或

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M.$$

再由连续函数的介值性，至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \tag{7'}$$

这就证得(7)式成立. □

积分第一中值定理的几何意义如图 9－11 所示，若 f 在$[a,b]$上非负连续，则 $y=f(x)$ 在$[a,b]$上的曲边梯形面积等于以(7′)所示的 $f(\xi)$ 为高，$[a,b]$为底的矩形面积. 而 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 则可理解为 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上所有函数值的平均值. 这是通常有限个数的算术平均值的推广.

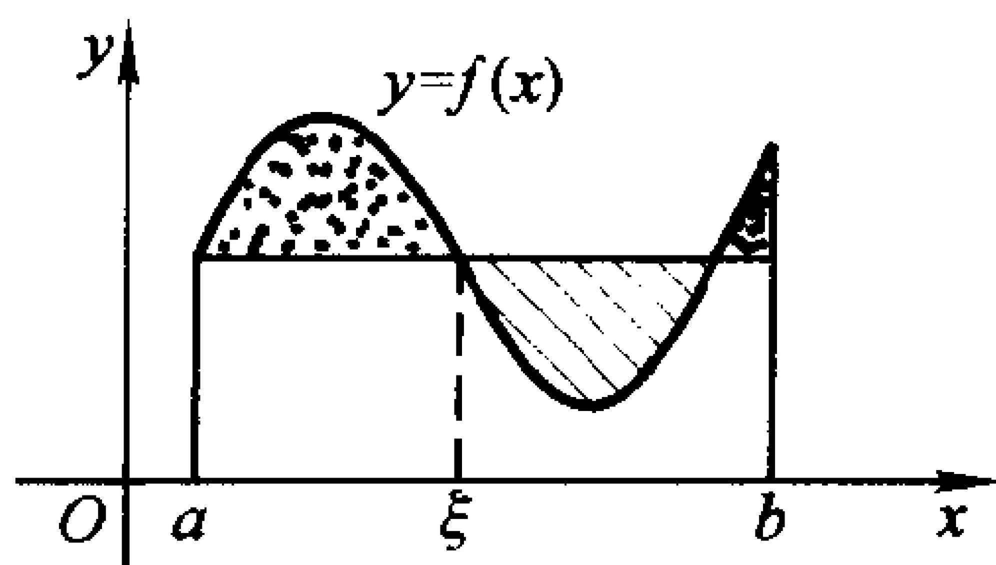


图 9－11

例 3 试求 $f(x)=\sin x$ 在$[0,\pi]$上的平均值.

解 所求平均值为

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}\cos x\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi}.$$ □

定理 9.8(推广的积分第一中值定理) 若 f 与 g 都在$[a,b]$上连续，且 $g(x)$在$[a,b]$上不变号，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{8}$$

(当 $g(x)\equiv 1$ 时，即为定理 9.6.)

证 不妨设 $g(x)\geqslant 0, x\in[a,b]$. 这时有

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x), x\in[a,b],$$

其中 M、m 分别为 f 在$[a,b]$上的最大、最小值. 由定积分的不等式性质，得到

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$，则由上式知 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$，从而对任何 $\xi\in[a,b]$，(8)式都成立. 若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$，则得

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leqslant M.$$

由连续函数的介值性,必至少有一点 $\xi\in[a,b]$,使得

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x},$$

这就证得(8)式成立. □

注 事实上,定理 9.7 和定理 9.8 中的中值点 ξ 必能在开区间(a,b)内取得(证明留作习题).

积分第二中值定理将在下一节里给出.

习 题

1. 证明:若 f 与 g 都在$[a,b]$上可积,则

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

其中 ξ_i,η_i 是 T 所属小区间 Δ_i 中的任意两点,$i=1,2,\cdots,n$.

2. 不求出定积分的值,比较下列各对定积分的大小:

(1) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$.

3. 证明下列不等式:

(1) $\frac{\pi}{2}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}<\frac{\pi}{\sqrt{2}}$;

(2) $1<\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x<\mathrm{e}$;

(3) $1<\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{2}$;

(4) $3\sqrt{\mathrm{e}}<\int_{\mathrm{e}}^{4\mathrm{e}}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x<6$.

4. 设 f 在$[a,b]$上连续,且 $f(x)$不恒等于零,证明 $\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x>0$.

5. 设 f 与 g 都在$[a,b]$上可积,证明

$$M(x)=\max_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\},\quad m(x)=\min_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}$$

在$[a,b]$上也都可积.

6. 试求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$,$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 上各点极径的平均值.

---

7. 设 f 在$[a,b]$上可积,且在$[a,b]$上满足 $|f(x)|\geqslant m>0$. 证明 $\frac{1}{f}$ 在$[a,b]$上也可积.

8. 进一步证明积分第一中值定理(包括定理 9.7 和定理 9.8)中的中值点 $\xi\in(a,b)$.

9. 证明：若 f 与 g 都在 $[a,b]$ 上可积，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，M、m 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上、下确界，则必存在某实数 $\mu(m\leqslant\mu\leqslant M)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

10. 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = 0$，则在 (a,b) 内至少存在两点 x_1、x_2，使 $f(x_1) = f(x_2) = 0$. 又若 $\int_a^b x^2 f(x)\mathrm{d}x = 0$，这时 f 在 (a,b) 内是否至少有三个零点？

11. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)>0$. 证明：

(1) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；

(2) 又若 $f(x)\leqslant 0, x\in[a,b]$，则又有

$$f(x)\geqslant \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, x\in[a,b].$$

12. 证明：

(1) $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1$.

§5 微积分学基本定理·定积分计算(续)

当函数的可积性问题告一段落，并对定积分的性质有了足够的认识之后，接着要来解决一个以前多次提到过的问题——在定积分形式下证明连续函数必定存在原函数.

一 变限积分与原函数的存在性

设 f 在 $[a,b]$ 上可积，根据定积分的性质 4，对任何 $x\in[a,b]$，f 在 $[a,x]$ 上也可积. 于是，由

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b] \tag{1}$$

定义了一个以积分上限 x 为自变量的函数，称为**变上限的定积分**. 类似地，又可定义**变下限的定积分**：

$$\Psi(x) = \int_x^b f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b]. \tag{2}$$

Φ 与 Ψ 统称为**变限积分**. 注意，在变限积分(1)与(2)中，不可再把积分变量写成 x（例如 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$），以免与积分上、下限的 x 相混淆.

变限积分所定义的函数有着重要的性质. 由于

$$\int_x^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^x f(t)\mathrm{d}t,$$

因此下面只讨论变上限积分的情形.

定理 9.9 若 f 在$[a,b]$上可积,则由(1)式所定义的函数 Φ 在$[a,b]$上连续.

证 对$[a,b]$上任一确定的点 x,只要 $x+\Delta x\in[a,b]$,按定义式(1)有

$$\Delta\Phi = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t.$$

因 f 在$[a,b]$上有界,可设$|f(t)|\leqslant M, t\in[a,b]$. 于是,当 $\Delta x>0$ 时有

$$|\Delta\Phi| = \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{x+\Delta x} |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant M\Delta x;$$

当 $\Delta x<0$ 时则有$|\Delta\Phi|\leqslant M|\Delta x|$. 由此得到

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\Phi = 0,$$

即证得 Φ 在点 x 连续. 由 x 的任意性,f 在$[a,b]$上处处连续. □

定理 9.10 (原函数存在定理) 若 f 在$[a,b]$上连续,则由(1)式所定义的函数 Φ 在$[a,b]$上处处可导,且

$$\Phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x), x\in[a,b]. \tag{3}$$

证 对$[a,b]$上任一确定的 x,当 $\Delta x\neq 0$ 且 $x+\Delta x\in[a,b]$时,按定义式(1)和积分第一中值定理,有

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t \\ &= f(x+\theta\Delta x), 0\leqslant\theta\leqslant 1.\end{aligned}$$

由于 f 在点 x 连续,故有

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\theta\Delta x) = f(x).$$

由 x 在$[a,b]$上的任意性,证得 Φ 是 f 在$[a,b]$上的一个原函数. □

本定理沟通了导数和定积分这两个从表面看去似不相干的概念之间的内在联系;同时也证明了"连续函数必有原函数"这一基本结论,并以积分形式(1)给出了 f 的一个原函数. 正因为定理 9.10 的重要作用而被誉为**微积分学基本定理**.

此外,又因 f 的任意两个原函数只能相差一个常数,所以当 f 为连续函数时,它的任一原函数 F 必满足

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + C.$$

若在此式中令 $x=a$,得到 $C=F(a)$,从而有

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$

再令 $x=b$,即得

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a). \tag{4}$$

这是牛顿—莱布尼茨公式的又一证明.比照定理 9.1,现在只需假设被积函数 f 为连续函数,其原函数 F 的存在性已为定理 9.10 所保证,无需另作假设.

利用变限积分又能证明下述积分第二中值定理.

定理 9.11 (积分第二中值定理) 设函数 f 在$[a,b]$上可积.

(i)若函数 g 在$[a,b]$上减,且 $g(x)\geqslant 0$,则存在 $\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x; \tag{5}$$

(ii)若函数 g 在$[a,b]$上增,且 $g(x)\geqslant 0$,则存在 $\eta\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_{\eta}^{b} f(x)\mathrm{d}x. \tag{6}$$

证 下面只证(i),类似地可证(ii).设

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b].$$

由于 f 在$[a,b]$上可积,因此 F 在$[a,b]$上连续,从而存在最大值 M 和最小值 m.

若 $g(a)=0$,由假设 $g(x)\equiv 0, x\in[a,b]$,此时对任何 $\xi\in[a,b]$,(5)式恒成立.下面设 $g(a)>0$,这时(5)式即为

$$F(\xi) = \int_a^{\xi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x. \tag{5'}$$

所以问题转化为只须证明

$$m \leqslant \frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant M, \tag{7}$$

因为由此可借助 F 的介值性立刻证得(5′).当然(7)式又等同于

$$mg(a) \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant Mg(a), \tag{7'}$$

下面就来证明这个不等式.

由条件 f 有界,设 $|f(x)|\leqslant L, x\in[a,b]$;而 g 必为可积,从而对任给的 $\varepsilon>0$,必有分割 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,使

$$\sum_T \omega_i^g \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{L}.$$

现把 $I=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 按积分区间可加性写成

$$I = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[g(x)-g(x_{i-1})]f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n}g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\mathrm{d}x$$
$$= I_1 + I_2.$$

对于 I_1,必有

$$|I_1| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|g(x)-g(x_{i-1})|\cdot|f(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant L\cdot\sum_{i=1}^{n}\omega_i^g\Delta x_i < L\cdot\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

对于 I_2,由于 $F(x_0)=F(a)=0$,和

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{x_i}f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{x_{i-1}}f(x)\mathrm{d}x$$
$$= F(x_i) - F(x_{i-1}),$$

可得

$$I_2 = \sum_{i=1}^{n}g(x_{i-1})[F(x_i)-F(x_{i-1})]$$
$$= g(x_0)[F(x_1)-F(x_0)] + \cdots + g(x_{n-1})[F(x_n)-F(x_{n-1})]$$
$$= F(x_1)[g(x_0)-g(x_1)] + \cdots + F(x_{n-1})[g(x_{n-2})-g(x_{n-1})]$$
$$+ F(x_n)g(x_{n-1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1}F(x_i)[g(x_{i-1})-g(x_i)] + F(b)g(x_{n-1}).$$

再由 $g(x)\geqslant 0$ 且减,使得其中 $g(x_{n-1})\geqslant 0, g(x_{i-1})-g(x_i)\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n-1$. 于是利用 $F(x_i)\leqslant M, i=1,2,\cdots,n$ 估计得

$$I_2 \leqslant M\sum_{i=1}^{n-1}[g(x_{i-1})-g(x_i)] + Mg(x_{n-1})$$
$$= Mg(a).$$

同理由 $F(x_i)\geqslant m, i=1,2,\cdots,n$ 又有 $I_2\geqslant mg(a)$.

综合 $I=I_1+I_2, |I_1|<\varepsilon, mg(a)\leqslant I_2\leqslant Mg(a)$,得到

$$-\varepsilon + mg(a) \leqslant I \leqslant Mg(a) + \varepsilon.$$

由 ε 为任意小正数,这便证得

$$mg(a) \leqslant I \leqslant Mg(a),$$

即不等式(7′)成立. 随之又有(7),(5′)和(5)式成立. □

推论 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积. 若 g 为单调函数,则存在 $\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^{b}f(x)\mathrm{d}x. \tag{8}$$

证 若 g 为单调递减函数,令 $h(x)=g(x)-g(b)$,则 h 为非负、递减函数. 由定理 9.11(i),存在 $\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = h(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$$
$$= [g(a) - g(b)]\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

由于 $\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x - g(b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，因此证得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + [g(a) - g(b)]\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$$
$$= g(a)\int_a^\xi f(x) + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若 g 为单调递增函数，只须令 $h(x) = g(x) - g(a)$，并由定理 9.11(ii)和(6)，同样可证得(8)式成立. □

积分第二中值定理以及它的推论是今后建立反常积分收敛判别法的工具.

二 换元积分法与分部积分法

对原函数的存在性有了正确的认识，就能顺利地把不定积分的换元积分法和分部积分法移植到定积分计算中来.

定理 9.12 (定积分换元积分法) 若函数 f 在$[a,b]$上连续，φ 在$[\alpha,\beta]$上连续可微，且满足

$$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, a \leqslant \varphi(t) \leqslant b, t \in [\alpha,\beta],$$

则有定积分换元公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{9}$$

证 由于(9)式两边的被积函数都是连续函数，因此它们的原函数都存在. 设 F 是 f 在$[a,b]$上的一个原函数，由复合函数微分法

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

可见 $F(\varphi(t))$是 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$的一个原函数. 根据牛顿—莱布尼茨公式，证得

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$
$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \quad □$$

从以上证明看到，在用换元法计算定积分时，一旦得到了用新变量表示的原函数后，不必作变量还原，而只要用新的积分限代入并求其差值就可以了. 这就是定积分换元积分法与不定积分换元积分法的区别，这一区别的原因在于不定积分所求的是被积函数的原函数，理应保留与原来相同的自变量；而定积分的计算结果是一个确定的数，如果(9)式一边的定积分计算出来了，那么另一边的定

积分自然也求得了.

注 如果在定理 9.11 的条件中只假定 f 为可积函数,但还要求 φ 是单调的,那么(9)式仍然成立.(本节习题第 14 题.)

例 1 计算 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $x=\sin t$,当 t 由 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时,x 由 0 增到 1,故取 $[\alpha,\beta]=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. 应用公式(9),并注意到在第一象限中 $\cos t\geqslant 0$,则有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

□

例 2 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$.

解 逆向使用公式(9),令 $x=\cos t$,$\mathrm{d}x=-\sin t\,\mathrm{d}t$,当 t 由 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时,x 由 1 减到 0,则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = -\int_1^0 x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

□

例 3 计算 $J=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $x=\tan t$,当 t 从 0 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时,x 从 0 增到 1. 于是由公式(9)及 $\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ 得到

$$\begin{aligned}J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\cos t+\sin t}{\cos t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{\cos t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

对最末第二个定积分作变换 $u=\frac{\pi}{4}-t$,有

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\cos u(-\mathrm{d}u) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos u\,\mathrm{d}u,$$

它与上面第三个定积分相消.故得

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$ □

事实上,例3中的被积函数的原函数虽然存在,但难以用初等函数来表示,因此无法直接使用牛顿—莱布尼茨公式.可是像上面那样,利用定积分的性质和换元公式(9),消去了其中无法求出原函数的部分,最终得出这个定积分的值.

换元积分法还可用来证明一些特殊的积分性质,如本节习题中的第5,6,7等题.

定理9.13 (定积分分部积分法) 若 $u(x),v(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续可微函数,则有定积分分部积分公式:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x. \tag{10}$$

证 因为 uv 是 $uv'+u'v$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数,所以有

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x+\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x&=\int_a^b[u(x)v'(x)+u'(x)v(x)]\mathrm{d}x\\&=u(x)v(x)\Big|_a^b.\end{aligned}$$

移项后即为(10)式. □

为方便起见,公式(10)允许写成

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x). \tag{10'}$$

例4 计算 $\int_1^{\mathrm{e}}x^2\ln x\mathrm{d}x$.

解 $$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}}x^2\ln x\mathrm{d}x&=\frac{1}{3}\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}(x^3)=\frac{1}{3}\left(x^3\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}x^2\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^3-\frac{1}{3}x^3\Big|_1^{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{9}(2\mathrm{e}^3+1).\end{aligned}$$ □

例5 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots$.

解 当 $n\geqslant 2$ 时,用分部积分求得

$$\begin{aligned}J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x&=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\mathrm{d}x-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\\&=(n-1)J_{n-2}-(n-1)J_n.\end{aligned}$$

移项整理后得到递推公式:

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}, n \geqslant 2. \tag{11}$$

由于

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \quad J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1,$$

重复应用递推式(11)便得

$$\left.\begin{aligned} J_{2m} &= \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \\ J_{2m+1} &= \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

令 $x = \frac{\pi}{2} - t$,可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n \left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

因而这两个定积分是等值的. □

由例 5 结论(12)可导出著名的**沃利斯(Wallis)公式**:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m \to \infty} \left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2m+1}. \tag{13}$$

事实上,由

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} x dx,$$

把(12)代入,得到

$$\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} < \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!},$$

由此又得

$$A_m = \left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2m+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2m} = B_m.$$

因为

$$0 < B_m - A_m = \left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2m(2m+1)} < \frac{1}{2m} \cdot \frac{\pi}{2} \to 0 (m \to \infty),$$

所以 $\lim\limits_{m \to \infty} (B_m - A_m) = 0$. 而 $\frac{\pi}{2} - A_m < B_m - A_m$,故得

$$\lim_{m \to \infty} A_m = \frac{\pi}{2} \text{(即(13)式)}.$$

沃利斯公式(13)揭示了 π 与整数之间的一种很不寻常的关系.

三 泰勒公式的积分型余项

若在$[a,b]$上 $u(x)$、$v(x)$有 $n+1$ 阶连续导函数,则有

$$\int_a^b u(x)v^{(n+1)}(x)\mathrm{d}x = \Big[u(x)v^{(n)}(x) - u'(x)v^{(n-1)}(x) + \cdots$$
$$+ (-1)^n u^{(n)}(x)v(x)\Big]_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}(x)v(x)\mathrm{d}x$$
$$(n = 1,2,\cdots). \tag{14}$$

这是推广的分部积分公式,读者不难用数学归纳法加以证明.下面应用公式(14)导出泰勒公式的积分型余项.

设函数 f 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有 $n+1$ 阶连续导函数.令 $x\in U(x_0)$, $u(t)=(x-t)^n$, $v(t)=f(t)$, $t\in[x_0,x]$(或$[x,x_0]$).利用(14)式得

$$\int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \Big[(x-t)^n f^{(n)}(t) + n(x-t)^{n-1}f^{(n-1)}(t) + \cdots$$
$$+ n!f(t)\Big]_{x_0}^x + \int_{x_0}^x 0\cdot f(t)\mathrm{d}t$$
$$= n!f(x) - n!\Big[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\Big]$$
$$= n!R_n(x),$$

其中 $R_n(x)$即为泰勒公式的 n 阶余项.由此求得

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t, \tag{15}$$

这就是泰勒公式的**积分型余项**.

由于 $f^{(n+1)}(t)$连续,$(x-t)^n$ 在$[x_0,x]$(或$[x,x_0]$)上保持同号,因此由推广的积分第一中值定理,可将(15)式写作

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^x (x-t)^n\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1},$$

其中 $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$, $0\leqslant\theta\leqslant1$.这就是以前所熟悉的拉格朗日型余项.

如果直接用积分第一中值定理于(15),则得

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0),$$
$$\xi = x_0 + \theta(x-x_0), 0\leqslant\theta\leqslant1.$$

由于

$$(x-\xi)^n(x-x_0) = [x-x_0-\theta(x-x_0)]^n(x-x_0)$$
$$= (1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1},$$

因此又可进一步把 $R_n(x)$ 改写为

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(1 - \theta)^n(x - x_0)^{n+1},$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant 1. \tag{16}$$

特别当 $x_0=0$ 时,又有

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\theta x)(1 - \theta)^n x^{n+1}, 0 \leqslant \theta \leqslant 1. \tag{17}$$

公式(16)、(17)称为泰勒公式的**柯西型余项**.各种形式的泰勒公式余项,将在第十四章里显示它们的功用.

习　　题

1. 设 f 为连续函数,u、v 均为可导函数,且可实行复合 $f\circ u$ 与 $f\circ v$.证明:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

2. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续,$F(x)=\int_a^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t$.证明 $F''(x) = f(x), x \in [a,b]$.

3. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}$.

4. 计算下列定积分:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin 2x\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^1\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x(a>0)$;　　(4) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x+1)^{3/2}}$;

(5) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$;　　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^1\arcsin x\mathrm{d}x$;　　(8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$;

(9) $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}|\ln x|\mathrm{d}x$;　　(10) $\int_0^1\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(11) $\int_0^a x^2\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\mathrm{d}x(a>0)$;　　(12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\mathrm{d}\theta$.

5. 设 f 在 $[-a,a]$ 上可积.证明:

(1) 若 f 为奇函数,则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$;

(2) 若 f 为偶函数,则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

6. 设 f 为 $(-\infty,+\infty)$ 上以 p 为周期的连续周期函数.证明对任何实数 a,恒有

$$\int_a^{a+p} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^p f(x)\mathrm{d}x.$$

7. 设 f 为连续函数. 证明:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

---

8. 设 $J(m,n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x$($m,n$ 为正整数). 证明:

$$J(m,n) = \frac{n-1}{m+n}J(m,n-2) = \frac{m-1}{m+n}J(m-2,n),$$

并求 $J(2m,2n)$.

9. 证明:若在 $(0,+\infty)$ 上 f 为连续函数,且对任何 $a>0$ 有

$$g(x) = \int_x^{ax} f(t)\mathrm{d}t \equiv \text{常数}, x \in (0,+\infty),$$

则 $f(x)=\frac{c}{x}, x\in(0,+\infty)$, c 为常数.

10. 设 f 为连续可微函数,试求

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x (x-t)f'(t)\mathrm{d}t,$$

并用此结果求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x (x-t)\sin t\mathrm{d}t$.

11. 设 $y=f(x)$ 为 $[a,b]$ 上严格增的连续曲线(图 9-12). 试证存在 $\xi\in(a,b)$,使图中两阴影部分面积相等.

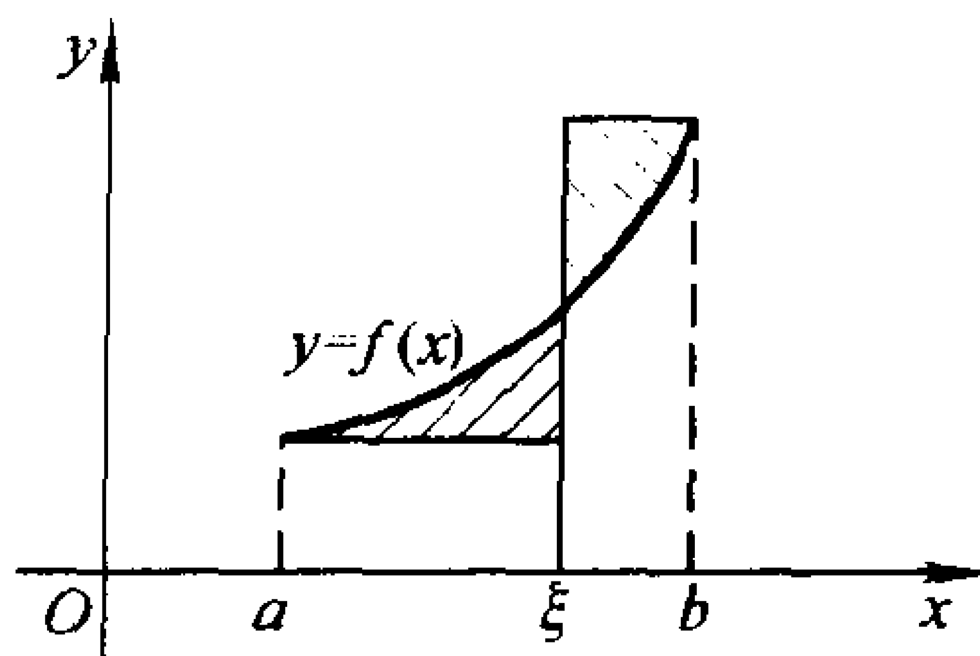


图 9-12

12. 设 f 为 $[0,2\pi]$ 上的单调递减函数. 证明:对任何正整数 n 恒有

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

13. 证明:当 $x>0$ 时有不等式

$$\left|\int_x^{x+c} \sin t^2\mathrm{d}t\right| < \frac{1}{x}(c>0).$$

14. 证明:若 f 在 $[a,b]$ 上可积, φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上单调且连续可微, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$,则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

*15. 证明:若在 $[a,b]$ 上 f 为连续函数, g 为连续可微的单调函数,则存在 $\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(提示:与定理 9.11 及其推论相比较,这里的条件要强得多,因此可望有一个比较简单的,不同于定理 9.11 的证明.)

* §6 可积性理论补叙

一 上和与下和的性质

在§3第二段里，我们已经引入了上和 $S(T)$ 和下和 $s(T)$ 的概念. 即对于分割 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，以及 $\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，有

$$S(T)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,\quad s(T)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i,$$

其中 $M_i=\sup\limits_{x\in\Delta_i}f(x)$，$m_i=\inf\limits_{x\in\Delta_i}f(x)$，$i=1,2,\cdots,n$. 由于假设 f 在 $[a,b]$ 上有界，因此上述 M_i，m_i 以及 f 在 $[a,b]$ 上的上、下确界 M 与 m 都存在，而且对于任何 $\xi_i\in\Delta_i$，必有

$$m(b-a)\leqslant s(T)\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant S(T)\leqslant M(b-a).\tag{1}$$

下面讨论上和与下和的性质. 借助这些性质，便能由不等式(1)导出可积的充要条件.

性质 1 对同一个分割 T，相对于任何点集 $\{\xi_i\}$ 而言，上和是所有积分和的上确界，下和是所有积分和的下确界. 即

$$S(T)=\sup_{\{\xi_i\}}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,\quad s(T)=\inf_{\{\xi_i\}}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

证 由不等式(1)知道，相对于任何点集 $\{\xi_i\}$ 而言，上和与下和分别是全体积分和的上界与下界. 现在进一步证明它们分别是全体积分和的最小上界与最大下界.

任给 $\varepsilon>0$，在各个 Δ_i 上由于 M_i 是 $f(x)$ 的上确界，故可选取点 $\xi_i\in\Delta_i$，使 $f(\xi_i)>M_i-\dfrac{\varepsilon}{b-a}$. 于是有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i&>\sum_{i=1}^{n}\left(M_i-\frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_i\\&=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i-\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=S(T)-\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了 $S(T)$ 是全体积分和的上确界. 类似地可证 $s(T)$ 是全体积分和的下确界. □

性质 2 设 T' 为分割 T 添加 p 个新分点后所得到的分割，则有

$$S(T)\geqslant S(T')\geqslant S(T)-(M-m)p\|T\|,\tag{2}$$

$$s(T)\leqslant s(T')\leqslant s(T)+(M-m)p\|T\|.\tag{3}$$

这个性质指出：增加分点后，上和不增，下和不减.

证　这里证明不等式(2)，同理可证(3).

将 p 个新分点同时添加到 T，和逐个添加到 T，都同样得到 T'，所以我们先证 $p=1$ 的情形.

在 T 上添加一个新分点，它必落在 T 的某一小区间 Δ_k 内，而且将 Δ_k 分为两个小区间，记为 Δ'_k 与 Δ''_k. 但 T 的其他小区间 $\Delta_i(i\neq k)$ 仍旧是新分割 T_1 所属的小区间. 因此，比较 $S(T)$ 与 $S(T_1)$ 的各个被加项，它们之间的差别仅仅是 $S(T)$ 中的 $M_k\Delta x_k$ 一项换成了 $S(T_1)$ 中的 $M'_k\Delta x'_k$ 与 $M''_k\Delta x''_k$ 两项（这里 M'_k 与 M''_k 分别是 f 在 Δ'_k 与 Δ''_k 上的上确界），所以

$$\begin{aligned} S(T)-S(T_1) &= M_k\Delta x_k-(M'_k\Delta x'_k+M''_k\Delta x''_k) \\ &= M_k(\Delta x'_k+\Delta x''_k)-(M'_k\Delta x'_k+M''_k\Delta x''_k) \\ &= (M_k-M'_k)\Delta x'_k+(M_k-M''_k)\Delta x''_k. \end{aligned}$$

由于

$$m\leqslant M'_k(\text{或 } M''_k)\leqslant M_k\leqslant M,$$

故有

$$\begin{aligned} 0\leqslant S(T)-S(T_1) &\leqslant (M-m)\Delta x'_k+(M-m)\Delta x''_k \\ &= (M-m)\Delta x_k\leqslant (M-m)\|T\|. \end{aligned}$$

这就证得 $p=1$ 时(2)式成立.

一般说来，对 T_i 增加一个分点得到 T_{i+1}，就有

$$0\leqslant S(T_i)-S(T_{i+1})\leqslant (M-m)\|T_i\|,i=0,1,2,\cdots,p-1$$

（这里 $T_0=T,T_p=T'$）. 把这些不等式对 i 依次相加，得到

$$0\leqslant S(T)-S(T')\leqslant (M-m)\sum_{i=0}^{p-1}\|T_i\|\leqslant (M-m)p\|T\|.$$

这就证得(2)式成立. □

性质 3　若 T' 与 T'' 为任意两个分割，$T=T'+T''$ 表示把 T' 与 T'' 的所有分点合并而得的分割（注意：重复的分点只取一次），则

$$S(T)\leqslant S(T'),\qquad s(T)\geqslant s(T'),$$
$$S(T)\leqslant S(T''),\quad s(T)\geqslant s(T'').$$

证　这是因为 T 既可看作 T' 添加新分点后得到的分割，也可看作 T'' 添加新分点后得到的分割，所以由性质 2 立刻推知此性质成立. □

性质 4　对任意两个分割 T' 与 T''，总有

$$s(T')\leqslant S(T'').$$

证　令 $T=T'+T''$. 由性质 1 与性质 3 便有

$$s(T')\leqslant s(T)\leqslant S(T)\leqslant S(T''). \qquad □$$

这个性质指出:在对$[a,b]$所作的任意两个分割中,一个分割的下和总不大于另一个分割的上和.因此对所有分割来说,所有下和有上界,所有上和有下界,从而分别存在上确界与下确界,把它们记作

$$S=\inf_{T} S(T),\quad s=\sup_{T} s(T).$$

通常称 S 为 f 在$[a,b]$上的**上积分**,s 为 f 在$[a,b]$上的**下积分**.

性质 5 $\quad m(b-a)\leqslant s\leqslant S\leqslant M(b-a)$.

这可由性质 4 直接推出.

性质 6 (达布定理) 上、下积分也是上和与下和在 $\|T\|\to 0$ 时的极限,即

$$\lim_{\|T\|\to 0} S(T)=S,\qquad \lim_{\|T\|\to 0} s(T)=s.$$

证 下面只证第一个极限.

任给 $\varepsilon>0$,由 S 的定义,必存在某一分割 T' 使得

$$S(T')<S+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

设 T' 由 p 个分点所构成,对于任意另一个分割 T 来说,$T+T'$ 至多比 T 多 p 个分点,由性质 2 和性质 3 得到

$$S(T)-(M-m)p\|T\|\leqslant S(T+T')\leqslant S(T').$$

于是有

$$S(T)\leqslant S(T')+(M-m)p\|T\|.$$

所以,只要 $\|T\|<\frac{\varepsilon}{2(M-m)p}$①,就有 $S(T)\leqslant S(T')+\frac{\varepsilon}{2}$.联系(4)式,推得 $S\leqslant S(T)<S+\varepsilon$.这就证得

$$\lim_{\|T\|\to 0} S(T)=S. \qquad \square$$

二 可积的充要条件

定理 9.14 (可积的第一充要条件) 函数 f 在$[a,b]$上可积的充要条件是:f 在$[a,b]$上的上积分与下积分相等,即

$$S=s.$$

证 [必要性] 设 f 在$[a,b]$上可积,$J=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.由定积分定义,任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,只要 $\|T\|<\delta$,就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|<\varepsilon.$$

① 当 $M=m$ 时 f 为常量函数,性质恒成立.所以这里设 $M>m$.

另一方面,由于 $S(T)$ 与 $s(T)$ 分别为积分和关于点集 $\{\xi_i\}$ 的上、下确界(即性质1),所以当 $\|T\|<\delta$ 时又有

$$|S(T)-J|\leqslant\varepsilon,\quad |s(T)-J|\leqslant\varepsilon.$$

这说明当 $\|T\|\to 0$ 时 $S(T)$ 与 $s(T)$ 都以 J 为极限. 由达布定理(即性质6), $S=s=J$.

[充分性] 设 $S=s=J$. 由达布定理得

$$\lim_{\|T\|\to 0}S(T)=\lim_{\|T\|\to 0}s(T)=J. \tag{5}$$

借助不等式(1),任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $\|T\|<\delta$ 时,满足

$$J-\varepsilon<s(T)\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant S(T)<J+\varepsilon.$$

从而 f 在 $[a,b]$ 上可积,且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=J$. □

§3 例1提到的狄利克雷函数在 $[0,1]$ 上不可积,正是由于它的上积分 $(S=1)$ 与下积分 $(s=0)$ 不相等所致.

定理 9.15 (可积的第二充要条件) 函数 f 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是:任给 $\varepsilon>0$,总存在某一分割 T,使得

$$S(T)-s(T)<\varepsilon,\text{即}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

其中 $\omega_i=M_i-m_i$(f 在 Δ_i 上的振幅),$i=1,2,\cdots,n$.

此定理即为§3中未曾证明的可积准则.

证 [必要性] 设 f 在 $[a,b]$ 上可积,由定理9.14中的(5)式,有

$$\lim_{\|T\|\to 0}[S(T)-s(T)]=0.$$

于是,任给 $\varepsilon>0$,只要 $\|T\|$ 足够小,总存在分割 T,使得

$$S(T)-s(T)<\varepsilon.$$

[充分性] 若定理条件得到满足,则由

$$s(T)\leqslant s\leqslant S\leqslant S(T)$$

可推得

$$0\leqslant S-s\leqslant S(T)-s(T)<\varepsilon.$$

由于 ε 的任意性,必有 $S=s$,故由定理9.14证得 f 在 $[a,b]$ 上可积. □

在§3证明可积函数类与§4讨论定积分的性质时,我们已经熟悉了可积第二充要条件的重要作用.

定理 9.16 (可积的第三充要条件) 函数 f 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是:任给正数 ε、η,总存在某一分割 T,使得属于 T 的所有小区间中,对应于振幅 $\omega_{k'}\geqslant\varepsilon$ 的那些小区间 $\Delta_{k'}$ 的总长 $\sum_{k'}\Delta x_{k'}<\eta$.

证 [必要性] 设 f 在 $[a,b]$ 上可积. 由定理 9.15, 对于 $\sigma=\varepsilon\eta>0$, 存在某一分割 T, 使得 $\sum\limits_{k}\omega_k\Delta x_k<\sigma$. 于是便有

$$\varepsilon\sum_{k'}\Delta x_{k'}\leqslant\sum_{k'}\omega_{k'}\Delta x_{k'}\leqslant\sum_{k}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon\eta,$$

由此即得 $\sum\limits_{k'}\Delta x_{k'}<\eta$.

[充分性] 任给 $\varepsilon'>0$, 取 $\varepsilon=\dfrac{\varepsilon'}{2(b-a)}>0$, $\eta=\dfrac{\varepsilon'}{2(M-m)}>0$. 由假设, 存在某一分割 T, 使得 $\omega_{k'}\geqslant\varepsilon$ 的那些 $\Delta_{k'}$ 的总长 $\sum\limits_{k'}\Delta x_{k'}<\eta$. 设 T 中其余满足 $\omega_{k''}<\varepsilon$ 的那些小区间为 $\Delta_{k''}$, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{k}\omega_k\Delta x_k&=\sum_{k'}\omega_{k'}\Delta x_{k'}+\sum_{k''}\omega_{k''}\Delta x_{k''}\\&<(M-m)\sum_{k'}\Delta x_{k'}+\varepsilon\sum_{k''}\Delta x_{k''}\\&\leqslant(M-m)\eta+\varepsilon(b-a)\\&=\frac{\varepsilon'}{2}+\frac{\varepsilon'}{2}=\varepsilon'.\end{aligned}$$

由定理 9.15 推知 f 在 $[a,b]$ 上可积. □

例 1 用定理9.16证明黎曼函数在 $[0,1]$ 上可积, 且定积分等于 0.

证 在 §3 的例 3, 我们曾用可积的第二充要条件证得黎曼函数在 $[0,1]$ 上可积. 现在改用第三充要条件来证明, 将更为简明.

已知黎曼函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, p、q\ \text{互素}, p<q,\\ 0, & x=0,1\ \text{以及}(0,1)\ \text{内的无理数}.\end{cases}$$

任给 $\varepsilon>0$, $\eta>0$. 由于满足 $\dfrac{1}{q}\geqslant\varepsilon$, 即 $q\leqslant\dfrac{1}{\varepsilon}$ 的有理点 $\dfrac{p}{q}$ 只有有限个(设为 K 个), 因此含有这类点的小区间至多 $2K$ 个, 在其上 $\omega_{k'}\geqslant\varepsilon$. 当 $\|T\|<\dfrac{\eta}{2K}$ 时, 就能保证这些小区间的总长满足

$$\sum_{k'}\Delta x_{k'}\leqslant 2K\|T\|<\eta,$$

所以 f 在 $[0,1]$ 上可积.

因为 $m_i=\inf\limits_{x\in\Delta_i}f(x)=0$, $i=1,2,\cdots,n$, 所以 $s(T)=0$,

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=s=0.$$ □

例 2 证明: 若 f 在 $[a,b]$ 上连续, φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, $a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$, $t\in[\alpha,\beta]$, 则 $f\circ\varphi$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积.

证 任给 $\varepsilon>0,\eta>0$. 由于 f 在 $[a,b]$ 上一致连续,因此对上述 η,存在 $\delta>0$,当 x'、$x''\in[a,b]$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时,

$$|f(x')-f(x'')|<\eta.$$

由假设 φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积,对上述正数 δ 和 ε,存在某一分割 T,使得在 T 所属的小区间中,$\omega_{k'}^{\varphi}\geqslant\delta$ 的所有小区间 $\Delta_{k'}$ 的总长 $\sum\limits_{k'}\Delta t_{k'}<\varepsilon$;而在其余小区间 $\Delta_{k''}$ 上 $\omega_{k''}^{\varphi}<\delta$.

设 $F(t)=f(\varphi(t)),t\in[\alpha,\beta]$. 由以上可知:在 T 中的小区间 $\Delta_{k''}$ 上,$\omega_{k''}^{F}<\eta$;至多在所有 $\Delta_{k'}$ 上 $\omega_{k'}^{F}\geqslant\eta$,而这些小区间的总长至多为 $\sum\limits_{k'}\Delta t_{k'}<\varepsilon$.

由可积的第三充要条件,证得复合函数 $f\circ\varphi$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积. □

习　　题

1. 证明性质 2 中关于下和的不等式(3).

2. 证明性质 6 中关于下和的极限式 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}s(T)=s$.

3. 设

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

试求 f 在 $[0,1]$ 上的上积分和下积分;并由此判断 f 在 $[0,1]$ 上是否可积.

4. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积,且 $f(x)\geqslant 0,x\in[a,b]$. 试问 $\sqrt{f}$ 在 $[a,b]$ 上是否可积? 为什么?

5. 证明:定理 9.14 中的可积第二充要条件等价于"任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,对一切满足 $\|T\|<\delta$ 的 T,都有 $\sum\limits_{T}\omega_i\Delta x_i=S(T)-s(T)<\varepsilon$".

---

6. 据理回答:

(1) 何种函数具有"任意下和等于任意上和"的性质?

(2) 何种连续函数具有"所有下和(或上和)都相等"的性质?

(3) 对于可积函数,若"所有下和(或上和)都相等",是否仍有(2)的结论?

7. 本题的最终目的是要证明:若 f 在 $[a,b]$ 上可积,则 f 在 $[a,b]$ 内必定有无限多个处处稠密的连续点. 这可用区间套方法按以下顺序逐一证明:

(1) 若 T 是 $[a,b]$ 的一个分割,使得 $S(T)-s(T)<b-a$,则在 T 中存在某个小区间 Δ_i,使 $\omega_i^f<1$.

(2) 存在区间 $I_1=[a_1,b_1]\subset(a,b)$,使得

$$\omega^f(I_1)=\sup_{x\in I_1}f(x)-\inf_{x\in I_1}f(x)<1.$$

(3) 存在区间 $I_2=[a_2,b_2]\subset(a_1,b_1)$,使得

$$\omega^f(I_2)=\sup_{x\in I_2}f(x)-\inf_{x\in I_2}f(x)<\frac{1}{2}.$$

(4) 继续以上方法,求出一区间序列 $I_n=[a_n,b_n]\subset(a_{n-1},b_{n-1})$,使得

$$\omega^f(I_n)=\sup_{x\in I_n}f(x)-\inf_{x\in I_n}f(x)<\frac{1}{n}.$$

说明 $\{I_n\}$ 为一区间套,从而存在 $x_0\in I_n,n=1,2,\cdots$;而且 f 在点 x_0 连续.

(5) 上面求得的 f 的连续点在 $[a,b]$ 内处处稠密.

总 练 习 题

1. 证明:若 φ 在 $[0,a]$ 上连续,f 二阶可导,且 $f''(x)\geqslant 0$,则有

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))\mathrm{d}t\geqslant f\left(\frac{1}{a}\int_0^a\varphi(t)\mathrm{d}t\right).$$

2. 证明下列命题:

(1) 若 f 在 $[a,b]$ 上连续增,

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, & x\in(a,b],\\ f(a), & x=a,\end{cases}$$

则 F 为 $[a,b]$ 上的增函数.

(2) 若 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续,且 $f(x)>0$,则

$$\varphi(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\bigg/\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

为 $(0,+\infty)$ 上的严格增函数.如果要使 φ 在 $[0,+\infty)$ 上为严格增,试问应补充定义 $\varphi(0)=?$

3. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=A.$$

4. 设 f 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个连续周期函数,周期为 p,证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{p}\int_0^p f(t)\mathrm{d}t.$$

5. 证明:连续的奇函数的一切原函数皆为偶函数;连续的偶函数的原函数中只有一个是奇函数.

6. 证明施瓦茨(Schwarz)不等式:若 f 和 g 在 $[a,b]$ 上可积,则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

7. 利用施瓦茨不等式证明:

(1) 若 f 在 $[a,b]$ 上可积,则

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x;$$

(2) 若 f 在 $[a,b]$ 上可积,且 $f(x)\geqslant m>0$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2;$$

(3) 若 f、g 都在 $[a,b]$ 上可积,则有闵可夫斯基(Minkowski)不等式:

$$\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2 \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}.$$

8. 证明:若 f 在$[a,b]$上连续,且 $f(x)>0$,则

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) \geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}x.$$

9. 设 f 为$(0,+\infty)$上的连续减函数,$f(x)>0$;又设

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x.$$

证明$\{a_n\}$为收敛数列.

*10. 证明:若 f 在$[a,b]$上可积,且处处有 $f(x)>0$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.(提示:由可积的第一充要条件进行反证;也可利用§6 习题第 7 题的结论.)

第十章 定积分的应用

§1 平面图形的面积

在上一章开头讨论过由连续曲线$y=f(x)(\geqslant 0)$,以及直线$x=a$,$x=b(a<b)$和x轴所围曲边梯形的面积为

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b y\mathrm{d}x.$$

如果$f(x)$在$[a,b]$上不都是非负的,则所围图形的面积为

$$A=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^b |y|\mathrm{d}x.$$

一般地,由上、下两条连续曲线$y=f_2(x)$与$y=f_1(x)$以及两条直线$x=a$与$x=b(a<b)$所围的平面图形(图10-1),它的面积计算公式为

$$A=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x. \tag{1}$$

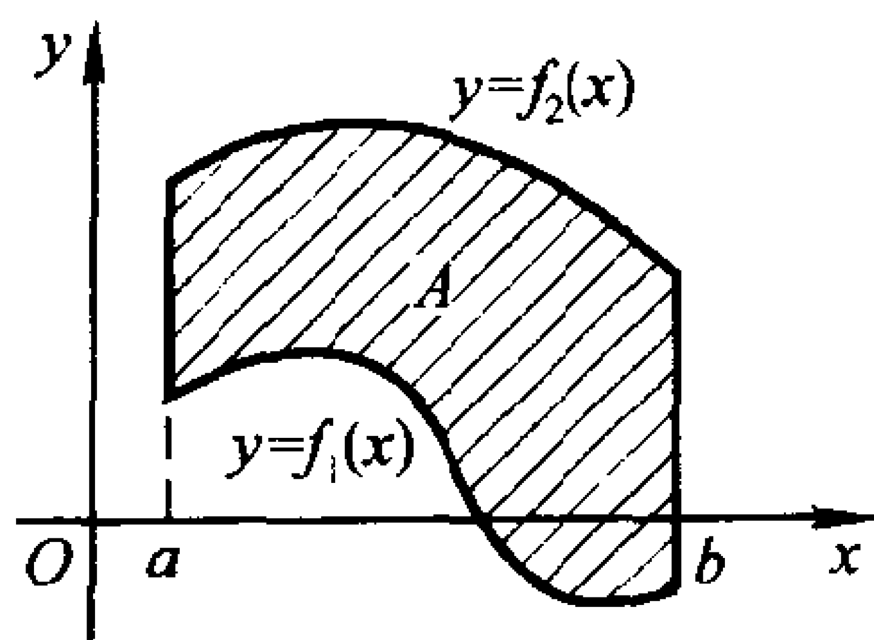


图 10-1

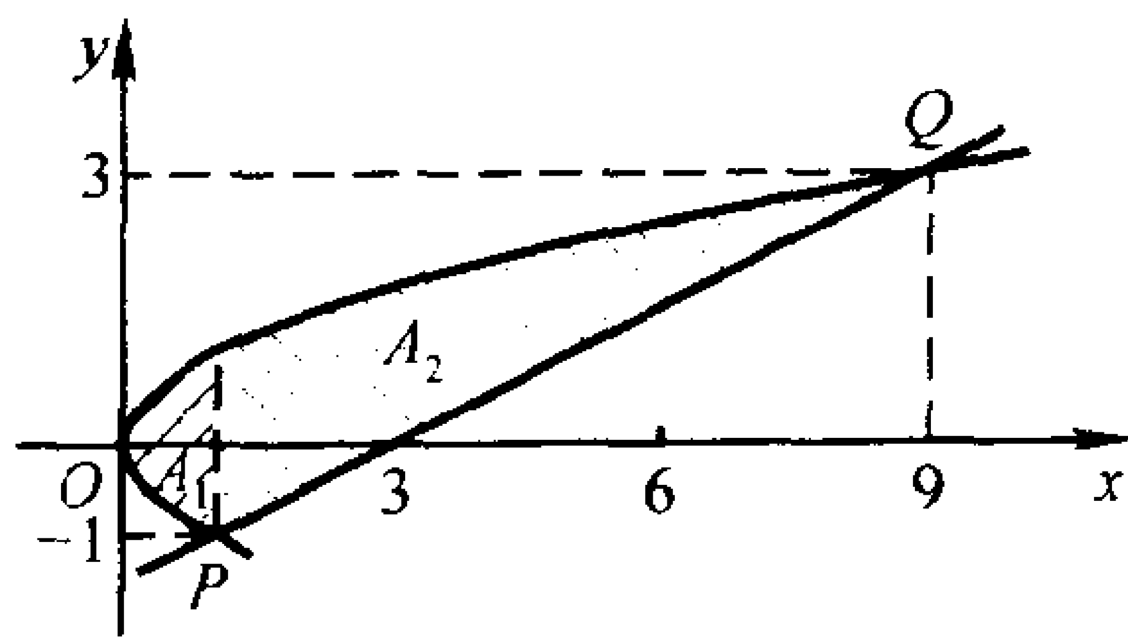


图 10-2

例1 求由抛物线$y^2=x$与直线$x-2y-3=0$所围平面图形的面积A.

解 该平面图形如图10-2所示.先求出抛物线与直线的交点$P(1,-1)$与$Q(9,3)$.用$x=1$把图形分为左、右两部分,应用公式(1)分别求得它们的面积为

$$A_1=\int_0^1[\sqrt{x}-(-\sqrt{x})]\mathrm{d}x=2\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{4}{3},$$

$$A_2=\int_1^9\left(\sqrt{x}-\frac{x-3}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{28}{3}.$$

所以 $A=A_1+A_2=\dfrac{32}{3}$. □

本题也可把抛物线方程和直线方程改写成

$$x=y^2=g_1(y),x=2y+3=g_2(y),y\in[-1,3].$$

并改取积分变量为 y,便得

$$A=\int_{-1}^{3}[g_2(y)-g_1(y)]\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{3}(2y+3-y^2)\mathrm{d}y=\frac{32}{3}.$$

设曲线 C 由参数方程

$$x=x(t),y=y(t),t\in[\alpha,\beta] \tag{2}$$

给出,在$[\alpha,\beta]$上 $y(t)$连续,$x(t)$连续可微且 $x'(t)\neq 0$(对于 $y(t)$连续可微且 $y'(t)\neq 0$ 的情形可类似地讨论).记 $a=x(\alpha)$, $b=x(\beta)$($a<b$ 或 $b<a$),则由曲线 C 及直线 $x=a$, $x=b$ 和 x 轴所围的图形,其面积计算公式为

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}|y(t)x'(t)|\mathrm{d}t. \tag{3}$$

例 2 求由摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$($a>0$)的一拱与 x 轴所围平面图形(图 10－3)的面积.

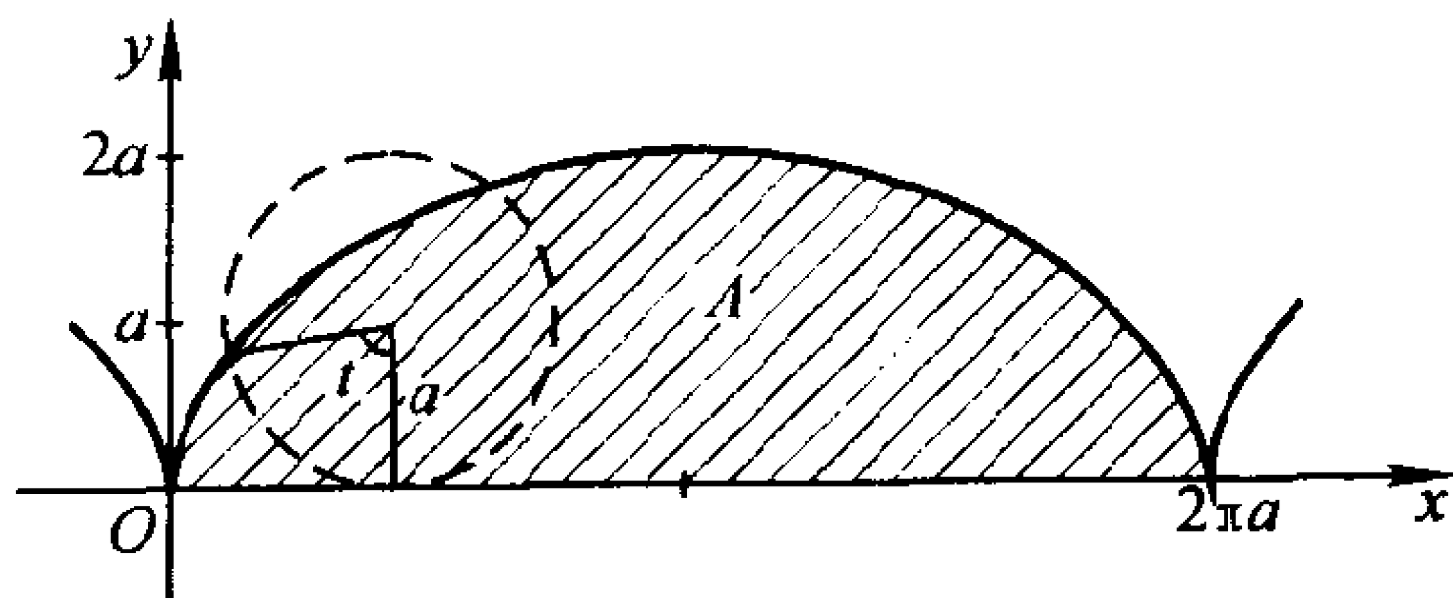


图 10－3

解 摆线的一拱可取 $t\in[0,2\pi]$.所求面积为

$$A=\int_{0}^{2\pi}a(1-\cos t)[a(t-\sin t)]'\mathrm{d}t$$

$$=a^2\int_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=3\pi a^2.$$ □

如果由参数方程(2)所表示的曲线是封闭的,即有

$$x(\alpha)=x(\beta),y(\alpha)=y(\beta),$$

且在(α,β)内曲线自身不再相交,那么由曲线自身所围图形的面积为

$$A=\left|\int_{\alpha}^{\beta}y(t)x'(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\left(\text{或}\left|\int_{\alpha}^{\beta}x(t)y'(t)\mathrm{d}t\right|\right). \tag{4}$$

此公式可由公式(1)和(3)推出,绝对值内的积分,其正、负由曲线(2)的旋转方向所确定.

例 3 求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所围的面积.

解 化椭圆为参数方程

$$x = a\cos t, y = b\sin t, t \in [0,2\pi].$$

由公式(4),求得椭圆所围面积为

$$\begin{aligned}A &= \left|\int_0^{2\pi}b\sin t(a\cos t)'\mathrm{d}t\right| \\ &= ab\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \pi ab.\end{aligned}$$

□

显然,当 $a=b=r$ 时,这就等于圆面积 πr^2.

设曲线 C 由极坐标方程

$$r = r(\theta), \theta \in [\alpha,\beta]$$

给出,其中 $r(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上连续,$\beta-\alpha\leqslant 2\pi$. 由曲线 C 与两条射线$\theta=\alpha,\theta=\beta$所围成的平面图形,通常也称为扇形(图 10-4).此扇形的面积计算公式为

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{5}$$

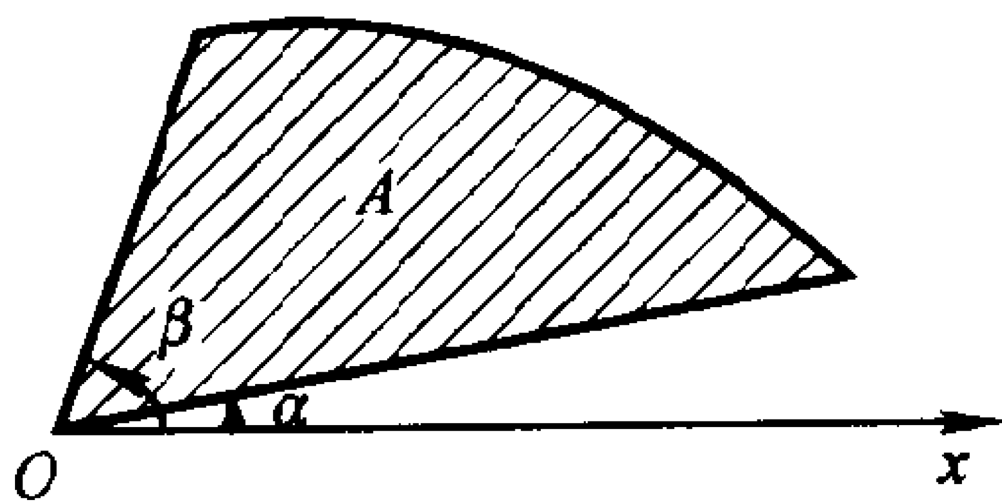


图 10-4

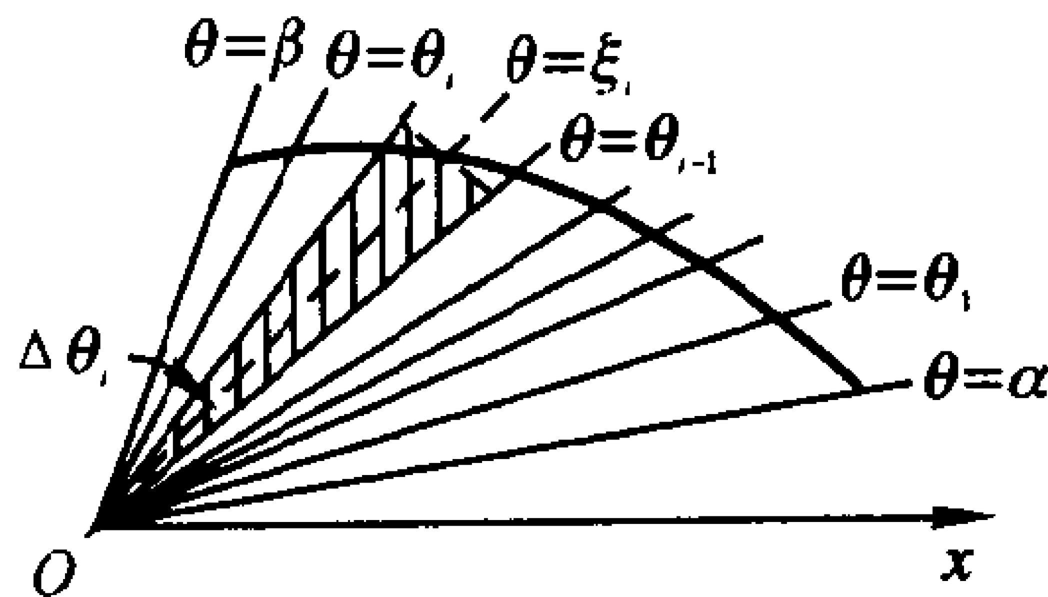


图 10-5

这仍可由定积分的基本思想而得.如图 10-5 所示,对区间$[\alpha,\beta]$作任意分割

$$T: \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta,$$

射线 $\theta=\theta_i(i=1,2,\cdots,n-1)$把扇形分成 n 个小扇形. 由于 $r(\theta)$是连续的,因此当$\|T\|$很小时,在每一个 $\Delta_i=[\theta_{i-1},\theta_i]$上 $r(\theta)$的值变化也很小. 任取 $\xi_i\in\Delta_i$,便有

$$r(\theta) \approx r(\xi_i), \theta \in \Delta_i, i = 1,2,\cdots,n.$$

这时,第 i 个小扇形的面积

$$\Delta A_i \approx \frac{1}{2}r^2(\xi_i)\Delta\theta_i,$$

于是

$$A \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r^2(\xi_i)\Delta\theta_i.$$

由定积分的定义和连续函数的可积性，当 $\|T\|\to 0$ 时，上式右边的极限即为公式(5)中的定积分.

例 4　求双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 所围平面图形的面积.

解　如图 10－6 所示，因为 $r^2\geqslant 0$，所以 θ 的取值范围是 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 与 $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$. 由图形的对称性及公式(5)，得到

$$A = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= a^2\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.\qquad\square$$

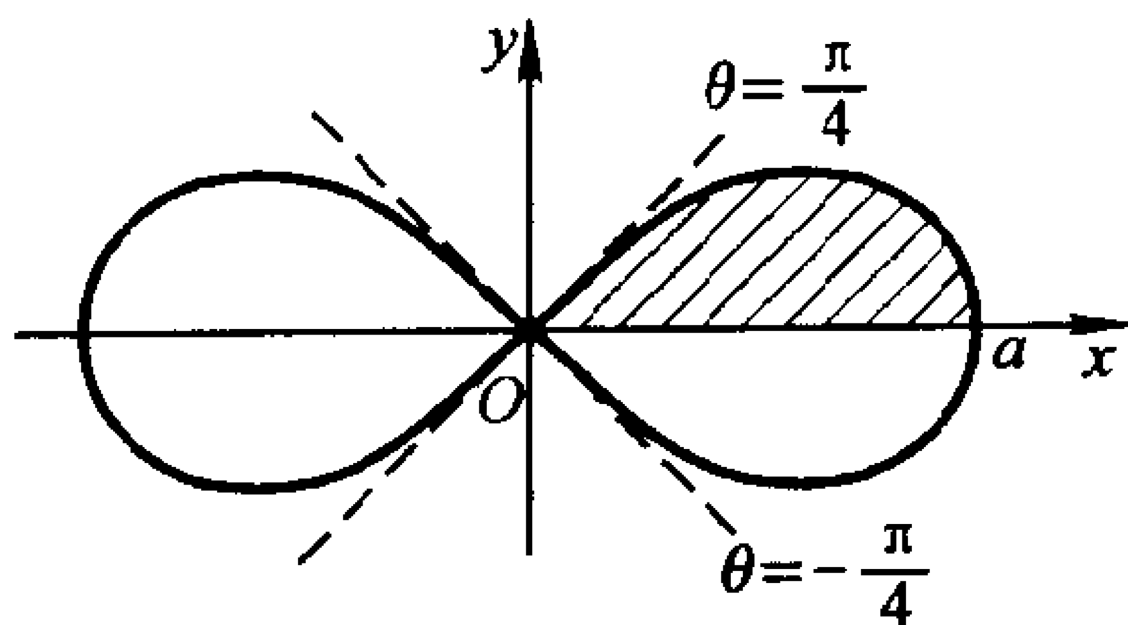


图　10－6

习　题

1. 求由抛物线 $y=x^2$ 与 $y=2-x^2$ 所围图形的面积.
2. 求由曲线 $y=|\ln x|$ 与直线 $x=\frac{1}{10}, x=10, y=0$ 所围图形的面积.
3. 抛物线 $y^2=2x$ 把圆 $x^2+y^2\leqslant 8$ 分成两部分，求这两部分面积之比.
4. 求内摆线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t\,(a>0)$ 所围图形的面积(图 10－7).
5. 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$ 所围图形的面积.
6. 求三叶形曲线 $r=a\sin 3\theta(a>0)$ 所围图形的面积.

---

7. 求由曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1(a、b>0)$ 与坐标轴所围图形的面积.
8. 求由曲线 $x=t-t^3, y=1-t^4$ 所围图形的面积.
9. 求二曲线 $r=\sin\theta$ 与 $r=\sqrt{3}\cos\theta$ 所围公共部分的面积.

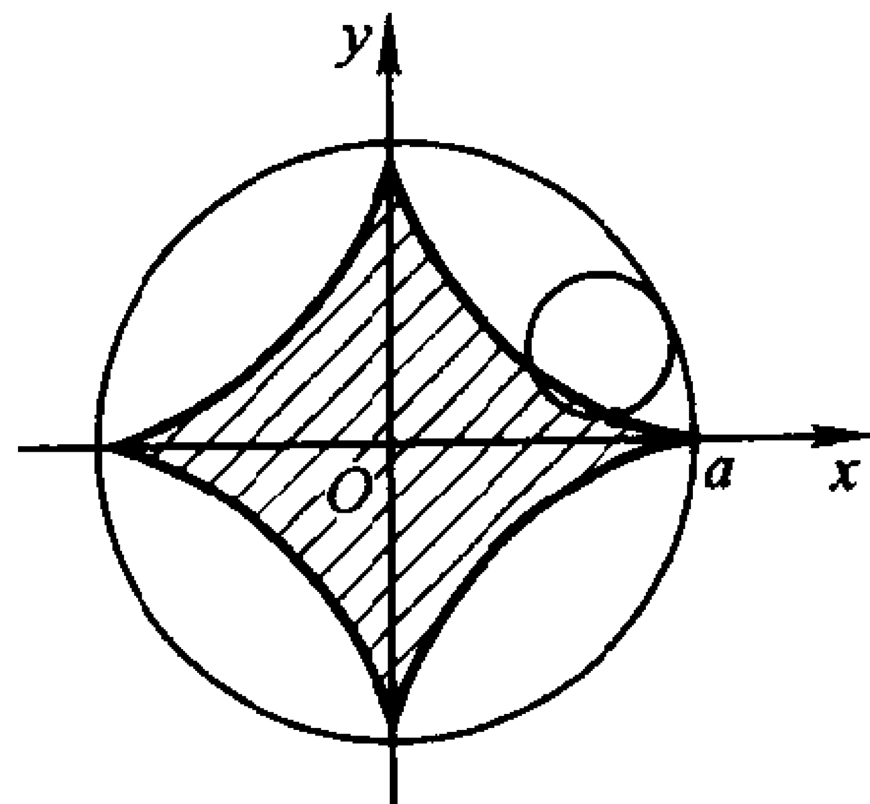


图　10－7

10. 求两椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 与 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>0,b>0)$ 所围公共部分的面积.

§2 由平行截面面积求体积

设 Ω 为三维空间中的一立体，它夹在垂直于 x 轴的两平面 $x=a$ 与 $x=b$ 之间($a<b$). 为方便起见称 Ω 为位于$[a,b]$上的立体. 若在任意一点 $x\in[a,b]$ 处作垂直于 x 轴的平面，它截得 Ω 的截面面积显然是 x 的函数，记为 $A(x)$，$x\in[a,b]$，并称之为 Ω 的**截面面积函数**(见图 10－8). 本节将导出由截面面积函数求立体体积的一般计算公式和旋转体的体积公式.

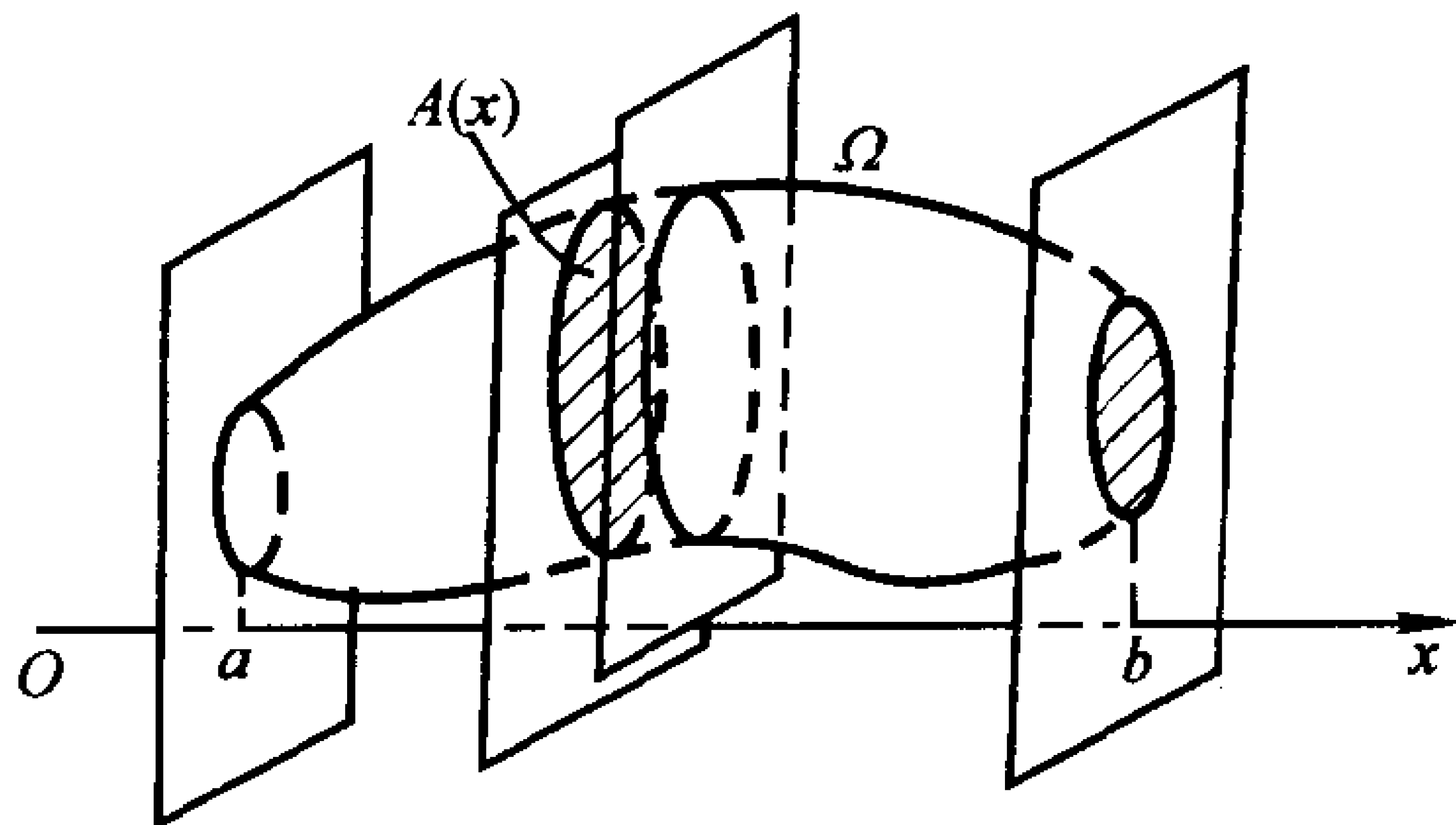


图 10－8

设截面面积函数 $A(x)$是$[a,b]$上的一个连续函数. 对$[a,b]$作分割

$$T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

过各个分点作垂直于 x 轴的平面 $x=x_i$，$i=1,2,\cdots,n$，它们把 Ω 切割成 n 个薄片. 设 $A(x)$在每个小区间 $\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$上的最大、小值分别为 M_i 与 m_i，那么每一薄片的体积 ΔV_i 满足

$$m_i\Delta x_i\leqslant\Delta V_i\leqslant M_i\Delta x_i\text{①}.$$

于是，Ω 的体积 $V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i\leqslant V\leqslant\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i.$$

因为 $A(x)$为连续函数，从而在$[a,b]$上可积，所以当 $\|T\|$ 足够小时，能使

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i<\varepsilon,$$

其中 ε 为任意小的正数. 由此知道

① 严格地说，这里对 Ω 的形状需作如下假设：把 Ω 的上述平行截面正投影到某一垂直于 x 轴的平面上，它们永远是一个含在另一个的里面(这时能保证此处的不等式成立). 一般还可推广到 Ω 由满足这种假设的若干个立体相加或相减而得的情形.

$$V=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i\left(\text{或}\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i\right)$$

$$=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}A(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中 $A(\xi_i)=M_i$(或 m_i),所以有

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

例1 求由两个圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与 $z^2+x^2=a^2$ 所围立体的体积.

解 图 10-9 所示为该立体在第一卦限部分的图象(占整体的八分之一). 对任一 $x_0\in[0,a]$,平面 $x=x_0$ 与这部分立体的截面是一个边长为$\sqrt{a^2-x_0^2}$的正方形,所以 $A(x)=a^2-x^2,x\in[0,a]$. 由公式(1)便得

$$V=8\int_0^a(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{16}{3}a^3. \qquad \square$$

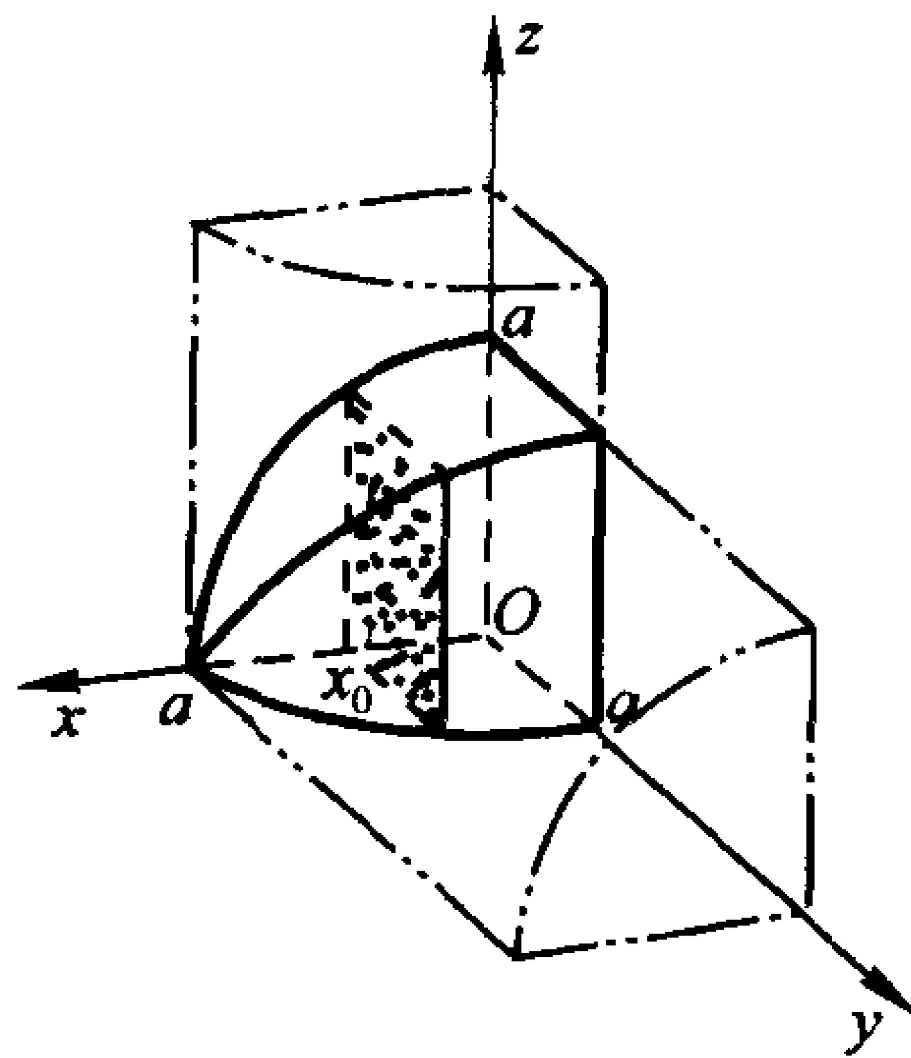


图 10-9

例2 求由椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$所围立体(椭球)的体积.

解 以平面 $x=x_0(|x_0|\leqslant a)$截椭球面,得椭圆(它在 yOz 平面上的正投影):

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)}=1.$$

所以截面面积函数为(根据§1 例3):

$$A(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),x\in[-a,a].$$

于是求得椭球体积

$$V=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi abc. \qquad \square$$

显然,当 $a=b=c=r$ 时,这就等于球的体积$\frac{4}{3}\pi r^3$.

设 Ω_A,Ω_B 为位于同一区间$[a,b]$上的两个立体,其体积分别为 V_A,V_B.若在$[a,b]$上它们的截面面积函数 $A(x)$与 $B(x)$皆连续,且 $A(x)=B(x)$,则由公式(1)推知 $V_A=V_B$.这个关于截面面积相等则体积也相等的原理,早已为我国齐梁时代的数学家祖暅(祖冲之(429—500)之子,生卒年代约在公元5世纪末

至6世纪初)在计算球的体积时所发现. 在《九章算术》一书中所记载的祖暅原理是:"夫叠棊成立积,缘幂势既同则积不容异",其中幂就是截面面积,势就是高. 这就是说,等高处的截面面积既然相等,则两立体的体积不可能不等(图 10－10). 17 世纪意大利数学家卡伐列利(Cavalieri)也提出了类似的原理,但要比祖暅晚一千一百多年.

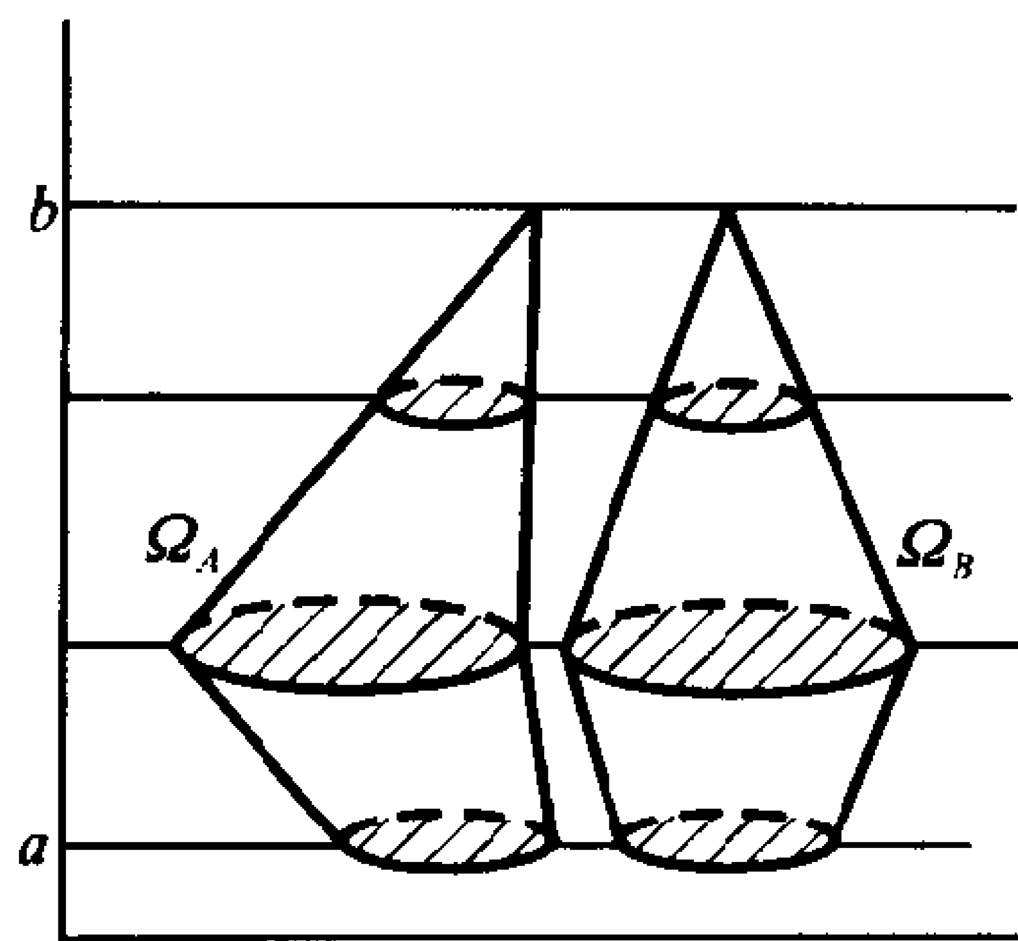


图 10－10

下面讨论旋转体的体积.

设 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数, Ω 是由平面图形

$$0\leqslant |y|\leqslant |f(x)|,a\leqslant x\leqslant b$$

绕 x 轴旋转一周所得的旋转体. 那么易知截面面积函数为

$$A(x)=\pi[f(x)]^2,x\in[a,b].$$

由公式(1),得到旋转体 Ω 的体积公式为

$$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x. \tag{2}$$

例3 试用公式(2)导出圆锥体的体积公式.

解 设正圆锥的高为 h,底圆半径为 r. 如图 10－11 所示,这圆锥体可由平面图形 $0\leqslant |y|\leqslant \frac{r}{h}x$, $x\in[0,h]$ 绕 x 轴旋转一周而得. 所以其体积为

$$V=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\pi r^2h,$$

这个结果读者在中学课程里便已熟知了. 又因同底同高的两个圆锥,在相同高程处的截面为相同的圆,即截面面积函数相同,所以任一高为 h,底半径为 r 的圆锥(正或斜),其体积恒为 $\frac{1}{3}\pi r^2h$. □

例4 求由圆 $x^2+(y-R)^2\leqslant r^2(0<r<R)$ 绕 x 轴旋转一周所得环状立体的体积.

解 如图 10－12 所示,圆 $x^2+(y-R)^2=r^2$ 的上、下半圆分别为

$$\left.\begin{array}{l} y=f_2(x)=R+\sqrt{r^2-x^2}, \\ y=f_1(x)=R-\sqrt{r^2-x^2}, \end{array}\right. \quad |x|\leqslant r.$$

故圆环体的截面面积函数是

$$\begin{aligned} A(x)&=\pi[f_2(x)]^2-\pi[f_1(x)]^2 \\ &=4\pi R\sqrt{r^2-x^2},x\in[-r,R]. \end{aligned}$$

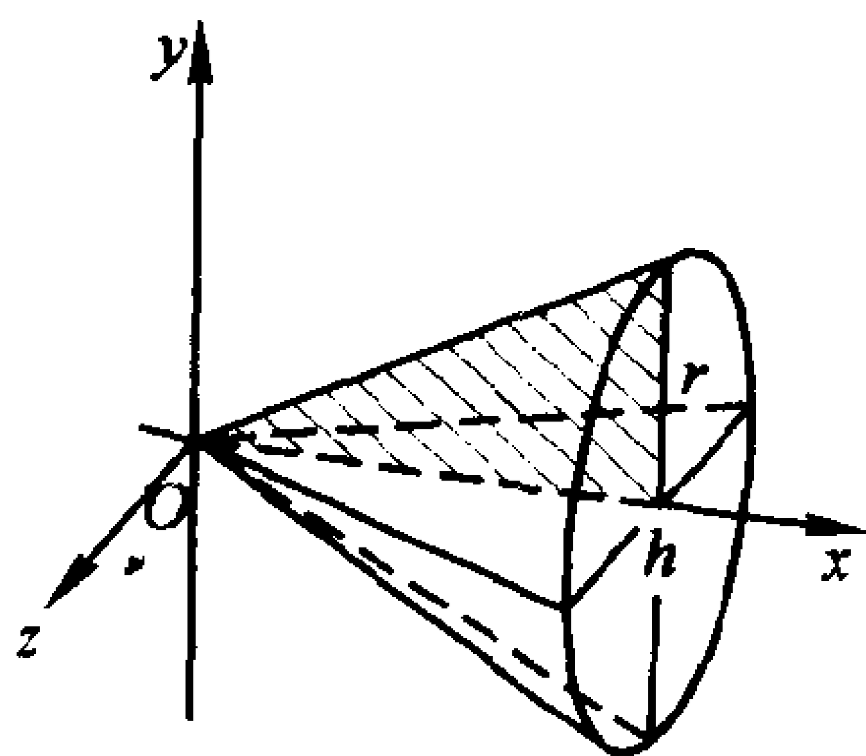


图　10-11

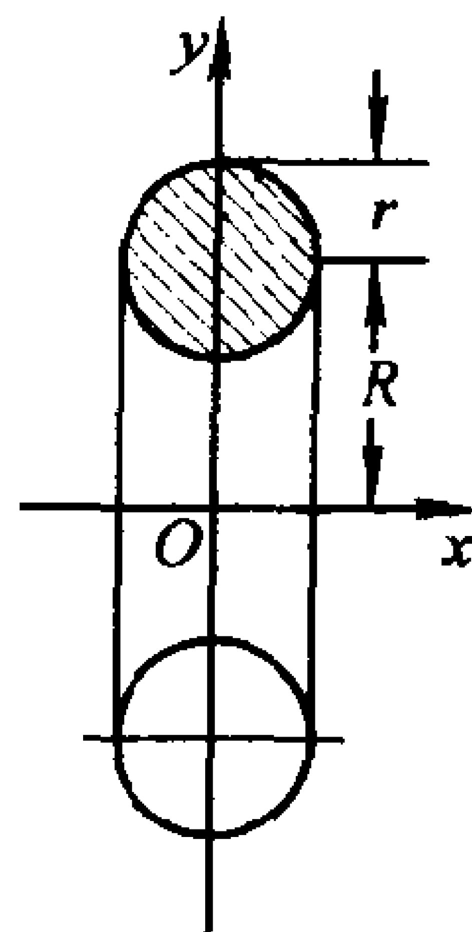


图　10-12

由此得到圆环体的体积为

$$V = 8\pi R\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi^2 r^2 R. \qquad \square$$

如果把上述结果改写成 $V=2\pi R\cdot\pi r^2$，读者不难看出这相当于一个圆柱体的体积.

习　　题

1. 如图 10-13 所示，直椭圆柱体被通过底面短轴的斜平面所截，试求截得楔形体的体积.

2. 求下列平面曲线绕轴旋转所围成立体的体积：

(1) $y=\sin x, 0\leqslant x\leqslant\pi$，绕 x 轴；

(2) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(a>0), 0\leqslant t\leqslant 2\pi$，绕 x 轴；

(3) $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$，绕极轴；

(4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，绕 y 轴.

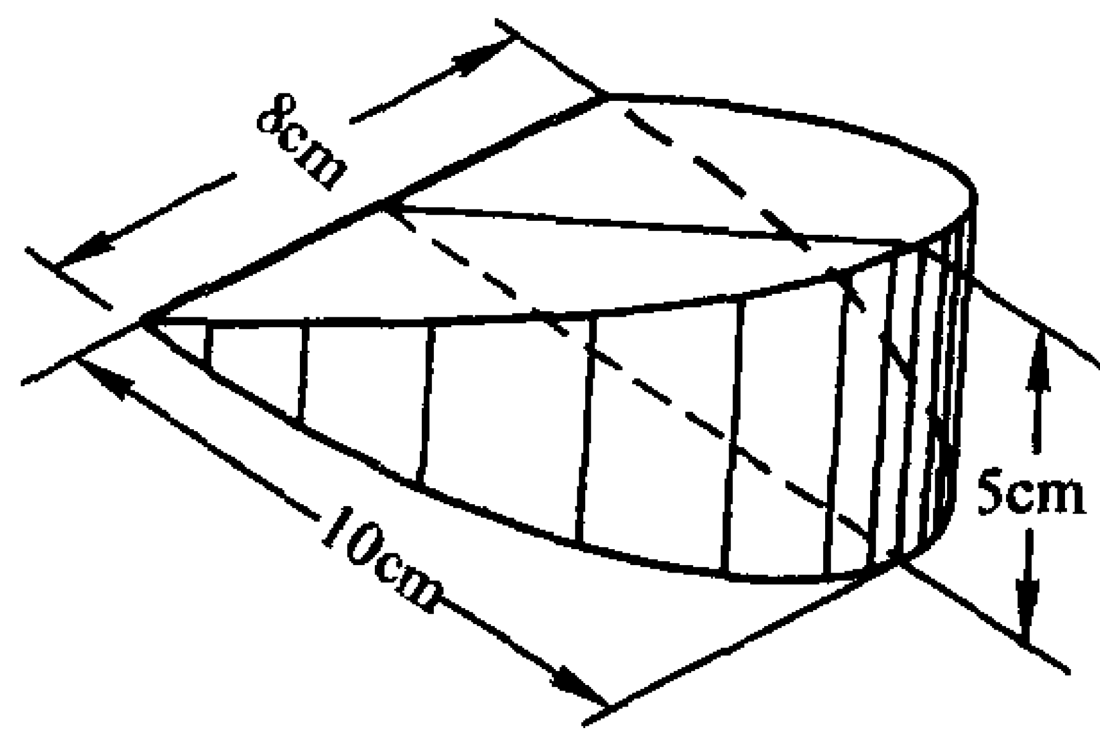


图　10-13

3. 已知球半径为 r，验证高为 h 的球缺体积 $V=\pi h^2\left(r-\dfrac{h}{3}\right)(h\leqslant r)$.

---

4. 求曲线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 所围平面图形(图 10-7)绕 x 轴旋转所得立体的体积.

5. 导出曲边梯形 $0\leqslant y\leqslant f(x), a\leqslant x\leqslant b$ 绕 y 轴旋转所得立体的体积公式为

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

6. 求 $0\leqslant y\leqslant\sin x, 0\leqslant x\leqslant\pi$ 所示平面图形绕 y 轴旋转所得立体的体积.

§3 平面曲线的弧长与曲率

一 平面曲线的弧长

先建立曲线弧长的概念.

设平面曲线 $C=\widehat{AB}$.如图 10-14 所示,在 C 上从 A 到 B 依次取分点:

$$A=P_0,P_1,P_2,\cdots,P_{n-1},P_n=B,$$

它们成为对曲线 C 的一个分割,记为 T.然后用线段联结 T 中每相邻两点,得到 C 的 n 条弦$\overline{P_{i-1}P_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$,这 n 条弦又成为 C 的一条内接折线.记

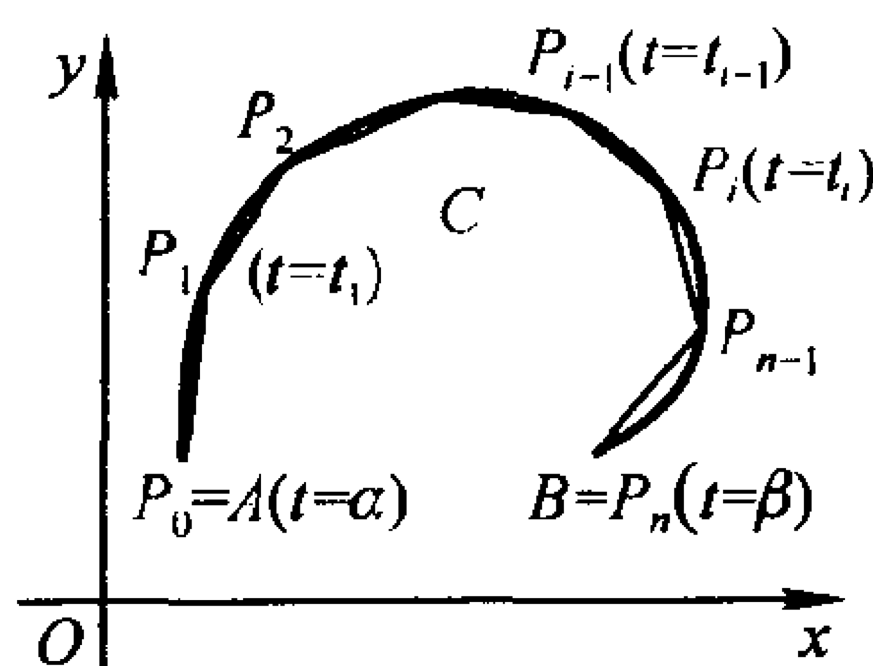


图 10-14

$$\| T\| =\max_{1\leqslant i\leqslant n}|P_{i-1}P_i|,s_T=\sum_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i|,$$

分别表示最长弦的长度和折线的总长度.

定义 1 对于曲线 C 的无论怎样的分割 T,如果存在有限极限

$$\lim_{\| T\|\to 0}s_T=s,$$

则称曲线 C 是**可求长的**,并把极限 s 定义作为曲线 C 的**弧长**.

定义 2 设平面曲线 C 由参数方程

$$x=x(t),y=y(t),t\in[\alpha,\beta] \tag{1}$$

给出.如果 $x(t)$与 $y(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续可微,且 $x'(t)$与 $y'(t)$不同时为零(即 $x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0,t\in[\alpha,\beta]$),则称 C 为一条**光滑曲线**.

定理 10.1 设曲线 C 由参数方程(1)给出.若 C 为一光滑曲线①,则 C 是可求长的,且弧长为

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t. \tag{2}$$

证 如前所述,对 C 作任意分割 $T=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$,并设 P_0 与 P_n 分别对应 $t=\alpha$ 与 $t=\beta$,且

$$P_i(x_i,y_i)=(x(t_i),y(t_i)),i=1,2,\cdots,n-1.$$

于是,与 T 对应地得到区间$[\alpha,\beta]$的一个分割

$$T':\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta.$$

在 T'所属的每个小区间 $\Delta_i=[t_{i-1},t_i]$上,由微分中值定理得

① 这是曲线可求长的一个充分条件,而连续曲线不一定是可求长的.

$$\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)\Delta t_i, \xi_i \in \Delta_i;$$
$$\Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i)\Delta t_i, \eta_i \in \Delta_i.$$

从而曲线 C 的内接折线总长为

$$s_T = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)}\Delta t_i.$$

又因 C 为光滑曲线,当 $x'(t)\neq 0$ 时,在 t 的某邻域内 $x=x(t)$ 有连续的反函数,故当 $\Delta x\to 0$ 时 $\Delta t\to 0$;类似地,当 $y'(t)\neq 0$ 时,亦能由 $\Delta y\to 0$ 推知 $\Delta t\to 0$. 所以当 $|P_{i-1}P_i| = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}\to 0$ 时,必有 $\Delta t_i\to 0$. 反之,当 $\Delta t_i\to 0$ 时,显然有 $|P_{i-1}P_i|\to 0$. 由此知道:当 C 为光滑曲线时, $\|T\|\to 0$ 与 $\|T'\|\to 0$ 是等价的.

由于 $\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续从而可积,因此根据定义 1,只需证明:

$$\lim_{\|T\|\to 0} s_T = \lim_{\|T'\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\xi_i)}\Delta t_i, \tag{3}$$

而后者即为(2)式右边的定积分. 为此记

$$\sigma_i = \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)} - \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\xi_i)},$$

则有

$$s_T = \sum_{i=1}^{n} \left[\sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\xi_i)} + \sigma_i\right]\Delta t_i.$$

利用三角形不等式易证

$$|\sigma_i| \leqslant \big|\,|y'(\eta_i)| - |y'(\xi_i)|\,\big| \leqslant |y'(\eta_i) - y'(\xi_i)|,$$
$$i = 1,2,\cdots,n.$$

由 $y'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续,从而一致连续,故对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $\|T'\|<\delta$ 时,只要 ξ_i、$\eta_i\in\Delta_i$,就有

$$|\sigma_i| < \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}, i = 1,2,\cdots,n.$$

因此有

$$\left| s_T - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\xi_i)}\Delta t_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \Delta t_i \right|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |\sigma_i| \Delta t_i < \varepsilon.$$

即(3)式得证,亦即公式(2)成立. □

若曲线 C 由直角坐标方程

$$y=f(x),x\in[a,b]$$

表示,把它看作参数方程时,即为

$$x=x,y=f(x),x\in[a,b].$$

所以当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微时,此曲线即为一光滑曲线.这时弧长公式为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x. \tag{4}$$

又若曲线 C 由极坐标方程

$$r=r(\theta),\theta\in[\alpha,\beta]$$

表示,把它化为参数方程,则为

$$x=r(\theta)\cos\theta,y=r(\theta)\sin\theta,\theta\in[\alpha,\beta].$$

由于

$$x'(\theta)=r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta,$$

$$y'(\theta)=r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta,$$

$$x'^2(\theta)+y'^2(\theta)=r^2(\theta)+r'^2(\theta),$$

因此当 $r'(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续,且 $r(\theta)$ 与 $r'(\theta)$ 不同时为零时,此极坐标曲线为一光滑曲线.这时弧长公式为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta. \tag{5}$$

例 1 求摆线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)(a>0)$ 一拱的弧长(见图 10-3).

解 $x'(t)=a(1-\cos t),y'(t)=a\sin t$,由公式(2)得

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2(1-\cos t)}\mathrm{d}t$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=8a.$$ □

例 2 求悬链线 $y=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 从 $x=0$ 到 $x=a>0$ 那一段的弧长.

解 $y'=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2},1+y'^2=\frac{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}{4}$,由公式(4)得

$$s=\int_0^a\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_0^a\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^{-a}}{2}.$$ □

例 3 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$ 的周长.

解 由公式(5)得

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\pi}\sqrt{2a^2(1+\cos\theta)}\mathrm{d}\theta$$

$$=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=8a.$$ □

注意 若把公式(2)中的积分上限改为 t,就得到曲线(1)由端点 P_0 到动点 $P(x(t),y(t))$的弧长,即

$$s(t)=\int_{\alpha}^{t}\sqrt{x'^2(\tau)+y'^2(\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

由于被积函数是连续的,因此

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2},$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}. \tag{6}$$

特别称 $s(t)$的微分 $\mathrm{d}s$ 为**弧微分**.如图 10－15 所示,PR 为曲线在点 P 处的切线,在直角三角形 PQR 中,PQ 为 $\mathrm{d}x$,QR 为 $\mathrm{d}y$,PR 则为 $\mathrm{d}s$.这个三角形称为**微分三角形**.

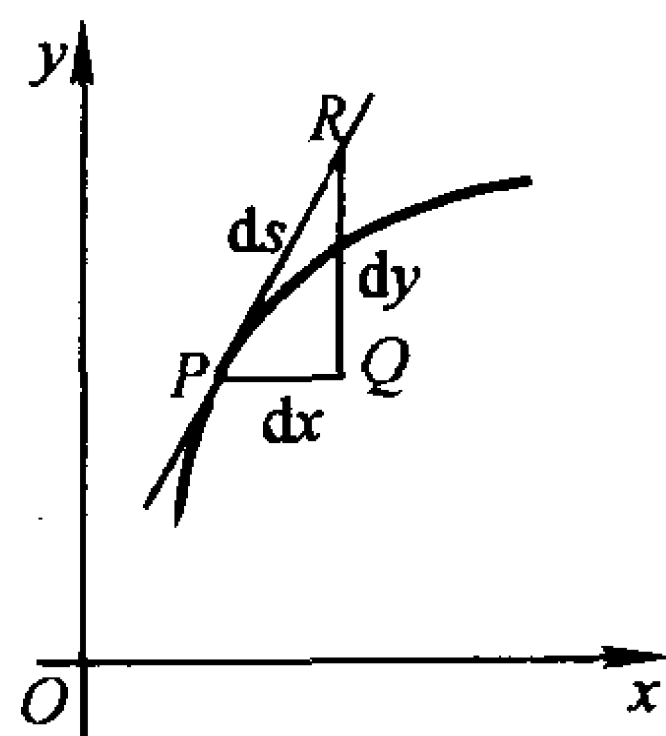


图 10－15

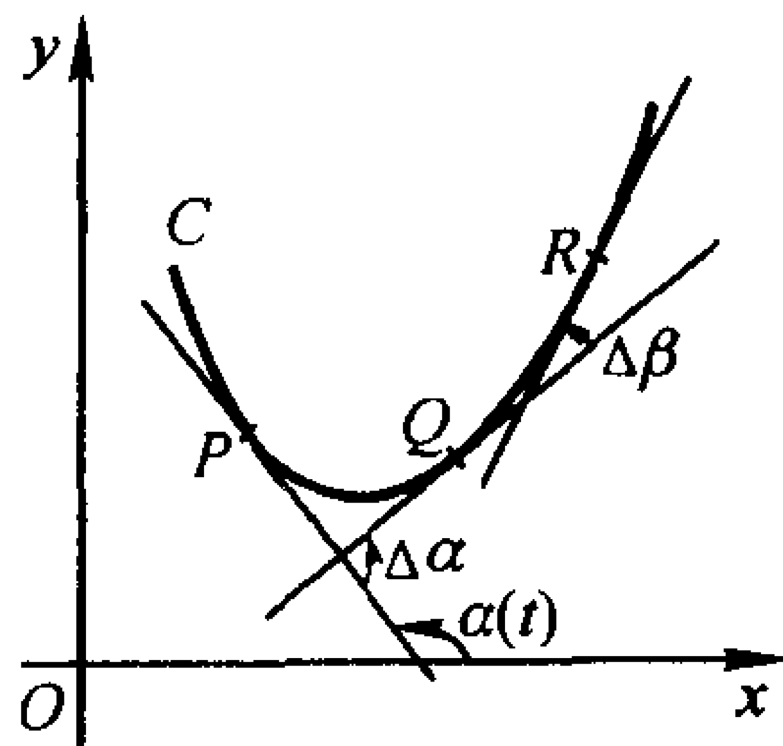


图 10－16

二 曲率

曲线上各点处的弯曲程度是描述曲线局部性态的又一重要标志.

考察图 10－16 中由参数方程(1)给出的光滑曲线 C.我们看到弧段$\widehat{PQ}$与$\widehat{QR}$的长度相差不多而其弯曲程度却很不一样.这反映为当动点沿曲线 C 从点P 移至 Q 时,切线转过的角度 $\Delta\alpha$ 比动点从 Q 移至 R 时切线转过的角度 $\Delta\beta$ 要大得多.

设 $\alpha(t)$表示曲线在点 $P(x(t),y(t))$处切线的倾角,$\Delta\alpha=\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)$表示动点由 P 沿曲线移至 $Q(x(t+\Delta x),y(t+\Delta t))$时切线倾角的增量.若$\widehat{PQ}$之长为 Δs,则称

$$\overline{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

为弧段$\widehat{PQ}$的**平均曲率**.如果存在有限极限

$$K=\left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|,$$

则称此极限 K 为曲线 C 在点 P 处的**曲率**.

由于假设 C 为光滑曲线,故总有

$$\alpha(t)=\arctan\frac{y'(t)}{x'(t)} \quad 或 \quad \alpha(t)=\operatorname{arccot}\frac{x'(t)}{y'(t)}.$$

又若 $x(t)$与 $y(t)$二阶可导,则由弧微分(6)可得

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}=\frac{\alpha'(t)}{s'(t)}=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{[x'^2(t)+y'^2(t)]^{3/2}}.$$

所以曲率计算公式为

$$K=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}. \tag{7}$$

若曲线由 $y=f(x)$表示，则相应的曲率公式为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}. \tag{8}$$

例4 求椭圆 $x=a\cos t, y=b\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 上曲率最大和最小的点.

解 由于 $x'=-a\sin t, x''=-a\cos t, y'=b\cos t, y''=-b\sin t$，因此按公式(7)得椭圆上任意点处的曲率为

$$K=\frac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}=\frac{ab}{[(a^2-b^2)\sin^2 t+b^2]^{3/2}}.$$

当 $a>b>0$ 时，在 $t=0,\pi$(长轴端点)处曲率最大，而在 $t=\frac{\pi}{2}$、$\frac{3\pi}{2}$(短轴端点)处曲率最小，且

$$K_{\max}=\frac{a}{b^2}, K_{\min}=\frac{b}{a^2}.$$ □

若在例4中 $a=b=R$，椭圆成为圆时，显然有

$$K=\frac{1}{R},$$

即在圆上各点处的曲率相同，其值为半径的倒数.

容易知道，直线上处处曲率为零.

设曲线 C 在其上一点 P 处的曲率 $K\neq 0$. 若过点 P 作一个半径为 $\rho=\frac{1}{K}$ 的圆，使它在点 P 处与曲线 C 有相同的切线，并在点 P 近旁与曲线位于切线的同侧(图10-17). 我们把这个圆称为曲线 C 在点 P 处的**曲率圆**或**密切圆**. 曲率圆的半径 $\left(\rho=\frac{1}{K}\right)$ 和圆心 (P_0) 称为曲线 C 在点 P 处的**曲率半径**和**曲率中心**. 由曲率圆的定义可以知道，曲线在点 P 与曲率圆既有相同的切线，又有相同的曲率和凸性.

例5 (铁路弯道分析) 如图10-18所示，火车轨道从直道进入到半径为 R 的圆弧形弯道时，为了行车安全，必须经过一段缓冲轨道(用虚线表示者)，使得曲率由零连续地增加到 $\frac{1}{R}$，以保证火车的向心加速度 $\left(a=\frac{v^2}{\rho}\right)$ 不发生跳跃性的突变.

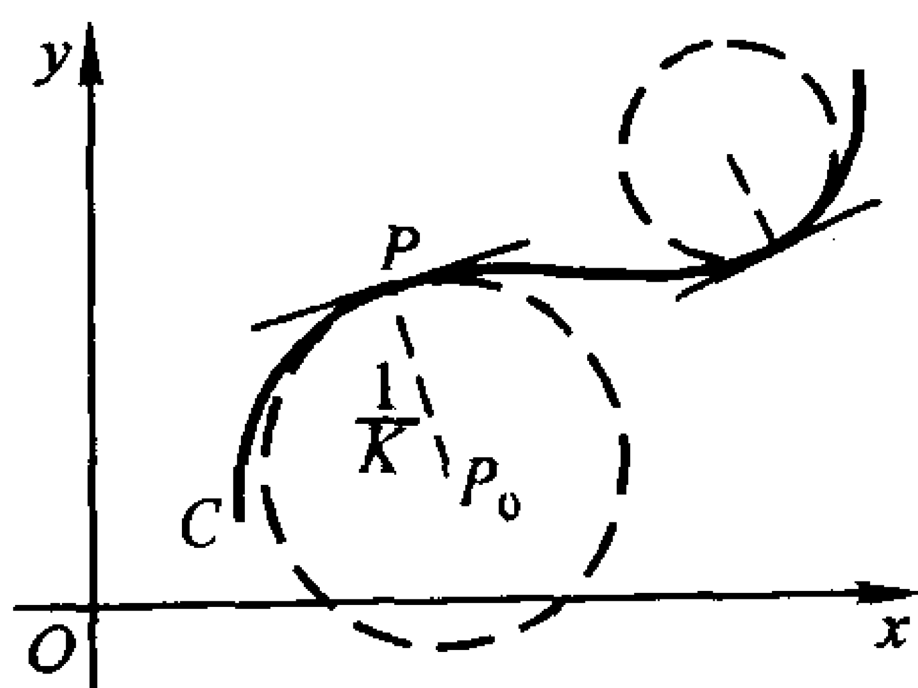


图 10-17

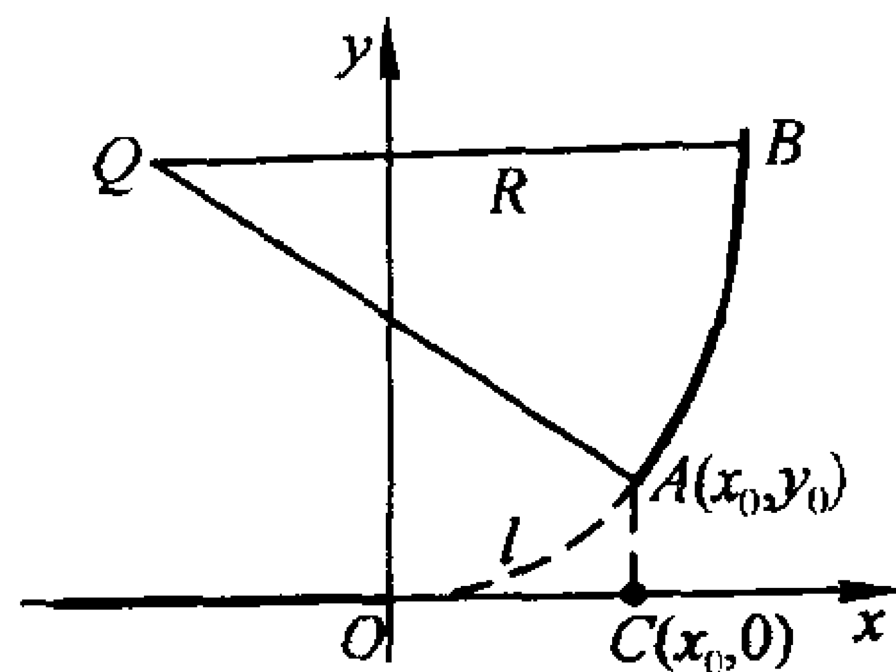


图 10-18

图中 x 轴($x\leqslant 0$)表示直线轨道,$\widehat{AB}$是半径为 R 的圆弧形轨道(点 Q 为其圆心),$\widehat{OA}$为缓冲轨道.我国一般采用的缓冲曲线是三次曲线

$$y=\frac{x^3}{6Rl},\tag{9}$$

其中 l 是$\widehat{OA}$的弧长.

对曲线(9)应用曲率公式(8),求得

$$K=\frac{8R^2l^2x}{(4R^2l^2+x^4)^{3/2}}.$$

当 x 从 0 变为 x_0 时,曲率 K 从 0 连续地变为

$$K_0=\frac{8R^2l^2x_0}{(4R^2l^2+x_0^4)^{3/2}}=\frac{1}{R}\cdot\frac{8l^2x_0}{\left(4l^2+\frac{x_0^4}{R^2}\right)^{3/2}}.$$

当 $x_0\approx l$,且$\frac{x_0}{R}$很小时,$K_0\approx\frac{1}{R}$.因此曲线段$\widehat{OA}$的曲率从 0 逐渐增加到接近于$\frac{1}{R}$,从而起了缓冲作用. □

习　　题

1. 求下列曲线的弧长:

(1) $y=x^{3/2}, 0\leqslant x\leqslant 4$;

(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$;

(3) $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t\,(a>0), 0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

(4) $x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)\,(a>0), 0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

(5) $r=a\sin^3\frac{\theta}{3}\,(a>0), 0\leqslant\theta\leqslant 3\pi$;

(6) $r=a\theta\,(a>0), 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

*2. 求下列各曲线在指定点处的曲率:

(1) $xy=4$,在点$(2,2)$;

(2) $y=\ln x$,在点$(1,0)$;

(3) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)\,(a>0)$,在 $t=\frac{\pi}{2}$的点;

(4) $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t\,(a>0)$,在 $t=\frac{\pi}{4}$的点.

---

3. 求 a、b 的值,使椭圆 $x=a\cos t, y=b\sin t$ 的周长等于正弦曲线 $y=\sin x$ 在 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上一段的长.

*4. 设曲线由极坐标方程 $r=r(\theta)$给出,且二阶可导,证明它在点(r,θ)处的曲率为

$$K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}.$$

*5. 用上题公式,求心形线 $r=a(1+\cos\theta)\,(a>0)$在 $\theta=0$ 处的曲率、曲率半径和曲率圆.

*6. 证明抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 在顶点处的曲率为最大.

*7. 求曲线 $y=e^x$ 上曲率最大的点.

§4 旋转曲面的面积

定积分的所有应用问题,一般总可按"分割,近似求和,取极限"三个步骤导出所求量的积分形式.但为简便实用起见,也常采用下面介绍的"微元法".本节和下一节将采用此法来处理.

一 微元法

在上一章我们已经熟知,若令 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则当 f 为连续函数时,$\Phi'(x)=f(x)$,或 $\mathrm{d}\Phi=f(x)\mathrm{d}x$,且

$$\Phi(a)=0,\quad \Phi(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

现在恰好要把问题倒过来:如果所求量 Φ 是分布在某区间 $[a,x]$ 上的,或者说它是该区间端点 x 的函数,即 $\Phi=\Phi(x)$,$x\in[a,b]$,而且当 $x=b$ 时,$\Phi(b)$ 适为最终所求的值.

在任意小区间 $[x,x+\Delta x]\subset[a,b]$ 上,若能把 Φ 的微小增量 $\Delta\Phi$ 近似表示为 Δx 的线性形式

$$\Delta\Phi\approx f(x)\Delta x,\tag{1}$$

其中 f 为某一连续函数,而且当 $\Delta x\to 0$ 时,$\Delta\Phi-f(x)\Delta x=o(\Delta x)$,亦即

$$\mathrm{d}\Phi=f(x)\mathrm{d}x,\tag{2}$$

那么只要把定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 计算出来,就是该问题所求的结果.

上述方法通常称为**微元法**.在采用微元法时,必须注意如下两点:

1) 所求量 Φ 关于分布区间必须是代数可加的.

2) 微元法的关键是正确给出 $\Delta\Phi$ 的近似表达式(1).在一般情况下,要严格检验 $\Delta\Phi-f(x)\Delta x$ 是否为 Δx 的高阶无穷小量往往不是一件容易的事.因此对(1)式的合理性需特别小心.

对于前三节所求的平面图形面积、立体体积和曲线弧长,改用微元法来处理,所求量的微元表达式分别为

$$\Delta A\approx|y|\Delta x,\text{并有 } \mathrm{d}A=|y|\mathrm{d}x;$$

$$\Delta V\approx A(x)\Delta x,\text{并有 } \mathrm{d}V=A(x)\mathrm{d}x;$$

$$\Delta s\approx\sqrt{1+y'^2}\Delta x,\text{并有 } \mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x.$$

§2 导出体积公式(1)和 §3 导出弧长公式(2)的过程,实际上就是在验证 $\Delta\Phi-$

$f(x)\Delta x = o(\Delta x)$.如果把弧长增量的近似表达式改取为$\Delta s \approx \Delta x$,将导致$s = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a$的明显错误.其根本原因就在于$\Delta s - \Delta x$并非是$\Delta x$的高阶无穷小量.

二 旋转曲面的面积[①]

设平面光滑曲线C的方程为

$$y = f(x), x \in [a, b] (不妨设 f(x) \geqslant 0).$$

这段曲线绕x轴旋转一周得到旋转曲面(图10-19).下面用微元法导出它的面积公式.

通过x轴上点x与$x+\Delta x$分别作垂直于x轴的平面,它们在旋转曲面上截下一条狭带.当Δx很小时,此狭带的面积近似于一圆台的侧面积,即

$$\Delta S \approx \pi[f(x) + f(x + \Delta x)]\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$= \pi[2f(x) + \Delta y]\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x,$$

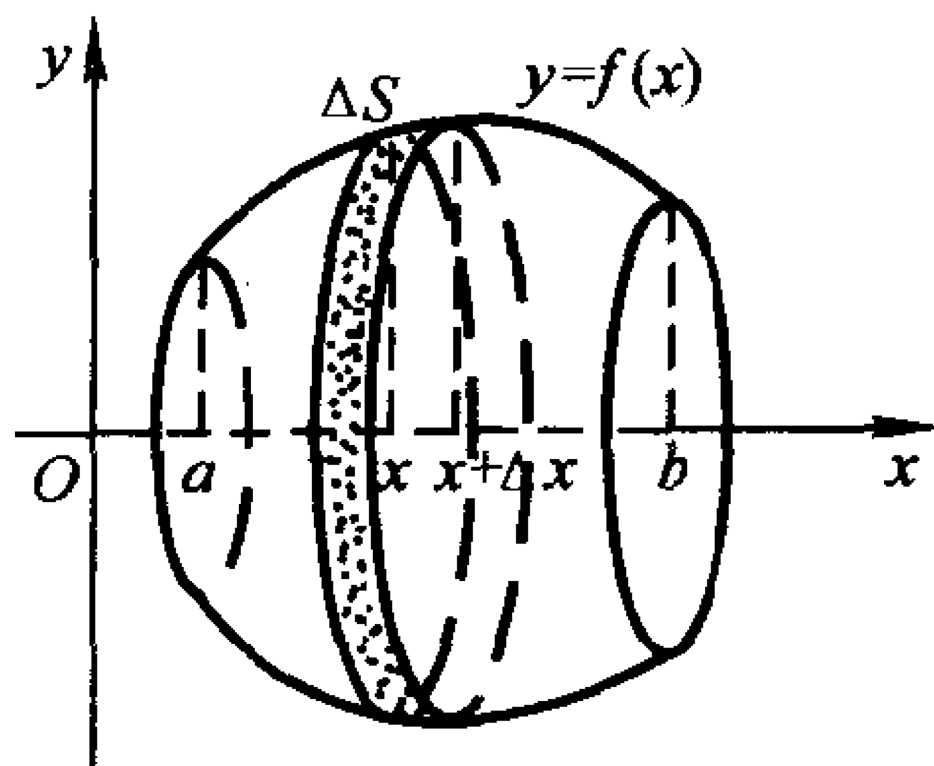


图 10-19

其中$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.由于

$$\lim_{\Delta x \to 0}\Delta y = 0, \lim_{\Delta x \to 0}\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + f'^2(x)},$$

因此由$f'(x)$的连续性可以保证

$$\pi[2f(x) + \Delta y]\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x - 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\Delta x = o(\Delta x).$$

所以得到

$$\mathrm{d}S = 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x,$$

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x. \tag{3}$$

如果光滑曲线C由参数方程

$$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$$

给出,且$y(t) \geqslant 0$,那么由弧微分知识推知曲线C绕x轴旋转所得旋转曲面的面积为

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t. \tag{4}$$

例1 计算圆$x^2 + y^2 = R^2$在$[x_1, x_2] \subset [-R, R]$上的弧段绕$x$轴旋转所

---

① 关于曲面面积的严格定义和一般计算公式要在下册重积分章节里给出.

得球带的面积.

解 对曲线 $y=\sqrt{R^2-x^2}$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上应用公式(3),得到

$$S=2\pi\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=2\pi R\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}x=2\pi R(x_2-x_1).$$

特别当 $x_1=-R,x_2=R$ 时,则得球的表面积 $S_{球}=4\pi R$. □

例 2 计算由内摆线 $x=a\cos^3 t,y=a\sin^3 t$(见图 10-7)绕 x 轴旋转所得旋转曲面的面积.

解 由曲线关于 y 轴的对称性及公式(4),得

$$S=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\sin^3 t\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\mathrm{d}t$$

$$=12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\mathrm{d}t=\frac{12}{5}\pi a^2.$$ □

习 题

1. 求下列平面曲线绕指定轴旋转所得旋转曲面的面积:

(1) $y=\sin x,0\leqslant x\leqslant\pi$,绕 x 轴;

(2) $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)(a>0),0\leqslant t\leqslant 2\pi$,绕 x 轴;

(3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,绕 y 轴;

(4) $x^2+(y-a)^2=r^2(r<a)$,绕 x 轴.

2. 设平面光滑曲线由极坐标方程

$$r=r(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\ ([\alpha,\beta]\subset[0,\pi],r(\theta)\geqslant 0)$$

给出,试求它绕极轴旋转所得旋转曲面的面积计算公式.

3. 试求下列极坐标曲线绕极轴旋转所得旋转曲面的面积:

(1) 心形线 $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$;

(2) 双纽线 $r^2=2a^2\cos 2\theta(a>0)$.

§5 定积分在物理中的某些应用

定积分在物理中有着广泛的应用,这里介绍几个较有代表性的例子.

一 液体静压力

例 1 如图10-20所示为一管道的圆形闸门(半径为 3 米).问水平面齐及

直径时，闸门所受到的水的静压力为多大？

解 为方便起见，取 x 轴和 y 轴如图，此时圆的方程为

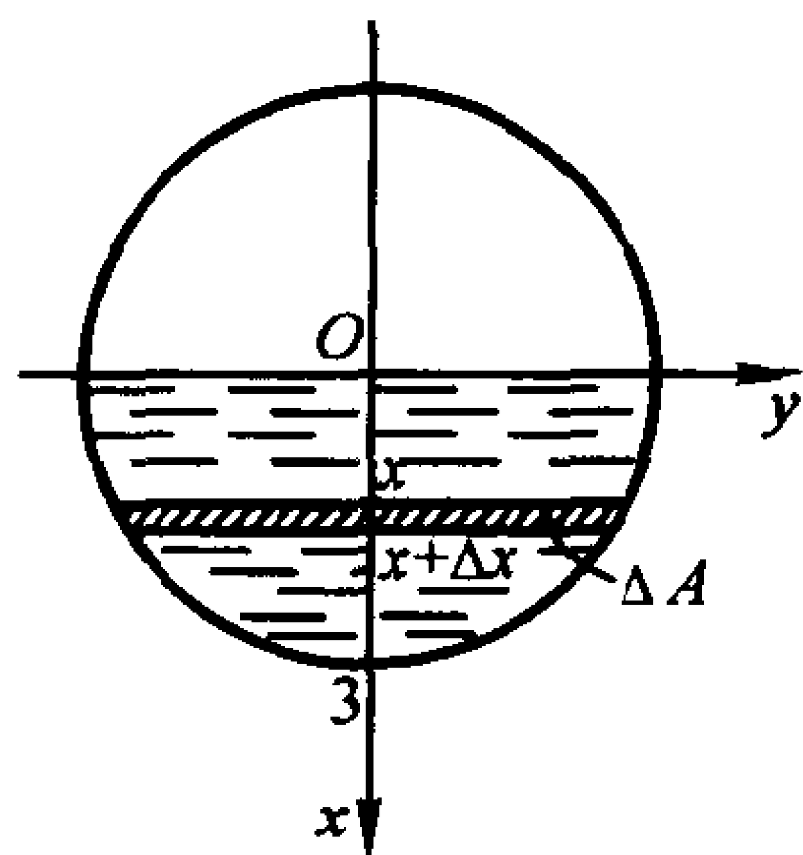


图 10-20

$$x^2+y^2=9.$$

由于在相同深度处水的静压强相同，其值等于水的比重(ν)与深度(x)的乘积，故当 Δx 很小时，闸门上从深度 x 到 $x+\Delta x$ 这一狭条 ΔA 上所受的静压力为

$$\Delta P \approx \mathrm{d}P = 2\nu x\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x.$$

从而闸门上所受的总压力为

$$\begin{aligned}P &= \int_0^3 2\nu x\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x \\ &= 18\nu.\end{aligned}$$

□

二 引力

例2 一根长为 l 的均匀细杆，质量为 M，在其中垂线上相距细杆为 a 处有一质量为 m 的质点．试求细杆对质点的万有引力．

解 如图 10-21 所示，细杆位于 x 轴上的 $\left[-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right]$，质点位于 y 轴上的点 a．任取 $[x, x+\Delta x]\subset\left[-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right]$，当 Δx 很小时可把这一小段细杆看作一质点，其质量为 $\mathrm{d}M=\frac{M}{l}\mathrm{d}x$．于是它对质点 m 的引力为

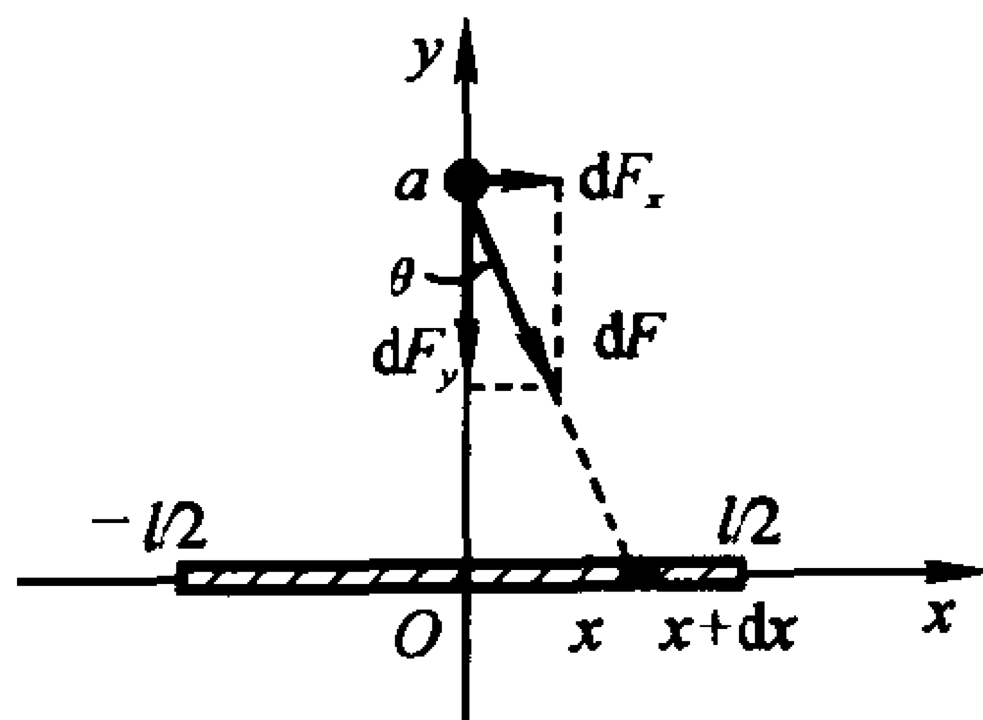


图 10-21

$$\mathrm{d}F=\frac{km\mathrm{d}M}{r^2}=\frac{km}{a^2+x^2}\cdot\frac{M}{l}\mathrm{d}x.$$

由于细杆上各点对质点 m 的引力方向各不相同，因此不能直接对 $\mathrm{d}F$ 进行积分(不符合代数可加的条件)．为此，将 $\mathrm{d}F$ 分解到 x 轴和 y 轴两个方向上，得

$$\mathrm{d}F_x=\mathrm{d}F\cdot\sin\theta,\mathrm{d}F_y=-\mathrm{d}F\cdot\cos\theta.$$

由于质点 m 位于细杆的中垂线上，必使水平合力为零，即

$$F_x=\int_{-l/2}^{l/2}\mathrm{d}F_x=0.$$

又由 $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$，得垂直方向合力为

$$F_y=\int_{-l/2}^{l/2}\mathrm{d}F_y=-2\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{kmMa}{l}(a^2+x^2)^{-3/2}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{2kmMa}{l}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\Bigg|_0^{l/2}$$

$$= -\frac{2kmM}{a\sqrt{4a^2+l^2}},$$

负号表示合力方向与 y 轴方向相反. □

例 3 设有一半径为 r 的圆弧形导线,均匀带电,电荷密度为 δ,在圆心正上方距圆弧所在平面为 a 的地方有一电量为 q 的点电荷. 试求圆弧形导线与点电荷之间作用力(引力或斥力)的大小.

解 如图 10-22 所示,把点电荷置于原点,z 轴垂直向下,圆弧形导线置于水平平面 $z=a$ 上.

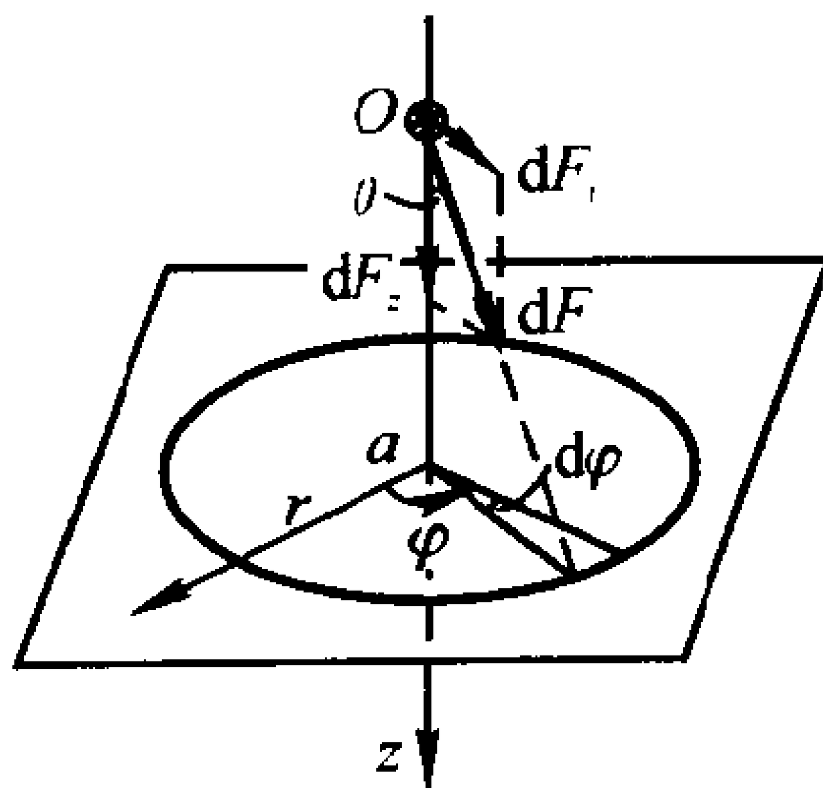


图 10-22

根据库仑定律,电量为 q_1,q_2 的两个点电荷之间的作用力(引力或斥力)的大小为

$$F = \frac{kq_1q_2}{\rho^2},$$

其中 ρ 是两点电荷之间的距离,k 是库仑常数.

把中心角为 $d\varphi$ 的一小段导线圆弧看作一点电荷,其电量为

$$dQ = \delta ds = \delta r d\varphi.$$

它对点电荷 q 的作用力为

$$dF = k\cdot\frac{qdQ}{\rho^2} = \frac{k\delta rq}{a^2+r^2}d\varphi.$$

把 dF 分解为 z 轴方向的垂直分力 dF_z 和水平方向的分力 dF_t. 由于点电荷位于圆弧导线的对称轴 Oz 上,且导线上的电荷密度恒为常数,因此水平分力 dF_t 各向抵消. 而

$$dF_z = dF\cdot\cos\theta = dF\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}} = k\delta raq(a^2+r^2)^{-3/2}d\varphi,$$

于是垂直方向的合力为

$$F_z = \int_0^{2\pi}dF_z = \frac{2\pi k\delta raq}{(a^2+r^2)^{3/2}}.$$

这就是圆弧形导线与点电荷之间作用力的大小. □

三 功与平均功率

例 4 一圆锥形水池,池口直径 30 米,深 10 米,池中盛满了水. 试求将全部池水抽出池外需作的功.

解 为方便起见,取坐标轴如图 10-23 所示. 由于抽出相同深度处单位体积的水需作相同的功(等于水的比重×深度),因此首先考虑将池中深度为 x 到

$x+\Delta x$ 的一薄层水 $\Delta\Omega$ 抽至池口需作的功 ΔW. 当 Δx 很小时,把这一薄层水的深度都看作 x,并取 $\Delta\Omega$ 的体积

$$\Delta V \approx \pi\left[15\left(1-\frac{x}{10}\right)\right]^2\Delta x,$$

这时有

$$\Delta W \approx \mathrm{d}W = \pi\nu x\left[15\left(1-\frac{x}{10}\right)\right]^2\mathrm{d}x.$$

从而将全部池水抽出池外需作的功为

$$W = 225\pi\nu\int_0^{10} x\left(1-\frac{x}{10}\right)^2\mathrm{d}x = 1\ 875\pi\nu.$$

□

例 5 在纯电阻电路(图 10-24)中,已知交流电压为

$$V = V_m\sin\omega t.$$

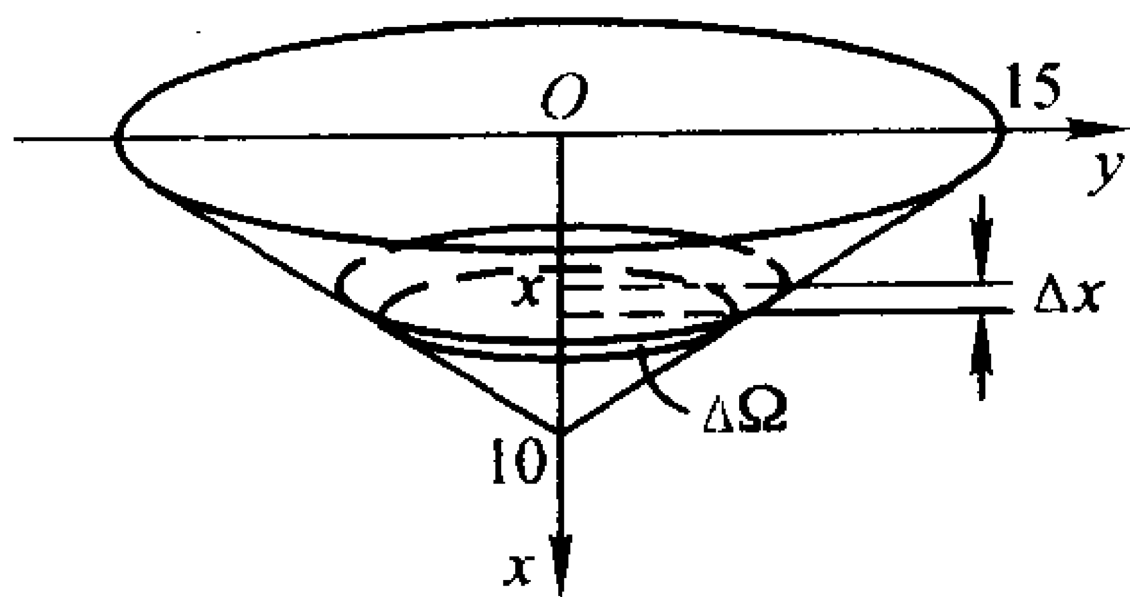


图 10-23

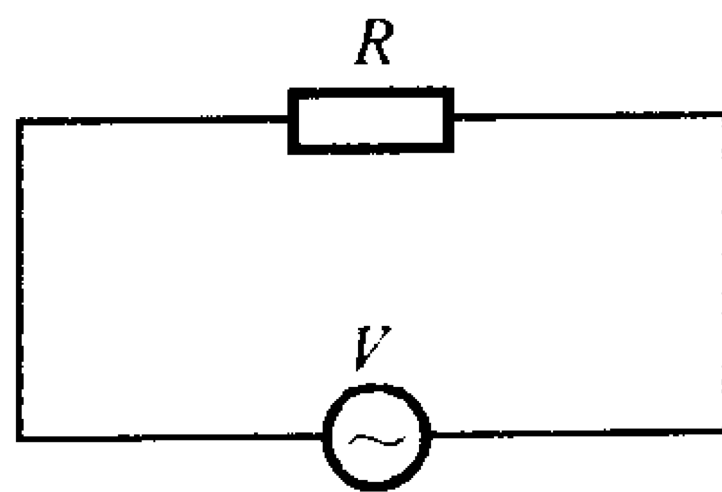


图 10-24

求在一个周期$[0,T]\left(T=\frac{2\pi}{\omega}\right)$内消耗在电阻 R 上的能量 W,并求与之相当的直流电压.

解 在直流电压($V=V_0$)下,功率 $P=\frac{V_0^2}{R}$,那么在时间 T 内所作的功为 $W=PT=\frac{V_0^2T}{R}$. 现在 V 为交流电压,瞬时功率为

$$P(t) = \frac{V_m^2}{R}\sin^2\omega t.$$

这相当于:在任意一小段时间区间$[t,t+\Delta t]\subset[0,T]$上,当 Δt 很小时,可把 V 近似看作恒为 $V_m\sin\omega t$ 的情形. 于是取功的微元为

$$\mathrm{d}W = P(t)\mathrm{d}t.$$

并由此求得

$$W = \int_0^T P(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{V_m^2}{R}\sin^2\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi V_m^2}{R\omega}.$$

而平均功率则为

$$\overline{P}=\frac{1}{T}\int_0^T P(t)\mathrm{d}t=\frac{\omega}{2\pi}\cdot\frac{\pi V_m^2}{R\omega}$$
$$=\frac{V_m^2}{2R}=\frac{(V_m/\sqrt{2})^2}{R}.$$

上述结果的最末形式,表示交流电压 $V=V_m\sin\omega t$ 在一个周期上的平均功率与直流电压 $\overline{V}=\frac{V_m}{\sqrt{2}}$ 的功率是相等的.故称 $\overline{V}$ 为该交流电压的有效值.通常所说的 220 伏交流电,其实是 $V=220\sqrt{2}\sin\omega t$ 的有效值. □

习　题

1. 有一等腰梯形闸门,它的上、下两条底边各长为 10 米和 6 米,高为 20 米.计算当水面与上底边相齐时闸门一侧所受的静压力.

2. 边长为 a 和 b 的矩形薄板,与液面成 $\alpha(0<\alpha<90°)$ 角斜沉于液体中.设 $a>b$,长边平行于液面,上沿位于深 h 处,液体的比重为 ν.试求薄板每侧所受的静压力.

3. 直径为 6 米的一球浸入水中,其球心在水平面下 10 米处,求球面上所受静压力.

4. 设在坐标轴的原点有一质量为 m 的质点,在区间 $[a,a+l](a>0)$ 上有一质量为 M 的均匀细杆.试求质点与细杆之间的万有引力.

5. 设有两条各长为 l 的均匀细杆在同一直线上,中间离开距离 c,每根细杆的质量为 M.试求它们之间的万有引力.(提示:在第 4 题的基础上再作一次积分.)

6. 设有半径为 r 的半圆形导线,均匀带电,电荷密度为 δ,在圆心处有一单位正电荷.试求它们之间作用力的大小.

7. 一个半球形(直径为 20 米)的容器内盛满了水.试问把水抽尽需作多少功?

8. 长 10 米的铁索下垂于矿井中,已知铁索每米的质量为 8 千克,问将此铁索提出地面需作多少功?

9. 一物体在某介质中按 $x=ct^3$ 作直线运动,介质的阻力与速度 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 的平方成正比.计算物体由 $x=0$ 移至 $x=a$ 时克服介质阻力所作的功.

10. 半径为 r 的球体沉入水中,其比重与水相同.试问将球体从水中捞出需作多少功?

* §6　定积分的近似计算

利用牛顿—莱布尼茨公式虽然可以精确地计算定积分的值,但它仅适用于被积函数的原函数能够求得的情形.如果这点办不到或者不容易办到,这就要考虑近似计算的方法.在定积分的很多应用问题中,被积函数甚至没有解析表达式(只是一条实验记录曲线,或者是一组离散的采样值),这时只能采用近似方法去

计算相应的定积分.

其实,根据定积分的定义,每一个积分和都可看做是定积分的一个近似值,例如

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \left(或\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i\right). \tag{1}$$

在几何意义上,这是用一系列小矩形面积来近似小曲边梯形面积的结果.所以把这个近似算法称为**矩形法**.不过,只有当积分区间被分割得很细很细时,矩形法才有一定的精确度.

如果在分割的每个小区间上采用一次或二次多项式来近似替代被积函数,那么可以期望获得比矩形法效果好得多的近似计算公式.下面的梯形法和抛物线法就是这一想法的产物.

一 梯形法

将积分区间$[a,b]$作 n 等分,分点依次为

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b, \Delta x_i = \frac{b-a}{n}.$$

相应的被积函数值记为

$$y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n (y_i = f(x_i), i = 0,1,2,\cdots,n).$$

并记曲线 $y=f(x)$上相应的点为

$$P_0, P_1, P_2, \cdots, P_n (P_i(x_i, y_i), i = 0,1,2,\cdots,n).$$

将曲线上每一段弧$\overset{\frown}{P_{i-1}P_i}$用弦$\overline{P_{i-1}P_i}$来替代,这使得每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上的曲边梯形换成了真正的梯形(图 10-25),其面积为

$$\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta x_i, i = 1,2,\cdots,n.$$

于是,各个小梯形面积之和就是曲边梯形面积的近似值,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta x_i,$$

亦即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right). \tag{2}$$

称此近似式为定积分的**梯形法公式**.

二 抛物线法

由梯形法求定积分的近似值,当 $y=f(x)$为凸曲线时偏大,为凹曲线时偏小.如果每段曲线改用与它的凸性相接近的抛物线来近似时,就可减少上述缺

点.下面介绍抛物线法.

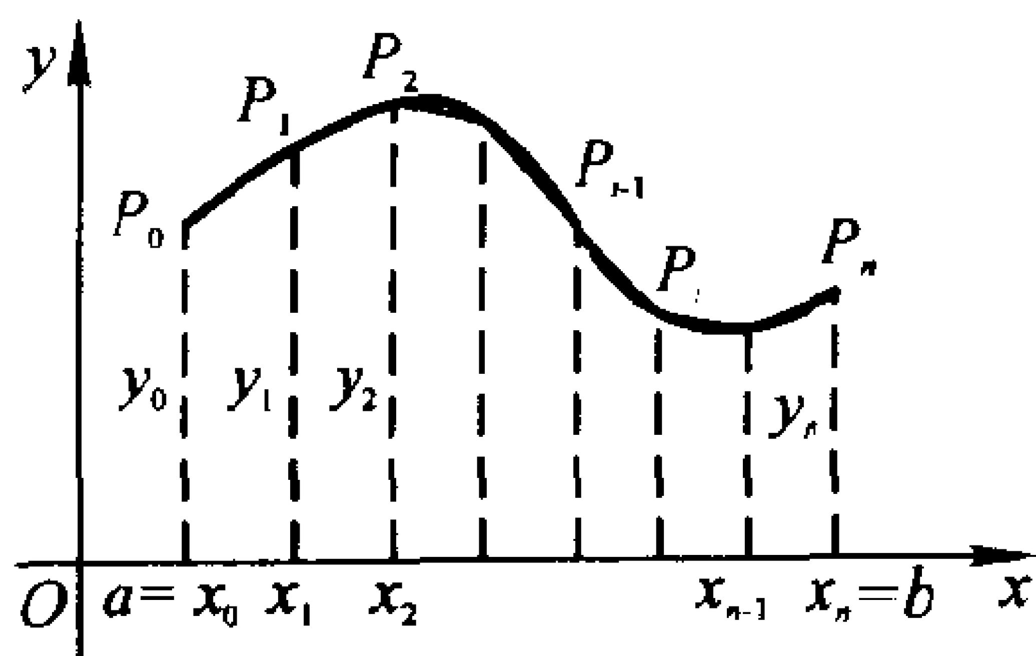


图 10-25

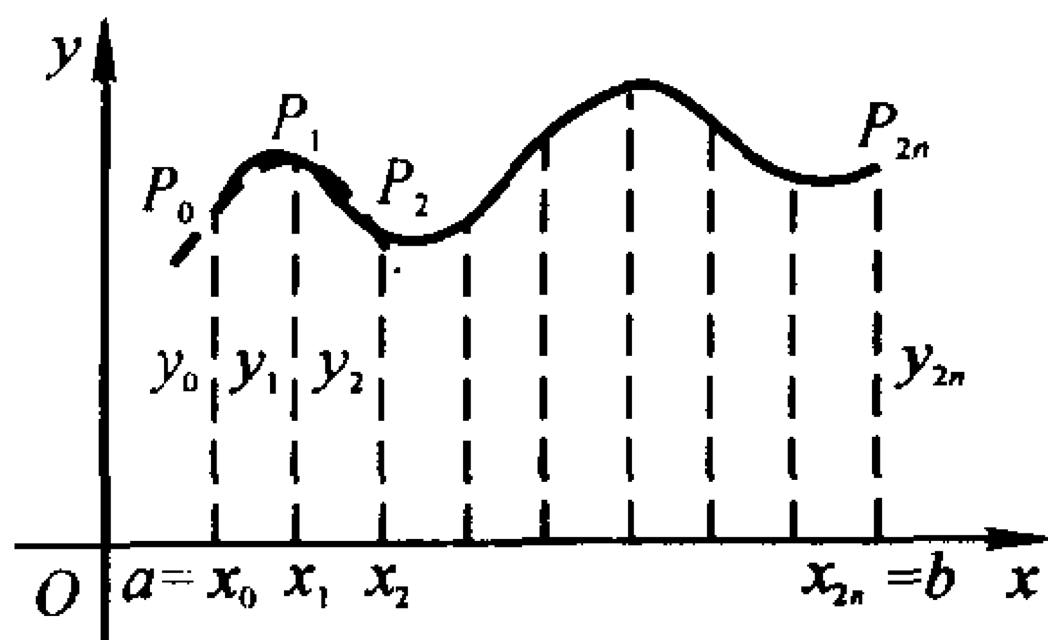


图 10-26

将积分区间$[a,b]$作$2n$等分(图 10-26),分点依次为

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{2n}=b,\Delta x_i=\frac{b-a}{2n}.$$

对应的被积函数值为

$$y_0,y_1,y_2,\cdots,y_{2n}(y_i=f(x_i),i=0,1,2,\cdots,2n).$$

曲线 $y=f(x)$上的相应点为

$$P_0,P_1,P_2,\cdots,P_{2n}(P_i(x_i,y_i),i=0,1,2,\cdots,n).$$

现把区间$[x_0,x_2]$上的曲线 $y=f(x)$用通过三点

$$P_0(x_0,y_0),P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$$

的抛物线 $p_1(x)=\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1$ 来近似替代,便有

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x&\approx\int_{x_0}^{x_2}p_1(x)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_2}(\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1)\mathrm{d}x\\&=\frac{\alpha_1}{3}(x_2^3-x_0^3)+\frac{\beta_1}{2}(x_2^2-x_0^2)+\gamma_1(x_2-x_0)\\&=\frac{x_2-x_0}{6}[(\alpha_1x_0^2+\beta_1x_0+\gamma_1)+(\alpha_1x_2^2+\beta_1x_2+\gamma_1)+\\&\qquad\alpha_1(x_0+x_2)^2+2\beta_1(x_0+x_2)+4\gamma_1]\\&=\frac{x_2-x_0}{6}(y_0+y_2+4y_1)=\frac{b-a}{6n}(y_0+4y_1+y_2).\end{aligned}$$

最末第二步的得来是利用了 $x_0+x_2=2x_1$.

同样地,在$[x_{2i-2},x_{2i}]$上用 $p_i(x)=\alpha_ix^2+\beta_ix+\gamma_i$ 替代曲线$y=f(x)$,将得到

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}}f(x)\mathrm{d}x\approx\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}}p_i(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{6n}(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i}).$$

最后,按 $i=1,2,\cdots,n$ 把这些近似式相加,得到

$$\int_a^bf(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}}f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{6n}\sum_{i=1}^{n}(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i}),$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6n}[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2})]. \tag{3}$$

这就是**抛物线法公式**,也称为**辛普森**(Simpson)**公式**.

作为例子,我们计算定积分$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$的近似值.

将区间[0,1]十等分,各分点上被积函数的值列表如下(取七位小数):

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_i	1	0.990 099 0	0.961 538 5	0.917 431 2	0.862 069 0	0.800 000 0
x_i	0.6	0.7	0.8	0.9	1	
y_i	0.735 294 1	0.671 140 9	0.609 756 1	0.552 486 2	0.5	

1) 用矩形法公式(1)去计算:(取四位小数)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \approx \frac{1}{10}(y_0 + y_1 + \cdots + y_9) = 0.809\,9$$

$$(\text{或}\frac{1}{10}(y_1 + y_2 + \cdots + y_{10}) = 0.760\,0).$$

2) 用梯形法公式(2)去计算:(取四位小数)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \approx \frac{1}{10}\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_9 + \frac{y_{10}}{2}\right) = 0.785\,0.$$

3) 用抛物线法公式(3)去计算:(取七位小数)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \approx \frac{1}{30}[y_0 + y_{10} + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_9) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_8)]$$
$$= 0.785\,398\,2.$$

用准确值[①]

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 0.785\,398\,16\cdots$$

与上述近似值相比较,矩形法的结果只有一位有效数字是准确的,梯形法的结果有三位有效数字是准确的,抛物线法的结果则有六位有效数字是准确的.可见公式(3)明显地优于公式(2),更优于公式(1).

关于定积分近似计算的误差估计,在《数值分析》一类课程中必有详述,这里不再讨论.

---

① 这里用一个很容易求得准确值的定积分作为近似计算的例子,主要的理由就是有准确值可以与近似值相比较.实际使用中不会有这样的事.

习　题

1. 分别用梯形法和抛物线法近似计算$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$(将积分区间十等分).

2. 用抛物线法近似计算$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$(分别将积分区间二等分、四等分、六等分).

3. 图 10－27 所示为河道某一截面图.试由测得数据用抛物线法求截面面积.

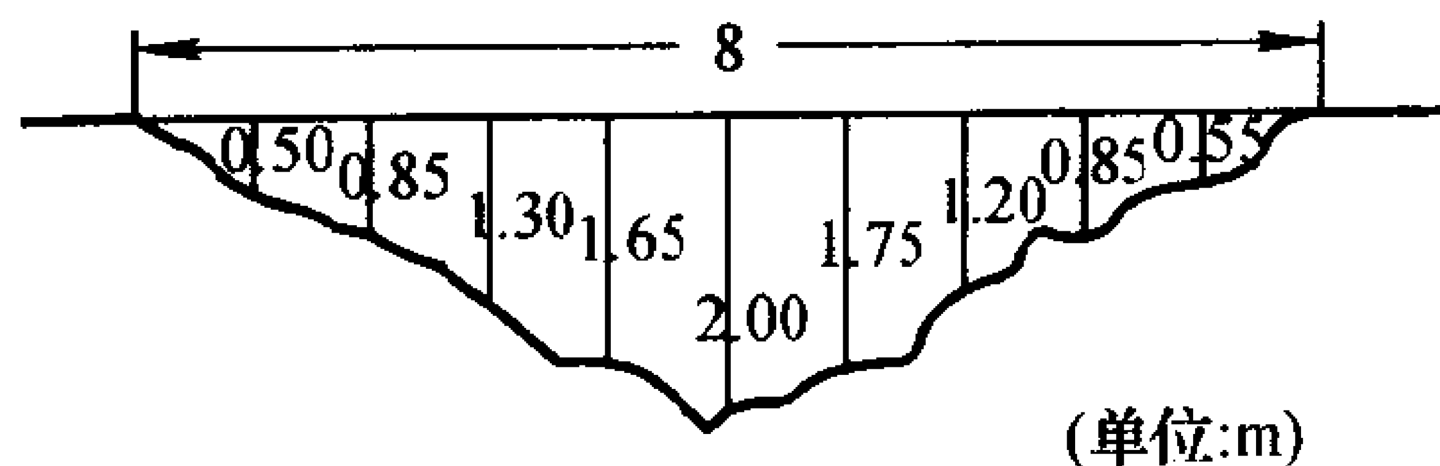


图　10－27

4. 下表所列为夏季某一天每隔两小时测得的气温:

时间(t_i)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
温度(C_i)	25.8	23.0	24.1	25.6	27.3	30.2	33.4	35.0	33.8	31.1	28.2	27.0	25.0

(1) 按积分平均$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$求这一天的平均气温,其中定积分值由三种近似法分别计算;

(2) 若按算术平均$\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}C_{i-1}$或$\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}C_i$求得平均气温,那么它们与矩形法积分平均和梯形法积分平均各有什么联系?简述理由.

第十一章 反常积分

§1 反常积分概念

一 问题提出

在讨论定积分时有两个最基本的限制：积分区间的有穷性和被积函数的有界性.但在很多实际问题中往往需要突破这些限制，考虑无穷区间上的“积分”，或是无界函数的“积分”，这便是本章的主题.

例 1 (第二宇宙速度问题) 在地球表面垂直发射火箭(图 11-1)，要使火箭克服地球引力无限远离地球，试问初速度 v_0 至少要多大?

设地球半径为 R，火箭质量为 m，地面上的重力加速度为 g.按万有引力定律，在距地心 $x(\geqslant R)$处火箭所受的引力为

$$F=\frac{mgR^2}{x^2}.$$

于是火箭从地面上升到距离地心为 $r(>R)$处需作的功为

$$\int_R^r \frac{mgR^2}{x^2}\mathrm{d}x=mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right).$$

当 $r\to+\infty$时，其极限 mgR 就是火箭无限远离地球需作的功.我们很自然地会把这极限写作上限为 $+\infty$的“积分”：

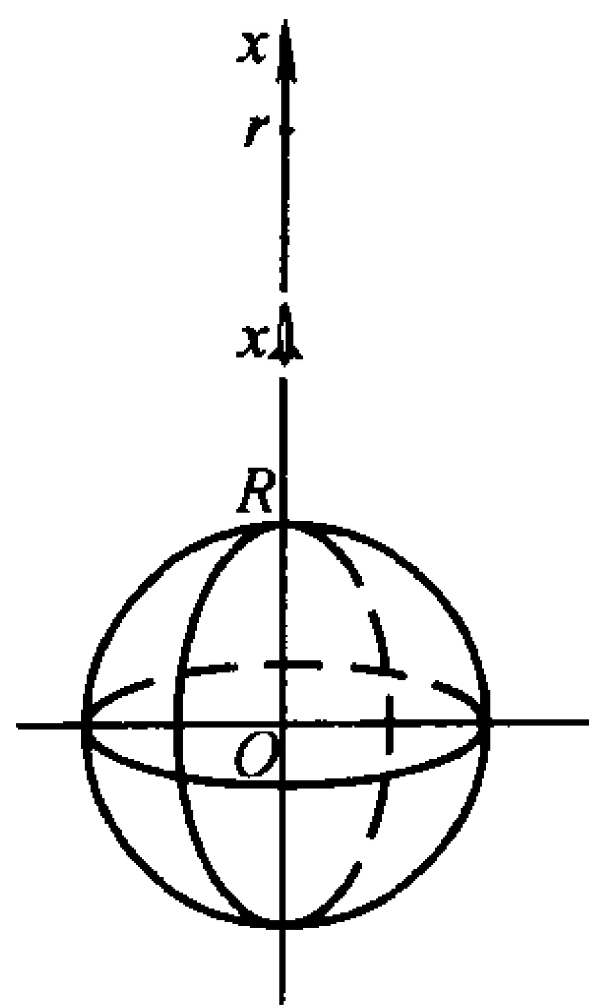


图 11-1

$$\int_R^{+\infty}\frac{mgR^2}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{r\to+\infty}\int_R^r\frac{mgR^2}{x^2}\mathrm{d}x=mgR.$$

最后，由机械能守恒定律可求得初速度 v_0 至少应使

$$\frac{1}{2}mv_0^2=mgR.$$

用 $g=9.81(\mathrm{m/s^2})$，$R=6.371\times10^6(\mathrm{m})$代入，便得

$$v_0=\sqrt{2gR}\approx11.2(\mathrm{km/s}).$$

□

例 2 圆柱形桶的内壁高为 h，内半径为 R，桶底有一半径为 r 的小孔(图 11-2).试问从盛满水开始打开小孔直至流完桶中的水，共需多少时间?

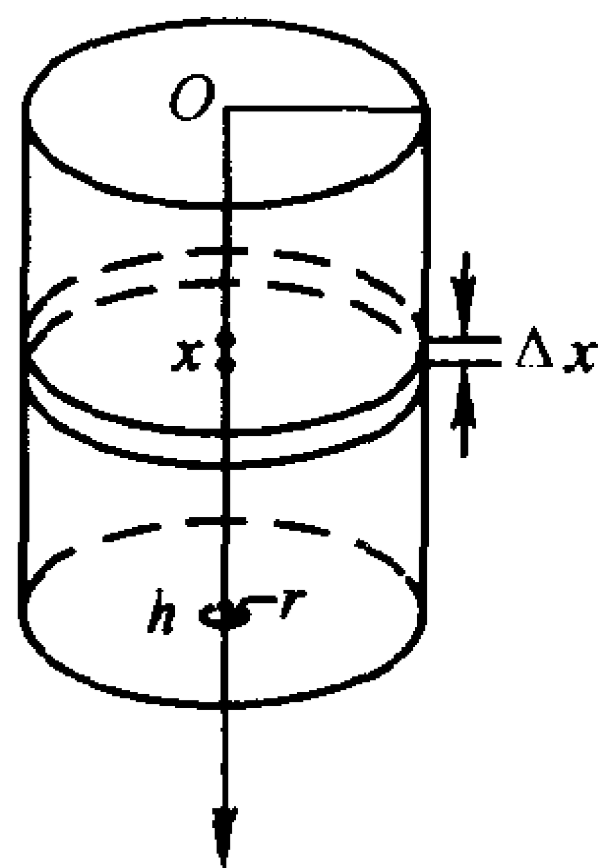


图 11－2

从物理学知道，在不计摩擦力的情形下，当桶内水位高度为$(h-x)$时，水从孔中流出的流速(单位时间内流过单位截面积的流量)为

$$v=\sqrt{2g(h-x)},$$

其中 g 为重力加速度.

设在很小一段时间 $\mathrm{d}t$ 内，桶中液面降低的微小量为 $\mathrm{d}x$，它们之间应满足

$$\pi R^2\mathrm{d}x=v\pi r^2\mathrm{d}t,$$

由此则有

$$\mathrm{d}t=\frac{R^2}{r^2\sqrt{2g(h-x)}}\mathrm{d}x,x\in[0,h].$$

所以流完一桶水所需时间在形式上亦可写成“积分”：

$$t_f=\int_0^h\frac{R^2}{r^2\sqrt{2g(h-x)}}\mathrm{d}x.$$

但是在这里因为被积函数是$[0,h)$上的无界函数，所以它的确切含义应该是

$$\begin{aligned}t_f&=\lim_{u\to h^-}\int_0^u\frac{R^2}{r^2\sqrt{2g(h-x)}}\mathrm{d}x\\&=\lim_{u\to h^-}\sqrt{\frac{2}{g}}\cdot\frac{R^2}{r^2}(\sqrt{h}-\sqrt{h-u})\\&=\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{R}{r}\right)^2.\end{aligned}$$

□

相对于以前所讲的定积分(不妨称之为**正常积分**)而言，例 1 和例 2 分别提出了两类**反常积分**.

二 两类反常积分的定义

定义 1 设函数 f 定义在无穷区间$[a,+\infty)$上，且在任何有限区间$[a,u]$上可积. 如果存在极限

$$\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x=J, \tag{1}$$

则称此极限 J 为函数 f 在$[a,+\infty)$上的**无穷限反常积分**(简称**无穷积分**)，记作

$$J=\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x, \tag{1'}$$

并称$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**. 如果极限(1)不存在，为方便起见，亦称$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ **发散**.

类似地，可定义 f 在$(-\infty,b]$上的无穷积分：

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{u\to-\infty}\int_{u}^{b} f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

对于 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的无穷积分，它用前面两种无穷积分来定义：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x, \tag{3}$$

其中 a 为任一实数，当且仅当右边两个无穷积分都收敛时它才是收敛的.

注 1　无穷积分(3)的收敛性与收敛时的值，都和实数 a 的选取无关.

注 2　由于无穷积分(3)是由(1)、(2)两类无穷积分来定义的，因此，f 在任何有限区间 $[v,u]\subset(-\infty,+\infty)$ 上，首先必须是可积的.

注 3　$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的几何意义是：若 f 在 $[a,+\infty)$ 上为非负连续函数，则图 11－3 中介于曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$ 以及 x 轴之间那一块向右无限延伸的阴影区域有面积 J.

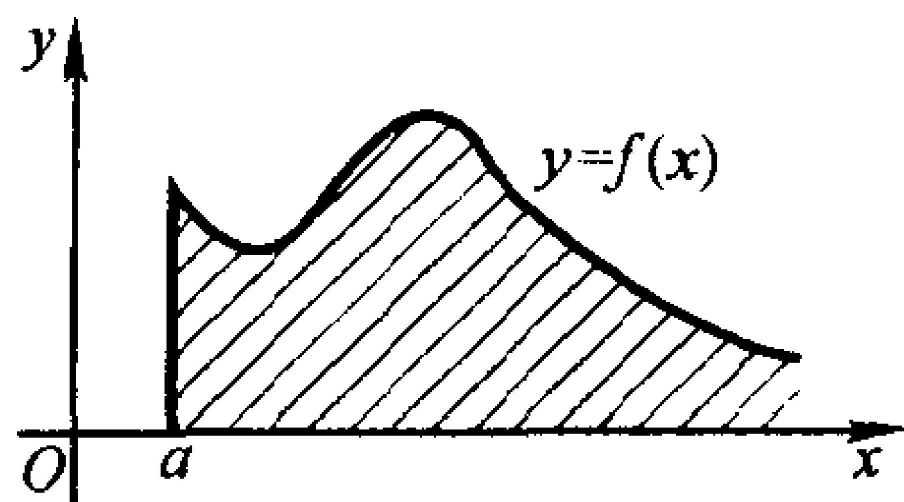


图　11－3

例 3　讨论无穷积分

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \tag{4}$$

的收敛性.

解　由于

$$\int_{1}^{u} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}(u^{1-p}-1), & p\neq 1, \\ \ln u, & p=1, \end{cases}$$

$$\lim_{u\to+\infty}\int_{1}^{u} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & p>1 \\ +\infty & p\leqslant 1, \end{cases}$$

因此无穷积分(4)当 $p>1$ 时收敛，其值为 $\dfrac{1}{p-1}$；而当 $p\leqslant 1$ 时发散于 $+\infty$.　□

从图 11－4 看到，例 3 的结论是很直观的：p 的值越大，曲线 $y=\dfrac{1}{x^p}$ 当 $x>1$ 时越靠近 x 轴，从而曲线下方的阴影区域存在有限面积的可能性也就越大.

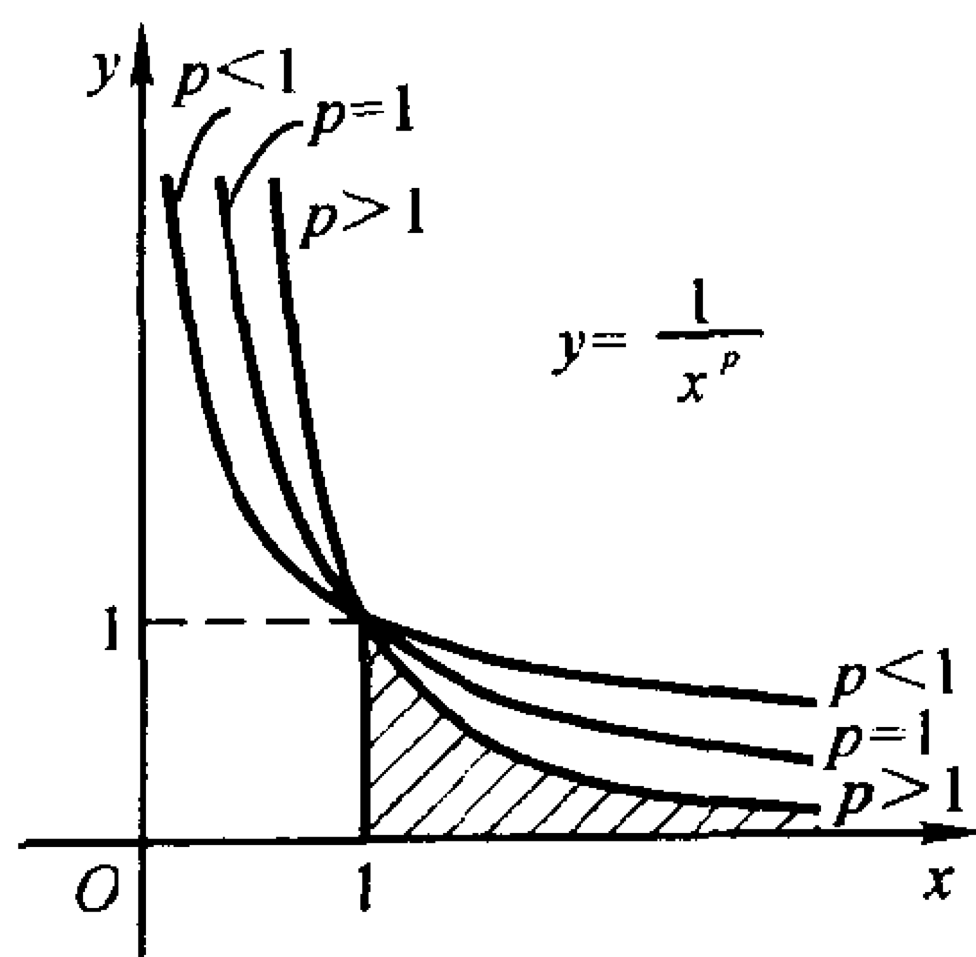


图　11－4

例 4　讨论下列无穷积分的收敛性：

1) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$；　　2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解　1) 由于无穷积分是通过变限定积分的极限来定义的，因此有关定积分的换元积分法和

分部积分法一般都可引用到无穷积分中来.对于本例来说,就有

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^p}.$$

从例 3 知道,该无穷积分当 $p>1$ 时收敛,当 $p\leqslant 1$ 时发散.

2) 任取实数 a,讨论如下两个无穷积分:

$$\int_{-\infty}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\quad 和 \quad \int_{a}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

由于

$$\begin{aligned}\lim_{u\to-\infty}\int_u^a\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}&=\lim_{u\to-\infty}(\arctan a-\arctan u)\\&=\arctan a+\frac{\pi}{2},\\ \lim_{v\to+\infty}\int_a^v\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}&=\lim_{v\to+\infty}(\arctan v-\arctan a)\\&=\frac{\pi}{2}-\arctan a,\end{aligned}$$

因此这两个无穷积分都收敛.由定义 1,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+\int_{a}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\pi.$$

注 由于上述结果与 a 无关,因此若取 $a=0$,则可使计算过程更简洁些. □

定义 2 设函数 f 定义在区间 $(a,b]$ 上,在点 a 的任一右邻域内无界,但在任何内闭区间 $[u,b]\subset(a,b]$ 上有界且可积.如果存在极限

$$\lim_{u\to a^+}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x=J,\tag{5}$$

则称此极限为**无界函数** f 在 $(a,b]$ 上的**反常积分**,记作

$$J=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\tag{5'}$$

并称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**.如果极限 (5) 不存在,这时也说反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **发散**.

在定义 2 中,被积函数 f 在点 a 近旁是无界的,这时点 a 称为 f 的**瑕点**,而无界函数反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 又称为**瑕积分**.

类似地,可定义瑕点为 b 时的瑕积分:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{u\to b^-}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x.$$

其中 f 在 $[a,b)$ 有定义,在点 b 的任一左邻域内无界,但在任何 $[a,u]\subset[a,b)$

上可积.

若 f 的瑕点 $c\in(a,b)$，则定义瑕积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{u\to c^-}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x+\lim_{v\to c^+}\int_v^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{6}$$

其中 f 在 $[a,c)\cup(c,b]$ 上有定义，在点 c 的任一领域内无界，但在任何 $[a,u]\subset[a,c)$ 和 $[v,b]\subset(c,b]$ 上都可积. 当且仅当(6)式右边两个瑕积分都收敛时，左边的瑕积分才是收敛的.

又若 a、b 两点都是 f 的瑕点，而 f 在任何 $[u,v]\subset(a,b)$ 上可积，这时定义瑕积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{u\to a^+}\int_u^c f(x)\mathrm{d}x+\lim_{v\to b^-}\int_c^v f(x)\mathrm{d}x, \tag{7}$$

其中 c 为 (a,b) 内任一实数. 同样地，当且仅当(7)式右边两个瑕积分都收敛时，左边的瑕积分才是收敛的.

例 5 计算瑕积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ 的值.

解 被积函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $[0,1)$ 上连续，从而在任何 $[0,u]\subset[0,1)$ 上可积，$x=1$ 为其瑕点. 依定义 2 求得

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{u\to1^-}\int_0^u\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\lim_{u\to1^-}\arcsin u=\frac{\pi}{2}.$$ □

例 6 讨论瑕积分

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^q}(q>0) \tag{8}$$

的收敛性.

解 被积函数在 $(0,1]$ 上连续，$x=0$ 为其瑕点. 由于

$$\int_u^1\frac{\mathrm{d}x}{x^q}=\begin{cases}\frac{1}{1-q}(1-u^{1-q}), & q\neq1,\\ -\ln u, & q=1\end{cases}(0<u<1),$$

故当 $0<q<1$ 时，瑕积分(8)收敛，且

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^q}=\lim_{u\to0^+}\int_u^1\frac{\mathrm{d}x}{x^q}=\frac{1}{1-q};$$

而当 $q\geqslant 1$ 时,瑕积分(8)发散于 $+\infty$. □

上述结论在图 11-4 中同样能获得直观的反映.

如果把例 3 与例 6 联系起来,考察反常积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}(p>0). \tag{9}$$

我们定义

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p},$$

它当且仅当右边的瑕积分和无穷积分都收敛时才收敛. 但由例 3 与例 6 的结果可知,这两个反常积分不能同时收敛,故反常积分(9)对任何实数 p 都是发散的.

习 题

1. 讨论下列无穷积分是否收敛? 若收敛,则求其值:

(1) $\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$; (2) $\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x$; (4) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x)}$;

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}$; (6) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$;

(7) $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{x}\sin x\mathrm{d}x$; (8) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. 讨论下列瑕积分是否收敛?若收敛,则求其值:

(1) $\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}$; (2) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$;

(3) $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-1|}}$; (4) $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^1\ln x\mathrm{d}x$; (6) $\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$; (8) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$.

---

3. 举例说明:瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时,$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$ 不一定收敛.

4. 举例说明:$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛且 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续时,不一定有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

5. 证明:若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,且存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,则 $A=0$.

6. 证明:若f在$[a,+\infty)$上可导,且$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$都收敛,则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

§2 无穷积分的性质与收敛判别

一 无穷积分的性质

由定义知道,无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛与否,取决于函数$F(u)=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$在$u\to+\infty$时是否存在极限.因此可由函数极限的柯西准则导出无穷积分收敛的柯西准则.

定理 11.1 无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛的充要条件是:任给$\varepsilon>0$,存在$G\geqslant a$,只要$u_1$、$u_2>G$,便有

$$\left|\int_a^{u_2}f(x)\mathrm{d}x-\int_a^{u_1}f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

此外,还可根据函数极限的性质与定积分的性质,导出无穷积分的一些相应性质.

性质 1 若$\int_a^{+\infty}f_1(x)\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty}f_2(x)\mathrm{d}x$都收敛,$k_1$、$k_2$为任意常数,则$\int_a^{+\infty}[k_1f_1(x)+k_2f_2(x)]\mathrm{d}x$也收敛,且

$$\int_a^{+\infty}[k_1f_1(x)+k_2f_2(x)]\mathrm{d}x=k_1\int_a^{+\infty}f_1(x)\mathrm{d}x+k_2\int_a^{+\infty}f_2(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

性质 2 若f在任何有限区间$[a,u]$上可积,$a<b$,则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$与$\int_b^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$同敛态(即同时收敛或同时发散),且有

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x, \tag{2}$$

其中右边第一项是定积分.

性质 2 相当于定积分的积分区间可加性,由它又可导出$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛的另一充要条件:任给$\varepsilon>0$,存在$G\geqslant a$,当$u>G$时,总有

$$\left|\int_u^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

事实上,这可由

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^u f(x)\mathrm{d}x + \int_u^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

结合无穷积分的收敛定义而得.

性质 3 若 f 在任何有限区间$[a,u]$上可积,且有$\int_a^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x$ 收敛,则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 亦必收敛,并有

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x. \tag{3}$$

证 由$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛,根据柯西准则(必要性),任给 $\varepsilon > 0$,存在 $G \geqslant a$,当 $u_2 > u_1 > G$ 时,总有

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} |f(x)|\mathrm{d}x\right| = \int_{u_1}^{u_2} |f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

利用定积分的绝对值不等式,又有

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{u_1}^{u_2} |f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

再由柯西准则(充分性),证得$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

又因$\left|\int_a^u f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^u |f(x)|\mathrm{d}x\,(u > a)$,令 $u \to +\infty$ 取极限,立刻得到不等式(3). □

当$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛时,称$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 为**绝对收敛**. 性质 3 指出:绝对收敛的无穷积分,它自身也一定收敛. 但是它的逆命题一般不成立,今后将举例说明收敛的无穷积分不一定绝对收敛.

我们称收敛而不绝对收敛者为**条件收敛**.

二 比较判别法

首先给出无穷积分的绝对收敛判别法 .

由于$\int_a^u |f(x)| \mathrm{d}x$ 关于上限u是单调递增的,因此$\int_a^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是$\int_a^u |f(x)| \mathrm{d}x$ 存在上界. 根据这一分析,便立即导出下述比较判别法(请读者自己写出证明):

定理 11.2(比较法则) 设定义在$[a,+\infty)$上的两个函数 f 和 g 都在任何

有限区间$[a,u]$上可积，且满足

$$|f(x)|\leqslant g(x), x\in[a,+\infty),$$

则当$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛时$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$必收敛（或者，当$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$发散时，$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$必发散）.

例1 讨论$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$的收敛性.

解 由于$\left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2}, x\in[0,+\infty)$，以及$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$为收敛（§1例4），根据比较法则，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$为绝对收敛. □

上述比较法则的极限形式如下：

推论1 若f和g都在任何$[a,u]$上可积，$g(x)>0$，且$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)}=c$，则有：

(i) 当$0<c<+\infty$时，$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$同敛态；

(ii) 当$c=0$时，由$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛可推知$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$也收敛；

(iii) 当$c=+\infty$时，由$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$发散可推知$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$也发散.

当选用$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$作为比较对象$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$时，比较判别法及其极限形式成为如下两个推论（称为**柯西判别法**）.

推论2 设f定义于$[a,+\infty)(a>0)$，且在任何有限区间$[a,u]$上可积，则有：

(i) 当$|f(x)|\leqslant\frac{1}{x^p}, x\in[a,+\infty)$，且$p>1$时$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$收敛；

(ii) 当$|f(x)|\geqslant\frac{1}{x^p}, x\in[a,+\infty)$，且$p\leqslant1$时$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$发散.

推论3 设f定义于$[a,+\infty)$，在任何有限区间$[a,u]$上可积，且

$$\lim_{x\to+\infty}x^p|f(x)|=\lambda.$$

则有：

(i) 当$p>1, 0\leqslant\lambda<+\infty$时，$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$收敛；

(ii) 当$p\leqslant1, 0<\lambda\leqslant+\infty$时，$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$发散.

例 2 讨论下列无穷限积分的收敛性:

1) $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx$; 2) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}} dx$.

解 本例中两个被积函数都是非负的,故收敛与绝对收敛是同一回事.

1) 由于对任何实数 α 都有

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot x^\alpha e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha+2}}{e^x} = 0,$$

因此根据上述推论 3($p=2,\lambda=0$),推知 1)对任何实数 α 都是收敛的.

2) 由于

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}} = 1,$$

因此根据上述推论 3($p=\frac{1}{2},\lambda=1$),推知 2)是发散的. □

对于 $\int_{-\infty}^{b} |f(x)| dx$ 的比较判别亦可类似地进行.

三 狄利克雷判别法与阿贝尔判别法

这里来介绍两个判别一般无穷积分收敛的判别法.

定理 11.3(狄利克雷判别法) 若 $F(u)=\int_a^u f(x)dx$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界,$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上当 $x\to+\infty$ 时单调趋于 0,则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

证 由条件设 $\left|\int_a^u f(x)dx\right| \leqslant M, u\in[a,+\infty)$. 任给 $\varepsilon>0$,由于 $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$,因此存在 $G\geqslant a$,当 $x>G$ 时,有

$$|g(x)| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

又因 g 为单调函数,利用积分第二中值定理(定理 9.10 的推论),对于任何 $u_2>u_1>G$,存在 $\xi\in[u_1,u_2]$,使得

$$\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)dx = g(u_1)\int_{u_1}^{\xi} f(x)dx + g(u_2)\int_{\xi}^{u_2} f(x)dx.$$

于是有

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)dx\right| \leqslant |g(u_1)| \cdot \left|\int_{u_1}^{\xi} f(x)dx\right| + |g(u_2)| \cdot \left|\int_{\xi}^{u_2} f(x)dx\right|$$

$$= |g(u_1)| \cdot \left|\int_a^{\xi} f(x)dx - \int_a^{u_1} f(x)dx\right|$$

$$+|g(u_2)|\cdot\left|\int_a^{u_2}f(x)\mathrm{d}x-\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M+\frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M=\varepsilon.$$

根据柯西准则,证得 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛. □

定理 11.4(阿贝尔(Abel)判别法) 若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界,则 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

这定理同样可用积分第二中值定理来证明,但又可利用狄利克雷判别法更方便地获得证明(留作习题).

例 3 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x\ (p>0)$ 的收敛性.

解 这里只讨论前一个无穷积分,后者有完全相同的结论. 下面分两种情形来讨论:

(i) 当 $p>1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 绝对收敛. 这是因为

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\leqslant\frac{1}{x^p},x\in[1,+\infty),$$

而 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛,故由比较法则推知 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\mathrm{d}x$ 收敛.

(ii) 当 $0<p\leqslant 1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 条件收敛. 这是因为对任意 $u\geqslant 1$, 有 $\left|\int_1^{u}\sin x\mathrm{d}x\right|=|\cos 1-\cos u|\leqslant 2$, 而 $\frac{1}{x^p}$ 当 $p>0$ 时单调趋于 $0\ (x\to+\infty)$, 故由狄利克雷判别法推知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 当 $p>0$ 时总是收敛的.

另一方面,由于

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x},x\in[1,+\infty),$$

其中 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$ 满足狄利克雷判别条件,是收敛的,而 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x}$ 是发散的,因此当 $0<p\leqslant 1$ 时该无穷积分不是绝对收敛的. 所以它是条件收敛的. □

例 4 证明下列无穷积分都是条件收敛的:

$$\int_1^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x,\int_1^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x,\int_1^{+\infty}x\sin x^4\mathrm{d}x.$$

证 前两个无穷积分经换元 $t=x^2$ 得到

$$\int_1^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t,$$

$$\int_1^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

由例 3 已知它们是条件收敛的.

对于第三个无穷积分,经换元 $t=x^2$ 而得

$$\int_1^{+\infty}x\sin x^4\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\sin t^2\mathrm{d}t,$$

它也是条件收敛的. □

从例 4 中三个无穷积分的收敛性可以看到,当 $x\to+\infty$ 时被积函数即使不趋于零,甚至是无界的,无穷积分仍有可能收敛.

习 题

1. 证明定理 11.2 及其推论 1.

2. 设 f 与 g 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的函数,对任何 $u>a$,它们在 $[a,u]$ 上都可积. 证明:若 $\int_a^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty}g^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x$ 也都收敛.

3. 设 f、g、h 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的三个连续函数,且成立不等式 $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$. 证明:

(1) 若 $\int_a^{+\infty}h(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 都收敛,则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛;

(2) 又若 $\int_a^{+\infty}h(x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x=A$,则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=A$.

4. 讨论下列无穷积分的收敛性:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4+1}}$; (2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x}{1-\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$; (4) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}\mathrm{d}x$; (6) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x\ (n、m\geqslant 0)$.

5. 讨论下列无穷积分为绝对收敛还是条件收敛:

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_e^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\mathrm{d}x$.

---

6. 举例说明：$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时 $\int_a^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 不一定收敛；$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛时，$\int_a^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 也不一定收敛.

7. 证明：若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，则 $\int_a^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 必定收敛.

8. 证明：若 f 是 $[a,+\infty)$ 上的单调函数，且 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，且 $f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right),x\to+\infty$.

9. 证明：若 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，且 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

10. 利用狄利克雷判别法证明阿贝尔判别法.

§3 瑕积分的性质与收敛判别

类似于无穷积分的柯西收敛准则以及其后的三个性质，瑕积分同样可由函数极限 $\lim\limits_{u\to a^+}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的原意写出相应的命题.

定理11.5 瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$（瑕点为 a）收敛的充要条件是：任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 u_1、$u_2\in(a,a+\delta)$，总有

$$\left|\int_{u_1}^b f(x)\mathrm{d}x-\int_{u_2}^b f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

性质1 设函数 f_1 与 f_2 的瑕点同为 $x=a$，k_1、k_2 为常数，则当瑕积分 $\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$ 都收敛时，瑕积分 $\int_a^b[k_1f_1(x)+k_2f_2(x)]\mathrm{d}x$ 必定收敛，并有

$$\int_a^b[k_1f_1(x)+k_2f_2(x)]\mathrm{d}x=k_1\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x+k_2\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

性质2 设函数 f 的瑕点为 $x=a$，$c\in(a,b)$ 为任一常数. 则瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 同敛态，并有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x, \tag{2}$$

其中 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 为定积分.

性质 3 设函数 f 的瑕点为 $x=a$，f 在 $(a,b]$ 的任一内闭区间 $[u,b]$ 上可积. 则当 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也必定收敛，并有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x. \tag{3}$$

同样地，当 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛时，称 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为**绝对收敛**. 又称收敛而不绝对收敛的瑕积分是**条件收敛**的.

判别瑕积分绝对收敛的比较法则及其推论如下：

定理 11.6(比较法则) 设定义在 $(a,b]$ 上的两个函数 f 与 g，瑕点同为 $x=a$，在任何 $[u,b]\subset(a,b]$ 上都可积，且满足

$$|f(x)| \leqslant g(x), x\in(a,b].$$

则当 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 必定收敛(或者，当 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散时，$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 亦必发散).

推论 1 又若 $g(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{|f(x)|}{g(x)}=c$，则有：

(i) 当 $0<c<+\infty$ 时，$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 同敛态；

(ii) 当 $c=0$ 时，由 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛可推知 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 也收敛；

(iii) 当 $c=+\infty$ 时，由 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散可推知 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 也发散.

当选用 $\int_a^b \dfrac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}$ 作为比较对象 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 时，比较法则及其推论 1 成为如下的推论：

推论 2 设 f 定义于 $(a,b]$，a 为其瑕点，且在任何 $[u,b]\subset(a,b]$ 上可积，则有：

(i) 当 $|f(x)|\leqslant\dfrac{1}{(x-a)^p}$，且 $0<p<1$ 时，$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛；

(ii) 当 $|f(x)|\geqslant\dfrac{1}{(x-a)^p}$，且 $p\geqslant 1$ 时，$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散.

推论 3 设 f 定义于 $(a,b]$，a 为其瑕点，且在任何 $[u,b]\subset(a,b]$ 上可积. 如果

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)^p|f(x)|=\lambda,$$

则有：

(i) 当$0<p<1, 0\leqslant\lambda<+\infty$时$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$收敛;

(ii) 当$p\geqslant 1, 0<\lambda\leqslant+\infty$时$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$发散.

例1 判别下列瑕积分的收敛性:

1) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;   2) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\ln x}\mathrm{d}x$.

解 本例两个瑕积分的被积函数在各自的积分区间上分别保持同号——$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$在$(0,1]$上恒为负,$\frac{\sqrt{x}}{\ln x}$在$(1,2]$上恒为正——所以它们的瑕积分收敛与绝对收敛是同一回事.

1) 此瑕积分的瑕点为$x=0$. 由上述推论3,当取$p=\frac{3}{4}<1$时,有

$$\lambda=\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4}}\cdot\left|\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right|=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{4}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(4x^{\frac{1}{4}}\right)=0,$$

所以瑕积分1)收敛.

2) 此瑕积分的瑕点为$x=1$. 当取$p=1$时,由

$$\lambda=\lim_{x\to 1^+}(x-1)\cdot\frac{\sqrt{x}}{\ln x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\ln x}=1,$$

推知该瑕积分发散. □

最后举一个既是无穷积分又是瑕积分的例子.

例2 讨论反常积分

$$\Phi(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

的收敛性.

解 把反常积分$\Phi(\alpha)$写成

$$\Phi(\alpha)=\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=I(\alpha)+J(\alpha).$$

(i) 先讨论$I(\alpha)$. 当$\alpha-1\geqslant 0$,即$\alpha\geqslant 1$时它是定积分;当$\alpha<1$时它是瑕积分,瑕点为$x=0$. 由于

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1-\alpha}\cdot\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=1,$$

根据定理11.6推论3,当$0<p=1-\alpha<1$,即$\alpha>0$且$\lambda=1$时,瑕积分$I(\alpha)$收

敛；当 $p=1-\alpha\geqslant 1$，即 $\alpha\leqslant 0$ 且 $\lambda=1$ 时，$I(\alpha)$发散.

(ii) 再讨论 $J(\alpha)$，它是无穷积分．由于

$$\lim_{x\to+\infty} x^{2-\alpha}\cdot\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x}=1,$$

根据定理 11.2 推论 3，当 $p=2-\alpha>1$，即 $\alpha<1$ 且 $\lambda=1$ 时，$J(\alpha)$收敛；而当 $p=2-\alpha\leqslant 1$，即 $\alpha\geqslant 1$ 且 $\lambda=1$ 时，$J(\alpha)$发散.

综上所述，把讨论结果列如下表：

α	$\alpha\leqslant 0$	$0<\alpha<1$	$\alpha\geqslant 1$
$I(\alpha)$	发散	收敛	定积分
$J(\alpha)$	收敛	收敛	发散
$\Phi(\alpha)$	发散	收敛	发散

由此可见，反常积分 $\Phi(\alpha)$只有当 $0<\alpha<1$ 时才是收敛的. □

习　题

1. 写出性质 3 的证明.
2. 写出定理 11.6 及其推论 1 的证明.
3. 讨论下列瑕积分的收敛性：

(1) $\displaystyle\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$；　(2) $\displaystyle\int_0^\pi\frac{\sin x}{x^{3/2}}\mathrm{d}x$；

(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\ln x}$；　(4) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x$；

(5) $\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan x}{1-x^3}\mathrm{d}x$；　(6) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos x}{x^m}\mathrm{d}x$；

(7) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$；　(8) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x$.

---

4. 计算下列瑕积分的值(其中 n 为正整数)：

(1) $\displaystyle\int_0^1(\ln x)^n\mathrm{d}x$；　(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$.

5. 证明瑕积分 $J=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $J=-\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.（提示：利用$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$，并将它们相加.）

6. 利用上题结果，证明：

(1) $\displaystyle\int_0^\pi\theta\ln(\sin\theta)\mathrm{d}\theta=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$；

(2) $\displaystyle\int_0^\pi\frac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta}\mathrm{d}\theta=2\pi\ln 2$.

总练习题

1. 证明下列等式：

(1) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{x+1}dx = \int_1^{+\infty} \frac{x^{-p}}{x+1}dx, p > 0$;

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{x+1}dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{-p}}{x+1}dx, 0 < p < 1$.

2. 证明下列不等式：

(1) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} < \frac{\pi}{2}$;

(2) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right) < \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx < 1+\frac{1}{2e}$.

3. 计算下列反常积分的值：

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx (a > 0)$; (2) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx (a > 0)$;

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$; (4) $\int_0^{\pi/2} \ln(\tan\theta)d\theta$.

4. 讨论反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x^{\lambda}}dx (b \neq 0)$，$\lambda$ 取何值时绝对收敛或条件收敛.

5. 证明：设 f 在 $[0, +\infty)$ 上连续，$0 < a < b$.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k$，则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = (f(0)-k)\ln\frac{b}{a};$$

(2) 若 $\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx$ 收敛，则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

6. 证明下述命题：

(1) 设 f 为 $[a, +\infty)$ 上的非负连续函数. 若 $\int_a^{+\infty} xf(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛.

(2) 设 f 为 $[a, +\infty)$ 上的连续可微函数，且当 $x \to +\infty$ 时，$f(x)$ 递减地趋于 0，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的充要条件为 $\int_a^{+\infty} xf'(x)dx$ 收敛.

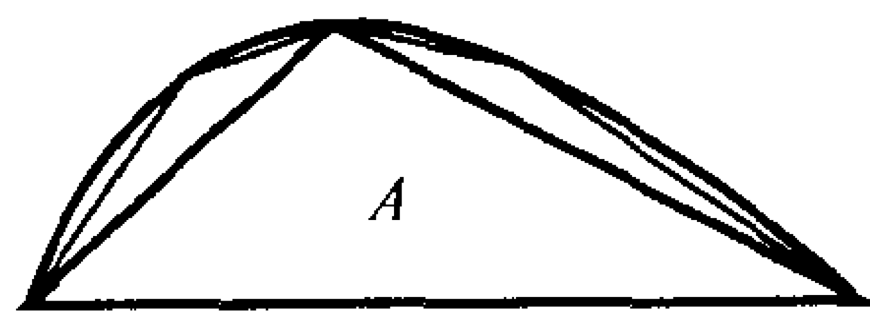
附录Ⅰ 微积分学简史

微积分学是微分学(Differential Calculs)和积分学(Integral Calculs)的统称，英文简称 Calculs,意为计算.这是因为早期微积分主要用于天文、力学、几何中的计算问题.后来人们也将微积分学称为分析学(Analysis),或称无穷小分析,专指运用无穷小或无穷大等极限过程分析处理计算问题的学问.

微积分的萌芽、发生与发展,经历了一个漫长的时期.

(1) 早在古希腊时期,欧多克斯(Eudoxus,约公元前 408—355)就提出了穷竭法.这是极限理论的先驱.它指出:"一个量如减去大于其一半的量,再从余下的量中减去大于该余量一半的量,这样一直下去,总可使某一余下的量小于已知的任何量."(见《几何原本》卷 X,1).这个定义使得古希腊数学家在所有论证中都不用"无穷小量"这个词,仅仅使用只需有限步可做到的穷竭法就够了.我国庄子(公元前 355—275)《天下篇》中说:"一尺之棰,日取其半,万世不竭",也具有极限的思想.

真正成为积分学萌芽的当推阿基米德(公元前 287—212)的工作.他在《抛物线求积法》中用穷竭法求出抛物线弓形的面积.其方法是:逐次作出与该弓形同底等高的三角形(如图Ⅰ-1),然后将这些三角形面积加起来.阿基米德给出,第 n 步时,这些三角形面积之和为



图Ⅰ-1

$$A\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}\right)$$

(A 为第一个三角形之面积).

然后他又指出

$$A\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{4^{n-1}}\right)=\frac{4}{3}A.$$

阿基米德对$\frac{1}{3}\frac{1}{4^{n-1}}$用穷竭法和反证法证明,抛物线弓形面积不能大于、也不能小于$\frac{4}{3}A$.证明是严格的,但未用极限和无穷小量,而是用"有限"形式的穷竭法.

应该指出,尽管古希腊数学家未使用无穷小与无穷大,但古希腊哲学家却对"无限"作过许多研究.例如亚里士多德(Aristotle 公元前 384—332)就严格区分

实无限和潜无限,且只承认潜无限.

公元前146年,罗马帝国灭亡古希腊,西方数学的发展渐渐停止.在以后漫长的中世纪里,微积分思想更完全束之高阁.这时阿拉伯、印度和中国的数学有长足进展.公元263年,刘徽为《九章算术》作注时提出“割圆术”用正多边形逼近圆周.他说“割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣”.这是极限论思想的成功运用.

欧洲的数学从12世纪到13世纪开始出现转机.希腊的数学著作此时陆续出现拉丁文本.当时的经院哲学又开始讨论无限,诸如实无限、潜无限、自成无限、合成无限、完全无限等.1328年英国大主教布兰德瓦丁(Bradwardine,1290—1349)在牛津发表的著作中曾有类似于均匀变化率和非均匀变化率的概念.

(2) 从16世纪中叶开始,微积分正式进入了酝酿阶段.这时陆续出版了阿基米德的一些著作.研究行星运动的开普勒(Kepler,1571—1630)发展了阿基米德求面积和体积的方法.他在1615年出版《新空间几何》,给出了92个阿基米德未讨论过的体积问题,并研究了酒桶的最佳比例.开普勒在天文学研究中已得到公式:$\int_0^\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta = 1 - \cos\theta$.1635年卡伐列利(Cavalieri,1598—1647)出版了《不可分量几何学》,影响巨大.他将面积的不可分量比作织成一块布的线,体积的不可分量比作一册书的各页,当然不可分量的个数为无穷多,且没有厚薄和宽窄.这已到达积分学的边缘,且卡伐列利已发现公式$\int_0^a x^n \mathrm{d}x = \frac{a^{n+1}}{n+1}$,$n$为正整数.

17世纪上半叶,微积分的奠基工作在紧锣密鼓地进行着.最重要的先驱有法国的帕斯卡(Pascal,1623—1662)和费马(1601—1665),英国的沃利斯(Wallis,1616—1703)和巴罗(Barrow,1630—1677).

帕斯卡在证明体积公式时,主要借助于略去高次项(即略去高阶无穷小).他也注意到很小的弧和切线是可以相互代替的.费马是17世纪的大数学家,成就广泛,数论中费马定理尤著称于世.他在求极大极小值上的成功,为微积分开辟了道路.他注意到:在长为a的线段上取一段x,由x和$a-x$所成矩形面积为$A=x(a-x)$.对一般的A,x可以有两个值,当A为极大值时,x只有一个值是$\frac{a}{2}$.费马于是论证如下:

设$A=x(a-x)$.今取$x+E$,则$A'=(x+E)(x-a-E)$.作

$$A' - A = E(a-2x) + E^2. \tag{1}$$

因极大值面积只有一个,故可认为$A'-A=0$,在(1)中约去E,即得$0=(a-2x)+E$.然后令E为0,得$2x=a$,即$x=\frac{a}{2}$.

这套做法好象变魔术一样,但其中蕴涵着导数为 0 的意思,E 相当于今天的 Δx,费马正是从$\dfrac{A'-A}{E}=0$ 解出了 $x=\dfrac{a}{2}$.

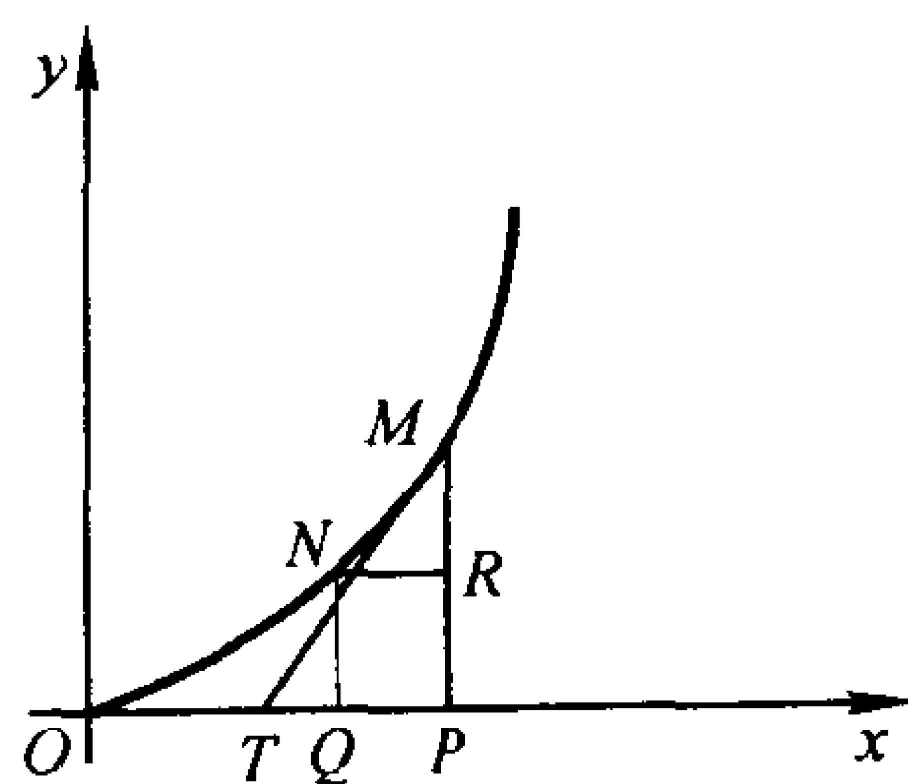
沃利斯从 1649 年起任英国牛津大学教授,他实际上已完成了相当于 $\int_0^x(1-t^2)^n\mathrm{d}x$ 的积分(n 是正整数),并给出 π 的无穷乘积的表示.沃利斯的业绩是大胆地将有限推向无限,例如他从

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2},\frac{0+1+2}{2+2+2}=\frac{1}{2},\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3}=\frac{1}{2},\cdots$$

断言,这个比对无限项也成立,这将导致积分.

巴罗是英国剑桥大学三一学院的教授和副校长,是牛顿的老师.他的主要贡献是给出求切线的方法,即相当于现代以 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}s$ 为边的直角三角形.在他的几何学讲义中有微分三角形 MNR(如图Ⅰ-2).他在求 PT 之长时舍去了 MR 和 NR 的高次项.

现代数学史家波耶(Boyer)认为,在所有微积分的先导工作中,费马和巴罗最接近于分析学.



图Ⅰ-2

(3) 牛顿(1642—1727)和莱布尼茨(1646—1716)在 17 世纪下半叶终于创立了微积分学.

牛顿是那个时代的科学巨人.在他之前,已有了许多科学积累:哥伦布发现新大陆(1492),哥白尼创立日心说(1543),伽里略出版《力学对话》(1638),开普勒发现行星运动定律(1619),笛卡儿创设解析几何(1637).航海的需要,矿山的开发,火药枪炮的制作提出了一系列的力学和数学问题,微积分在这样的条件下诞生,乃是必然的事.

牛顿家境贫困,1661 年以减费生进入剑桥大学三一学院读书,1664 年取得学士学位.1665 年伦敦流行鼠疫,牛顿回到乡下.他平生三大发明:流数术(微积分)、万有引力和光的分析,都发端于 1665—1666 年间,时年 23 岁.

有两个重要问题引起了人们的注意:如何求已知曲线的切线?如何确定已知曲线下方图形的面积?牛顿将这两个问题合起来考虑,主要的工具是二项式展开.他观察一族相关的曲线:$y=(1-x^2)^n$.对固定的整数 $n(n\geqslant0)$,将它作二项式展开就得到有 $-x^2,x^4,-x^6,x^8,\cdots$各项的多项式.然后用那时的知识已经知道 $-x^2$ 的下方图形面积是 $-\dfrac{x^3}{3}$,x^4 的下方图形面积是$\dfrac{x^5}{5}$,等等.牛顿构造了一个系数表,横向按幂次排列,纵向按 $n=1,2,\cdots$排列,表内的值是$(1-x^2)^n$ 下方图形面积展开式中各个幂次的系数.此表是一个巴斯卡方阵,他再插入对应于

$n=\frac{1}{2}$的各幂项的系数，现今称之为牛顿二项式定理. 这样牛顿就能用这张表求出当时所知的代数曲线下的面积. 这张表把微分和积分概念连结起来了.

牛顿仔细运用他的运算所遵循的模式，把曲线看作运动着的点的轨迹，想象用一条运动的直线扫过一个区域，来计算此曲线下的面积，这就是牛顿用运动的概念来叙述他的发现.

1665 年 5 月 20 日，在牛顿手写的一页文件中开始有“流数术”的记载. 微积分的诞生，不妨以这一天为标志. 他称连续变量为“流动量”，流动量的导数为“流动率”. $\dot{x}$表示流动量 x 的流动率. 我们举下面的例说明牛顿的流动率的求法.

设给定函数 $y-x^2=0$，时间的刹那用 0 表示(即 $\mathrm{d}t$)，x，y 的刹那，用 $\dot{x}0$ 和 $\dot{y}0$ 表示$\left(即\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}t,\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}t\right)$. 以 $x+\dot{x}0$ 及 $y+\dot{y}0$ 替代 x，y，代入方程得

$$y+\dot{y}0-(x^2+2x\dot{x}0+\dot{x}^20^2)=0.$$

因 $y-x^2=0$，故有

$$\dot{y}0-2x\dot{x}0+\dot{x}^20^2=0.$$

全式除以 0，得

$$\dot{y}-2x\dot{x}+\dot{x}^20=0.$$

略去 $\dot{x}^20$，即得 $\dot{y}=2x\cdot\dot{x}$. 用现在的记号就是$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$.

牛顿在《流数术》一书中陈述了所研究的基本问题是“已知量的关系，要算出它们的流数；以及反过来.”正是这一点，使牛顿超过所有的微积分先驱者. 牛顿完整地提出微分和积分是一对逆运算，并且指出了换算的公式，这公式现在称为牛顿—莱布尼茨公式，或微积分学基本定理.

牛顿关于微积分的著作大多写于 1665—1676 年间，但这些著作发表很迟，流数术到 1687 年才在《自然哲学之数学原理》中以几何形式发表出来.《流数术》本身直到他去世后 9 年(1736)才公开发表.

莱布尼茨年青时在莱比锡大学学习法律，后来投身外交界，在巴黎、伦敦结识了法国和英国的数学家. 他的数学研究完全是在公余进行的. 他和牛顿曾就微积分进行多次通信，但莱布尼茨完全是独立创立微积分理论的. 牛顿从力学导致流数术，而莱布尼茨则从几何学上考察切线问题而得出微分法. 他的第一篇论文刊登于 1684 年的《教师期刊》上，这比牛顿公开发表早三年. 这篇文章给一阶微分以明确的定义. 他说横坐标 x 的微分 $\mathrm{d}x$ 是个任意量，而纵坐标 y 的微分 $\mathrm{d}y$ 则定义为它与 $\mathrm{d}x$ 之比等于纵坐标与次切距之比的那个量(在前述巴罗的微分三角形的图中，次切距是 TP，纵坐标是 MP，它们之比正是切线的斜率).

莱布尼茨和牛顿一样,掌握了微分法和积分法,并洞悉二者之间的联系.因而将他们两人并列为微积分的创始人是完全正确的.尽管牛顿的研究比莱布尼茨早10年,但论文的发表要晚3年.由于彼此都是独立发现的,曾经长期争论谁是最早的发明者并无意义.由于莱布尼茨的记号 dx 和 $\int$ 较为便利,所以现今的微积分似乎更接近莱布尼茨当年的形式.

(4) 微积分诞生以后,曾就它的基础是否稳固爆发过一场大的争论.

1734年,贝克莱(Berkeley,1685—1753,爱尔兰的主教)出版了一本书:《分析学家:或一篇致不信神数学家的论文,其中审查一下近代分析学的对象、原则及论断是否比宗教的神秘、教旨有更清晰的陈述,或更明显的推理》.书中他嘲笑无穷小量是"已死量的幽灵".

确实,不管是费马的"E",牛顿的"0",还是莱布尼茨的 dx,都又是0,又不是0,呼之即来,挥之即去,说它是"鬼使神差",似乎不算过分.因此贝克莱主教以此攻击牛顿,荷兰哲学家尼文太(Nieuwentijt,1654—1718)也反对过莱布尼茨的高阶微分和略去无穷小量.

当然,也有很多人企图弥补这一缺陷.麦克劳林(1698—1746)试图从瞬时速度的理解上加以解释,但成效不大.泰勒(1685—1731)曾用差分去解释流数,却被说成"把车子放到了马的前面".路子比较对的是达朗贝尔(D'Alembert,1717—1783),他将微积分的基础归结为极限,并认为极限是"一个变量趋近于一个固定量,趋近的程度小于任何给定的量",不过他并未沿这条路走到底.

与此同时,许多数学家在不严密的基础上对微积分创立了许多辉煌的成就.欧拉(Euler,1707—1783)以微积分为工具解决了大量的天文、物理、力学等问题,开创了微分方程、无穷级数、变分学等诸多新学科.1748年的《无穷小分析引论》是世界上第一本完整的有系统的分析学.拉格朗日(1736—1833)、拉普拉斯(Laplace,1749—1827)、勒让德(Legendre,1752—1813)、傅里叶(Fourier,1768—1830)等许多大家在分析学方面都有重大贡献,但在微积分学基础上却没有找到合适的解决办法.以致法国启蒙哲学大师伏尔泰(Voltaire,1694—1776)把微积分称为"精确计算和度量一个其存在性是无从想象的东西的艺术".

(5) 进入19世纪以后,分析学的不严密性到了非解决不可的地步.那时还没有变量、极限的严格定义.不知道什么是连续,因为有解析式的函数天然地被认为是连续的.级数的收敛性,定积分的存在性都是含糊不清的.阿贝尔(1802—1829)在1826年说:"在高等分析中只有很少几个定理是用逻辑上站得住脚的形式证明的.人们到处发现从特殊跳到一般的不可靠的推理方法."

严密的分析是从波尔察诺(Bolzano,1781—1848),阿贝尔和柯西(1789—1857)等人开始的.这和非欧几何的创立、群论的发现差不多处于同一时期.1821

年,法国理工科大学教授柯西写了《分析教程》一书,其中将极限定义为"若代表某变量的一串数值无限地趋向于某一数值,其差可任意小,则该固定值称为这一串数值的极限."并由此出发建立起一个微积分体系.柯西的功绩是将分析学奠定在极限概念之上,把纷乱的概念理出了一个头绪.但是他的叙述仍然使用"无限趋向"、"要多小有多小"之类的语言,仍然是不严格的.他的一些重要思想,例如,导数是$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限,定积分是和式极限,连续的$f(x)$的活动上限积分的导数是$f(x)$自身等,尽管十分深刻,但离开真正的严密化还有一段距离.

德国数学家魏尔斯特拉斯(1815—1897)在当中学数学教师时,将分析做到"算术化".他反对"变量无限趋向于"之类的说法,认为变量无非是一个字母,用来表示某区间内的数.这一想法导致了变量x在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$取值时,$f(x)$在$(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)$取值这样的表示方法.这样,在他手里,终于得到了现今广泛采用的$\varepsilon-\delta$定义,完全摆脱了几何直观所带来的含糊观念.

最后一块难啃的骨头是实数理论.柯西认识到"无理数是有理数迫近的极限",但极限又要用到实数,这是一个循环论证.1872年梅莱(Meray,1835—1911)、海涅(1821—1881)、康托尔(Cantor,1845—1918)用现在称为柯西收敛准则的想法将无理数看成柯西列,戴德金(Dedekind 1831—1916)则不依赖极限,而用有理数的分划定义所有实数.这两条路线殊途同归,都为建立实数理论打下了基础.戴德金的想法更为深刻,被人誉为"不依赖于空间与时间直观的人类智慧的创造物",它最终使无理数摆脱了"不可公度线段"之类的几何直观.

分析学在19世纪的最后几十年中有许多理论上的进展.海涅在1870年提出一致连续性.1895年博雷尔(1871—1956)运用海涅的一个性质,将它上升为有限覆盖定理.1872年魏尔斯特拉斯给出了处处连续而不可微的函数例子.黎曼(1826—1866)和达布(1842—1917)给出了有界函数可积性的定义和充要条件(1854和1885年).这些,构成了现今数学分析教科书的主要内容,微积分严密化的任务终于在他们手中完成了.

马克思曾经写过一些阅读微积分著作的笔记,没有正式发表,他从哲学的高度分析了微积分学中的矛盾,对无穷小量既是0,又不是0,微分学中$\frac{0}{0}$的意义等作了解剖.后人以《马克思数学手稿》将这些笔记公开发表.据研究,马克思并没有看到柯西等人的著作,对微积分基础严密化的数学进程并不了解.

(6) 牛顿和莱布尼茨大约与清朝的康熙皇帝处于同一时期.康熙虽喜欢西方数学,向传教士学过欧氏几何,三角测量等,但从未接触过微积分,那些传教士恐怕也不懂.第一部微积分著作的中译本迟至1859年,这就是李善兰(1811—1882)和伟烈亚力(Alexande Wylie,1815—1887)合译的《代数积拾级》,原书为美

国罗密士(Eliao Loomis)所写的《Analytical Geometry and Calculs》,译名中的“代”指代数几何,即今之解析几何.序中说“康熙时,西国来本之(即莱布尼茨)、奈端(即牛顿)二家又创微分、积分二术.……其理大要:凡线面体皆设由小到大,一刹那中所增之积即微分也,其全积即积分也.”此书于1859年5月10日由上海墨海书馆印行.那时上海还没有发电厂,是用牛带动印刷机印成的.

微分,积分等名词由李善兰首译,十分恰当,这些译法传至东邻日本,以至中日的微积分名词多所相同.李善兰是京师同文馆的首任算学总教习,是晚清我国最杰出的数学家.

我国普及西算,约在辛亥革命前后.五四运动之后,全国各地纷纷创办数学系,微积分才作为大学课程普遍开设.中国现代数学的研究起步很晚,落后于西方两百余年,但是从20世纪20年代起,研究水平提高很快.我国第一个数学博士胡明复(1891—1927),以《线性微积分方程》的论文,1917年在哈佛大学通过博士论文答辩.又如陈建功(1893—1970)在《东京帝国学士院进展》(Proc. Imp. Acad. Tokyo. 1928)上发表论文《关于具有绝对收敛傅里叶级数的函数类》,其结果与英国大数学家哈代(Hardy)、李德伍德(Littewood)的结果相同,是为国际水平的分析学研究之始.熊庆来(1893—1969)在亚纯函数论的研究上有杰出成就,被欧洲数学家誉为熊氏无穷级理论.解放以后,微积分更加普及,研究水平也不断提高.在若干项目上,已居领先地位.当然,在整体上,我们与国际先进水平还有很大差距,有待进一步努力.

(7) 20世纪的分析学仍在大步前进.20世纪初年勒贝格(Lebesgne,1875—1941)开创了可列可加测度的积分论,即实变函数论,也称实分析.在此基础上的概率论和随机过程论被称为现代分析.复变函数论继续向纵深发展,形成复分析.以函数空间为背景的泛函和算子理论,开始了泛函分析的历程.三角级数论发展成羽毛丰盛的各种各样的傅里叶分析.20世纪分析学的另一特征是处理高维空间中曲线曲面,多变量函数的整体性质.这需用拓扑学知识及代数工具,形成流形上的分析.它使微分几何学、偏微分方程、多复变函数论等学科相结合,形成当代数学中的主流方向.与此同时,研究多元函数的反函数,多元积分的外微分形式,逐渐成为分析学的基础知识.

20世纪的分析学基本上解决了线性空间上的线性算子(线性微分方程)的课题,目前非线性分析已成为最活跃的数学分支之一.微积分的基础虽已严密化,但无穷小量却不再是一个量,而是一种变化过程.为了使无穷小和无穷大作为一个量重返数坛,罗宾逊(Robinson 1918—1974)在1960年将实数系 $\mathbf{R}$ 扩充为超实数系 $\mathbf{R}^*$,无穷小量作为 $\mathbf{R}^*$ 中的数,使极限过程的表示显得更为简单,这称为非标准分析.

泛函分析的产生使分析学跃上新的高度.希尔伯特空间,巴拿赫空间,广义

函数论已成为数学家和物理学家的常识.无限维空间上的微积分学尚未诞生,这也许是21世纪的任务.此外,积分论仍在发展,黎曼积分的推广仍不能说已经完成了.

微积分从20世纪初开始进入中学.它作为人类文化的宝贵财富,正在武装一代又一代的新人,终将成为世人皆知的常识.它那闪耀着智慧光芒的深刻思想,一定会哺育人类走向更高的历史阶段.

附录Ⅱ 实数理论

在中学数学中，我们已经知道实数包括有理数和无理数.从历史上看，人们先认识有理数.不过在公元前古希腊时期就已发现不可公度线段，指出“无理数”的存在.但有关实数的理论却直到十九世纪末，为奠定微积分基础的需要才完整地建立起来.

一 建立实数的原则

有理数全体组成的集合 **Q**，构成一个阿基米德有序域，我们希望有理数扩充到实数之后，全体实数的集合也构成阿基米德有序域.

所谓集合 F 构成一个**阿基米德有序域**，是说它满足以下三个条件：

1. F 是域　在 F 中定义了加法“+”与乘法“·”两个运算，使得对于 F 中任意元素 a,b,c 成立：

加法的结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$；

加法的交换律：$a+b=b+a$；

乘法的结合律：$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$；

乘法的交换律：$a\cdot b=b\cdot a$；

乘法关于加法的分配律：$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

在 F 中存在零元素和反元素：在 F 中存在一个元素“0”，使得对 F 中任一元素 a，有 $a+0=a$，则称“0”为**零元素**；对每一个元素 $a\in F$，有一个元素 $(-a)\in F$，使得 $a+(-a)=0$，则称 $-a$ 为 a 的**反元素**.

在 F 中存在单位元素与逆元素：在 F 中存在一个元素 e，使得对 F 中任一元素 a，有 $a\cdot e=a$，则称 e 为**单位元素**；对每一个非零元素 $a\in F$，有一个元素 $a^{-1}\in F$，使得 $a\cdot a^{-1}=e$，则称 a^{-1} 为 a 的**逆元素**.

2. F 是**有序域**　在 F 中定义了**序**关系“<”具有如下(**全序**)性质：

传递性：对 F 中的元素 a、b、c，若 $a<b$[①]，$b<c$，则 $a<c$；

三歧性：F 中任意两个元素 a 与 b 之间，关系

$$a<b,a=b,a>b$$

三者必居其一，也只居其一(这里 $a>b$，就是 $b<a$).

---

① 关系式 $a<b$ 称谓 a 小于 b，或 b 大于 a.

当序与加法、乘法运算结合起来进行时,则有如下性质:

加法保序性:若 $a<b$,则对任何 $c\in F$,有 $a+c<b+c$;

乘法保序性:若 $a<b$ 及 $c>0$[①],则 $ac<bc$.

3. F 中元素满足阿基米德性　对 F 中任意两个正元素 a,b,必存在自然数 n,使得 $na>b$[②].

有理数系 $\mathbf{Q}$ 满足上述所有条件,所以它是一个阿基米德有序域.我们现在的目标是:利用有理数作材料,构造出一个新的有序域,它不仅具有阿基米德性,而且能使确界原理得以成立,并把有理数作为它的一部分.特别当有理数作为新数进行运算时,仍保持其原来的运算规律,我们称这种新数为实数.用有理数构造新数的方法很多,如戴德金的分划说,康托尔的基本列说,区间套说等等.本附录将向大家详细介绍戴德金分划说.

二　分析

我们称能使确界原理得以成立的有序域为具有**完备性**的有序域.读者已知有理数域 $\mathbf{Q}$ 不是完备的有序域,现在要把它扩充成一个具有完备性的有序域 $\mathbf{R}$.

不妨先假定这种 $\mathbf{R}$ 是存在的,然后看它应具有什么特性,尤其是新数与旧数(有理数)之间的关系如何?

先介绍两个引理(证明可以暂时不看).

引理 1　一个有序域如果具有完备性,则必具有阿基米德性.

证　用反证法.设 α,β 为域中正元素,倘若序列 $\{n\alpha\}$ 中没有一项大于 β,则序列有上界(β 就是一个).因而由完备性假设,存在 $\{n\alpha\}$ 的上确界 λ,对一切自然数 n 有 $\lambda\geqslant n\alpha$[③],同时存在某个自然数 n_0,使 $n_0\alpha>\lambda-\alpha$.从而有

$$(n_0+2)\alpha\leqslant\lambda<(n_0+1)\alpha$$

或 $\alpha<0$,这与假设 $\alpha>0$ 矛盾.所以完备的有序域必具有阿基米德性.　□

引理 2　一个有序域,如果具有阿基米德性,则它的有理元素[④]必在该域中稠密.即对有序域中任意两个不同的元素 α、β,在 α 与 β 之间必存在一个有理元素(从而存在无穷多个有理元素).

证　设 α,β 为有序域中两个不同的元素,且 $\alpha<\beta$.由阿基米德性,存在正

---

① 若元素 c 满足关系式 $c>0$,则称 c 为**正元素**.若满足关系式 $c<0$,则称 c 为负元素.

② n(自然数)个元素 a 相加,记作 $na(=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n})$.

③ 关系式 $a\leqslant b$ 表示元素 a,b 之间有关系式 $a<b$ 或 $a=b$.

④ 任一阿基米德有序域都有一个与有理数域同构的子域,其元素称为**有理元素**.为此,今后为叙述方便,将对"有理元素"与"有理数"两种说法看作有相同含义而不加以区别.如有理元素 d 也说有理数 d.

整数 N 使得 $N(\beta-\alpha)>1$ 或 $\frac{1}{N}<\beta-\alpha$. 令 $d=\frac{1}{N}$,它是一个有理数,再任取一个有理数 $\gamma_0<\alpha$,在等差序列 $\{\gamma_0+nd\}$ 中,由阿基米德性总有某项大于 α,设在该序列中第一个大于 α 的项为 γ_0+n_0d,则该数就是所求的有理数,即 $\alpha<\gamma_0+n_0d<\beta$. 因为由 n_0 的选择有 $\gamma_0+(n_0-1)d\leqslant\alpha$,倘若 $\gamma_0+n_0d\geqslant\beta$,则这两个不等式相减将有 $d\geqslant\beta-\alpha$,这与 d 的定义矛盾,从而得证. □

由这两个引理看到,若存在完备的有序域 **R**,则有理数必在其中稠密.

接下来分析,**R** 中新数(非有理数)与旧数(有理数)之间的关系. 设 $\alpha\in\mathbf{R}$,但 $\alpha\bar{\in}\mathbf{Q}$. 那么任一 $\gamma\in\mathbf{Q}$,或者 $\gamma<\alpha$,或者 $\gamma>\alpha$,二者必居其一. 令

$$A=\{\gamma\in\mathbf{Q}\mid\gamma<\alpha\},A'=\{\gamma\in\mathbf{Q}\mid\gamma>\alpha\}. \tag{1}$$

这时 A 与 A' 满足下述三个条件:

1° A 和 A' 皆不空;

2° $A\cup A'=Q$;

3° 若 $a\in A,a'\in A'$,则 $a<a'$(从而 $A\cap A'=\varnothing$).

一般地我们引入下面的定义:

定义 1 若 A,A' 是满足上述三个条件的有理数集 **Q** 的子集,则称序对 (A,A') 为 **Q** 的一个分划,并分别称 A 和 A' 为该分划的**下类**和**上类**.

例如,对任一 $\gamma\in\mathbf{Q}$,令

$$A=\{x\in\mathbf{Q}\mid x<\gamma\},A'=\mathbf{Q}\setminus A=\{x\in\mathbf{Q}\mid x\geqslant\gamma\},$$

则 (A,A') 显然是一个分划(我们称它为第一种分划). 若令

$$A=\{x\in\mathbf{Q}\mid x\leqslant\gamma\},A'=\mathbf{Q}\setminus A=\{x\in Q\mid x>\gamma\},$$

这里 (A,A') 显然也是一个分划(我们称它为第二种分划). 这两个分划的特点是:第一种分划的上类有最小数,第二种分划的下类有最大数. 此外还有第三种分划,它的上类无最小数,下类无最大数①. 例如:

$$A'=\{x\in\mathbf{Q}\mid x>0,\text{且 }x^2>2\},$$

$$A=\mathbf{Q}\setminus A'=\{x\in\mathbf{Q}\mid x\leqslant 0\quad\text{或}\quad(x>0,\text{且 }x^2<2)\}.$$

这也是一个分划,而且在这个分划里,A 中无最大数,A' 中无最小数. 这是因为,当 $x>1$ 且 $x^2<2$ 时,对任何满足 $0<h<\frac{2-x^2}{2x+1}$ 的 h,有

$$(x+h)^2=x^2+2xh+h^2<x^2+2xh+h<x^2+2-x^2=2.$$

可见 A 中无最大数. 类似地,设 $x>0$ 且 $x^2>2$,则对任何满足 $0<h<\frac{x^2-2}{2x}$ 的 h,有

① 由有理数本身的稠密性,不可能存在上类有最小数,同时下类有最大数的分划.

$$(x-h)^2 = x^2 - xh + h^2 > x^2 - 2xh > 2.$$

可见 A' 中无最小数.

第三种分划的存在说明有理数集尽管稠密,但仍有空隙.容易看出,填补上例中空隙的正是无理数 $\sqrt{2}$.

现在回头来看上面由新数 α 所产生的分划(1),究竟属于哪一种.很清楚,如果 A 有最大数或 A' 有最小数,则该最大数或最小数与 α 之间将不存在任何有理数,从而与引理 2 矛盾,所以由 α 所产生的分划 (A, A') 必为第三种分划.反之,设 (A, A') 是 **Q** 的任一第三种分划,它是否必由某一新数 α 产生呢?首先 A 与 A' 之间必至少有一新数存在,否则 A 作为 **R** 的有上界的子集将没有上确界(最小上界),这与 **R** 的完备性相矛盾.其次,A 与 A' 之间也只能有一个新数,倘若有两个新数,则在这两个数之间又将不存在任何有理数,这又与引理 2 相矛盾.设这唯一的新数为 α,则分划 (A, A') 只能由 α 所产生而且也是反过来确定 α 的.这样就获得如下重要结果:如果 **Q** 能扩充成完备的有序域 **R**,则 **R** 中的新数与 Q 中的第三种分划必一一对应.

这样一来,只要知道 **Q** 的所有第三种分划,就可以知道 **R** 上的序,这是因为不仅新数与旧数可比较大小,新数与新数也可以比较大小.一旦知道了 **R** 上的序,就可进而从 **Q** 内已知的四则运算推知 **R** 上的四则运算.这是因为在有序域上序与加法、乘法运算是协调的.此外,也不难看到:若存在 **Q** 的完备扩充的话,则这种扩充基本上(即在序同构意义下)是唯一的.所有这些虽然我们不打算作深入的讨论,但必须认识到有上述事实,才有助于对以下内容的理解.

三　分划全体所成的有序集

现在不再假设 **R** 的存在,而是要把它真正地构造出来.我们设想,对每一个可能的 **Q** 的第三种分划,都定义一个新数来填补空隙.由于这种分划与新数是一一对应的,因此,不妨干脆就把分划本身用来充当新数,这是允许的.因为归根到底数学对象本身究竟是什么并不重要,重要的是它们之间的关系和运算.而且为统一起见,我们也用分划形式来表示相应的旧数(正如把整数扩充到有理数时,也可用假分数来表示整数那样).于是我们就把注意力转到 **Q** 的分划的全体上去.

定义 2　**Q** 的分划的全体称为分划集,以 **R** 表示,其中第一种分划和第二种分划看作是同一种分划,即由同一个 r 产生的第一种分划和第二种分划不加区别地看作同一分划,称为**有端分划**①,并用 r^* 记这个分划.第三种分划称为**无端分划**.今后凡分划不论有端还是无端都用小写希腊字母来表示,如 $\alpha = (A, A')$,

---

① 这里"端"是指上类的最小数或下类的最大数.

$\beta=(B,B')$等(小写拉丁字母则用来表示有理数).

由于任一分划均由它的上、下两类中的任何一类完全确定,因此,给定了分划的一个类,也就完全确定了该分划. $\mathbf{Q}$ 的怎样的子集才能成为一个分划的类呢? 对此有如下命题:

定理 1(类的标志) $\mathbf{Q}$ 的非空子集 M 能成为一个分划的上(下)类的充要条件是:

1° $M\neq\mathbf{Q}$;

2° 若 $x\in M$,且 $y>x(y<x)$,则 $y\in M$.

证 只须证充分性.设 M 满足条件,则 M 与 $\mathbf{Q}\setminus M$ 不空.令 $A=M,A'=\mathbf{Q}\setminus M$,则$(A,A')$满足分划的前两个条件.设 $x\in A,y\in A'$,由 A'的定义不可能有$y=x$.再由 2°它也不可能有 $y<x$,因而必有 $y>x$,即分划的第三个条件也满足. □

推论 不论是上类还是下类,若 a,b 属于它,则 a,b 之间的有理数都属于它.

定义 3 设 $\alpha=(A,A'),\beta=(B,B')$为任意两个分划,我们说:在 A、B 无端(通过调整总可以办到)的情形下,若 $A\subset B$,则有 $\alpha<\beta$;若 $A=B$,则有 $\alpha=\beta$;若 $A\supset B$,则有 $\alpha>\beta$.

定理 2 定义3中的关系"$<$"是全序的,即满足下述条件:

1° 若 $\alpha<\beta,\beta<\gamma$,则 $\alpha<\gamma$(传递性),

2° $\alpha<\beta,\alpha=\beta,\alpha>\beta$ 三者必居其一,且仅居其一(三歧性).

证 1°是显然的.现在证明 2°(三歧性).如果 $A\neq B$,且 $A\not\subset B$,则必存在某个 $a\in A$,同时 $a\in B'$.由后一关系及分划定义,对任何 $b\in B$ 都有$a>b$.再由定理 1 得 $B\subset A$. □

注意 如果不限制下类无端,则对同一个有端分划将出现第一种分划<第二种分划的不合理现象.

读者容易证明如下命题:

定理 3 1°设 $\alpha=(A,A')$,对任何 $a\in A$,a 对应的分划记为a^*,则有 $a^*\leqslant\alpha$,对任何 $b\in A'$,有 $b^*\geqslant\alpha$.反之,由 $a^*<\alpha$ 有$a\in A$,由 $b^*>\alpha$ 有$b\in A'$.

2° 对任意 α,β,当 $\alpha<\beta$ 时,存在 $r\in\mathbf{Q}$,使得 $\alpha<r<\beta$(这说明有端分划在 $\mathbf{R}$ 中稠密).

定理 4(戴德金定理,或称实数的连续性定理) 设 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}'$为 $\mathbf{R}$ 的子集,它满足如下条件:

1° $\mathbf{A}$ 与$\mathbf{A}'$均不空;

2° $\mathbf{A}\cup\mathbf{A}'=\mathbf{R}$;

3° 若 $\alpha\in\mathbf{A},\alpha'\in\mathbf{A}'$,则 $\alpha<\alpha'$.

(称序对$(\mathbf{A},\mathbf{A}')$为$\mathbf{R}$的一个分划),则或者A有最大元,或者$\mathbf{A}'$有最小元.

证 令$A=\{r\in\mathbf{Q}\mid r^*\in\mathbf{A}\}$,$A'=\{r\in\mathbf{Q}\mid r^*\in\mathbf{A}'\}$,则$\alpha=(A,A')$为$\mathbf{Q}$的一个分划.设$\beta<\alpha$,由定理3的2°,存在$r\in\mathbf{Q}$使$\beta<r^*<\alpha$.由$r^*<\alpha$及定理3的1°有$r\in A$.又由$\beta<r^*$,根据类的标志[①]知道$\beta\in A$.同样由$\beta>\alpha$,可得$\beta\in A'$.但$\alpha$本身作为$\mathbf{Q}$的一个分划,也是$\mathbf{R}$的元素,故不属于$A$,必属于$A'$.若$\alpha\in A$,则$\alpha$为$A$的最大元,否则为$A'$的最小元. □

因为以后将把$\mathbf{R}$看作是实数集,所以本定理是说:实数集无空隙,或更通俗地说:如果将实数集看作一条直线,并用一把没有厚度的理想的刀来砍它,那么不论砍在哪里,总要碰着直线上的一点.戴德金称实数的这个性质为连续性,但有的书也称它为实数的连通性.

定理5(实数的完备性定理) 设M为$\mathbf{R}$中有上界的子集,则M在$\mathbf{R}$中有上确界.即M在$\mathbf{R}$中全体上界所组成的集合有最小元.

证 令M在$\mathbf{R}$中全体上界组成的集合为A',令$A=\mathbf{R}\setminus A'$.则(A,A')为$\mathbf{R}$的一个分划.由戴德金定理,或者A有最大元,或者A'有最小元.因为A中任一元素a都不是M的上界,故存在M中某一元素m,使$a<m$.由定理3的2°,存在a_1使$a<a_1<m$,即$a_1\in A$,于是A无最大元.因而A'一定有最小元. □

四 R中的加法

在定义$\mathbf{R}$中的加法之前,先证明一个引理.

引理3 对任何$\mathbf{Q}$的分划(A,A')及任何有理数$k>0$,存在$a\in A$,$a'\in A'$,使得$a'-a=k$.

证 设$c\in A$,$c'\in A'$.由阿基米德性,在等差序列$\{c+nk\}$中必有大于c'的项,设c_0+n_0k是该序列中第一个大于c'的项,则$c+n_0k\in A'$,而$c+(n_0-1)k\in A$,故分别取它们为a'与a时,其差正是k. □

设X、Y为两个数集,我们用$X+Y$,$X\cdot Y$和$-X$分别表示$\{x+y\mid x\in X, y\in Y\}$,$\{x\cdot y\mid x\in X,y\in Y\}$和$\{-x\mid x\in X\}$.

定义4 设$\alpha=(A,A')$,$\beta=(B,B')$,我们定义$\alpha+\beta=(C,C')$,其中$C=A+B$,从而$C'=\mathbf{Q}\setminus C$.

这里必须指出,定义4中的(C,C')确是$\mathbf{Q}$的一个分划,因为C非空,$C\neq\mathbf{Q}$,设$x\in A$,$y\in B$,$z<x+y$.这时令$x_1=x-\dfrac{x+y-z}{2}$,$y_1=y-\dfrac{x+y-z}{2}$,则$x_1\in A$,$y_1\in B$且$z=x_1+y_1$,故C确是这一分划的下类.

当然,我们也可以从定义$C'=A'+B'$入手.读者可以验证这两个定义的一

① 在定理1中如果将$\mathbf{Q}$改为$\mathbf{R}$,其结论仍然成立.当然这里只用到它的必要条件部分.

致性，即它们至多相差一个端.

定理 6 R 中的加法具有下列性质：对任何 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$

1° $\alpha+\beta=\beta+\alpha$（交换律），$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$（结合律）.

2° 存在零元 $\mathbf{0}$①，对任何 $\alpha\in\mathbf{R}$ 有 $\alpha+\mathbf{0}=\alpha$.

3° 对任何 $\alpha\in\mathbf{R}$，存在反元 $-\alpha\in\mathbf{R}$，使得 $\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}$.

4° 若 $\alpha<\beta$，则 $\alpha+\gamma<\beta+\gamma$（加法的单调性）.

证 1° 显然.

2° 以一切负有理数为下类的 0^* 满足零元要求. 事实上，设 A 为 α 的下类，则对任一 $x\in A$ 及 $y<0$ 都有 $x+y<x$，故 $x+y\in A$，从而 $\alpha+0^*\leqslant\alpha$. 另一方面. 若 A 无端，则对任何 $x\in A$，存在 $x_1>x$，且 $x_1\in A$. 从而 $x=x_1+(x-x_1)$，其中 $x-x_1<0$. 于是又有 $\alpha+0^*\geqslant\alpha$. 这就得到 $\alpha+0^*=\alpha$. 由于零元的唯一性②，今后将一直把 0^* 写作 $\mathbf{0}$.

3° 设 $\alpha=(A,A')$，现在证明 $(-A',-A)$ 满足要求，易见 $(-A',-A)$ 是一个分划. 暂将它写作 $-\alpha$. 由于 $A+(-A')=A-A'$ 中的元素恒为负有理数，故 $\alpha+(-\alpha)\leqslant\mathbf{0}$. 另一方面，由引理 3 对任给 $\varepsilon>0$，总存在 A' 中的数 a' 与 A 中的数 a，使得 $0\leqslant a'-a<\varepsilon$，故有 $\alpha+(-\alpha)\geqslant\mathbf{0}$. 从而得 $\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}$. 由于反元的唯一性. 今后将一直把 $(-A',-A)$ 写作 $-\alpha$.

4° 设 $\alpha<\beta$，由定义 $A\subset B$. 于是有 $A+C\subseteq B+C$，所以 $\alpha+\gamma\leqslant\beta+\gamma$. 另一方面，倘若 $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$，则两边各加 $-\gamma$ 将有 $\alpha=\beta$. 这与假设相矛盾，故应有 $\alpha+\gamma<\beta+\gamma$. □

五 R 中的乘法

在定义 R 中乘法之前先介绍一个与引理 3 相类似的定理.

定理 7 对任何分划 $\alpha=(A,A')>0$ 及任何有理数 $k>1$，存在 $a\in A$，$a'\in A'$ 使 $\dfrac{a'}{a}=k$.

证 与引理 3 的证明相仿，只须将那里的等差序列改用等比序列 $\{ck^n\}$ 就可以了. □

定义 5 设 $\alpha=(A,A')$，则在 A，A' 两类中有一个且仅有一个不包含 0，也就是说该类中元素皆同号，我们称这个类为分划 α 的**同号类**，记作 $\widetilde{A}$.

由定义 5 可见，当 $\alpha>\mathbf{0}$ 时，其同号类是上类，当 $\alpha<\mathbf{0}$ 时，则下类为其同号

---

① 这里 $\mathbf{0}$ 表示 R 中零元，以区别 Q 中零元 0，当把 R 中零元等同于 Q 中零元后，就统一用 0 表示零元，下一段 R 中单位元也用同样的表示方式.

② 设 $\mathbf{0}_1$ 和 $\mathbf{0}_2$ 为两个零元，由于 $\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_2+\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_2$，所以零元是唯一的. 用同样的方法读者可证反元和下一段讲到的逆元也具有唯一性.

类,若 $\alpha=\mathbf{0}$,则不定.

定理 8(同号类的标志) $\mathbf{Q}$ 的不空子集 M 成为某分划的同号类的充要条件是:

1° M 中只含同号的数;

2° 若 $x\in M$,则对任何正有理数 h,$x(1+h)\in M$.

这个定理的证明读者容易自行推得.

定义 6 设 α 的同号类为 $\bar{A}$,β 的同号类为 $\bar{B}$,我们定义 $\alpha\cdot\beta$ 为 $\{x\cdot y\mid x\in\bar{A},y\in\bar{B}\}$,也就是 $\bar{A}\cdot\bar{B}$ 为其同号类的分划.

注意定义 6 中的 $\bar{A}\cdot\bar{B}$ 确实是某个分划的同号类.因为由定理 7(同号类的标志)知满足 1°是显然的.又若 $xy\in\bar{A}\cdot\bar{B}$,则由于 $(1+h)=\left(1+\frac{h}{2+h}\right)\cdot\left(1+\frac{h}{2}\right)$ 有

$$xy(1+h)=x\left(1+\frac{h}{2+h}\right)\cdot y\left(1+\frac{h}{2}\right).$$

由同号类标志右边属于 $\bar{A}\cdot\bar{B}$,故左边亦属于它,即 2°也满足.

定理 9 $\mathbf{R}$ 中的乘法具有下列性质:对任何 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$

1° $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$(交换律),$(\alpha\cdot\beta)\gamma=\alpha(\beta\cdot\gamma)$(结合律).

2° 同号相乘得正,异号相乘得负[①],乘 $\mathbf{0}$ 得 $\mathbf{0}$.

3° $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$(分配律).

4° 存在单位元 $\mathbf{1}$,它对任何 α 都有 $\alpha\cdot\mathbf{1}=\alpha$.

5° 对任何 $\alpha\neq\mathbf{0}$,存在逆元 α^{-1}使 $\alpha\cdot\alpha^{-1}=\mathbf{1}$.

6° 若 $\alpha<\beta$ 且 $\gamma>\mathbf{0}$,则 $\alpha\gamma<\beta\gamma$.

证 1°显然.

2° 易见当 α,β 同号时,有 $\alpha\cdot\beta\geqslant\mathbf{0}$,当 α,β 异号时,则有 $\alpha\cdot\beta\leqslant\mathbf{0}$.现在只须证明 α,β 均不为 $\mathbf{0}$ 时,$\alpha\cdot\beta\neq\mathbf{0}$.事实上,如果 $\alpha,\beta\neq\mathbf{0}$,则在 0 与 $\bar{A}$ 之间必存在某有理数 a,同样在 0 与 $\bar{B}$ 之间也必存在某有理数 b.因而 $a\cdot b$ 必在 0 与 $\bar{A}\cdot\bar{B}$ 之间,也就是说 $\alpha\cdot\beta\neq\mathbf{0}$.

3° (i) 先假定 α,β 同号,且 $\gamma\neq\mathbf{0}$.我们只须证明 $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$ 两边有相等的同号类即可.由于两个同号分划的和的同号类等于它们的同号类的和,因此有下列一连串的等式:

$$\begin{aligned}\overline{(A+B)C}&=\overline{(A+B)}\cdot\bar{C}=(\bar{A}+\bar{B})\cdot\bar{C}=\bar{A}\cdot\bar{C}+\bar{B}\cdot\bar{C}\\&=\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AC+BC}.\end{aligned}$$

---

① 同有理数一样,若 $\alpha>\mathbf{0}$,则称 α 为正元;若 $\alpha<\mathbf{0}$,则称 α 为负元.

这里只有中间那个等式需要说明一下，等式左边和右边的一般项分别为

$$(a+b)c \text{ 和 } ac_1+bc_2, \text{其中 } a\in\bar{A}, b\in\bar{B}, c, c_1, c_2, \in\bar{C}.$$

显然前者是后者的特例．但由于 a 与 b 同号，ac_1+bc_2 必然在 $(a+b)c_1$ 与 $(a+b)c_2$ 之间，故后者也是前者的特例．从而等式成立．

(ii) 对于一般情况，当 α,β,γ 和 $\alpha+\beta$ 皆不为 $\mathbf{0}$ 时，可如下证明．设 α,β 不是同号．对等式 $\alpha+\beta=(\alpha+\beta)$ 作移项得 $(\alpha+\beta)+(-\alpha)=\beta$ 或 $(\alpha+\beta)+(-\beta)=\alpha$．这两个式子中总有一个左边有两个同号的被加项，不妨设是其中第一式，那么对该式应用(i)并利用关系 $(-\alpha)\gamma=-\alpha\gamma$[①]再作一次移项就行了．若 $\alpha\beta$ 中有一个为 $\mathbf{0}$，那就更不成问题了．

4° 1^* 满足作为单位元的要求．事实上 1^* 的同号类为 $\{1+h\mid h\in\mathbf{Q}$ 且 $h>0\}$．设 $\bar{A}$ 为 α 的同号类，x 为 $\bar{A}$ 中任一数，$h>0$，则 $\bar{A}\cdot\bar{1}^*$ 之一般项为 $x(1+h)$．又由 $\bar{A}$ 为同号类，所以 $x(1+h)\in\bar{A}$，从而 $\bar{A}\cdot\bar{1}^*\subset\bar{A}$．另一方面，假设 $\bar{A}$ 无端，则对任何 $x\in\bar{A}$，存在 $x'\in\bar{A}$ 使 $\frac{x}{x'}>1$，从而 $x=x'\cdot\frac{x}{x'}$，这里 $\frac{x}{x'}\in\bar{1}^*$，故又有 $\bar{A}\subset\bar{A}\cdot\bar{1}^*$，这就推得 $\alpha\cdot 1^*=\alpha$．由于单位元的唯一性，今后将 $\mathbf{1}^*$ 写作 $\mathbf{1}$．

5° 设 $\alpha\neq\mathbf{0}$，且 α 的同号类为 $\bar{A}$．现在证明以

$$\bar{A}^{-1}=\{y^{-1}\mid y \text{ 在 } 0 \text{ 与 } \bar{A} \text{ 之间}\}$$

为同号类的分划满足逆元的要求．首先易见它是一个分划，暂把它写作 α^{-1}．对 $x\in\bar{A}$，$y^{-1}\in\bar{A}^{-1}$ 有 $xy^{-1}>1$，故 $\alpha\cdot\alpha^{-1}=\mathbf{1}$．又由引理 4 知存在 $x\in\bar{A}$，$y^{-1}\in\bar{A}^{-1}$，使 xy^{-1} 和 1 可接近到事先指定的任何程度．故 $\alpha\alpha^{-1}\leqslant\mathbf{1}$，从而等式成立．我们今后将 α 的逆元写作 α^{-1}．

6° 设 $\alpha<\beta$，由加法性质 4°两边各加 $-\alpha$ 得 $\beta-\alpha>\mathbf{0}$．由于过程可逆知道：$\alpha<\beta$ 当且仅当 $\beta-\alpha>\mathbf{0}$．因分配律对差也成立[②]，有 $(\beta-\alpha)\gamma=\beta\gamma-\alpha\gamma$．再由正乘正得正，故 $\beta\gamma-\alpha\gamma>\mathbf{0}$．从而又有 $\alpha\gamma<\alpha\beta\gamma$． □

六 R 作为 Q 的扩充

通过对应 $r\leftrightarrow r^*$，$\mathbf{Q}$ 与 $\mathbf{R}$ 的子集 $\mathbf{Q}^*$ 之间建立了一对一的映射．

定理 10 对于 $\mathbf{Q}$ 与 $\mathbf{R}$ 的子集 $\mathbf{Q}^*$ 之间的映射 $r\leftrightarrow r^*$ 具有如下性质：

1° 保序性 即 $a<b(a=b)$ 当且仅当 $a^*<b^*(a^*=b^*)$；

2° 保持加法和乘法两个运算，即

$$(a+b)^*=a^*+b^*,(a\cdot b)^*=a^*\cdot b^*.$$

① 这实际上是 $\alpha+\beta=\mathbf{0}$ 时的特例，它可由比较两边同号类而得到．

② $(\alpha-\beta)\gamma+\beta\gamma=[(\alpha-\beta)+\beta]\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma$，等式两边加 $(-\beta\gamma)$ 即得 $(\alpha-\beta)\gamma=\alpha\gamma-\beta\gamma$．

证　关于保序性是显然的,故只证后一结论.

关于加法,我们比较下类.由于

$$(a+b)^* \text{ 的下类} = \{z \mid z < a+b\},$$

$$a^* + b^* \text{ 的下类} = \{x+y \mid x<a, y<b\}.$$

因 $x<a$, $y<b$ 时有 $x+y<a+b$,故 $a^*+b^* \subset (a+b)^*$.另一方面,因任一 $z<a+b$ 恒可表示为 $z=\left(a-\dfrac{a+b-z}{2}\right)+\left(b-\dfrac{a+b-z}{2}\right)$,故相反的包含关系也成立.

关于乘法,比较它们的同号类.由于

$$(a\cdot b)^* \text{ 的同号类} = \{ab(1+h) \mid h>0\}.$$

$$a^*\cdot b^* \text{ 的同号类} = \{a(1+s) \mid s>0\}\cdot\{b(1+t) \mid t>0\}.$$

因 $(1+s)(1+t)>1$,故

$$a^*\cdot b^* \text{ 的同号类} \subset (a\cdot b)^* \text{ 的同号类}.$$

另一方面,因 $(1+h)=\left(1+\dfrac{h}{2+h}\right)\left(1+\dfrac{h}{2}\right)$,故相反的包含关系也成立.　□

这个定理说明,在这个映射下 $\mathbf{Q}$ 与 $\mathbf{Q}^*$ 具有同构关系,从而可以把它们等同起来,把 $\mathbf{R}$ 看作是 $\mathbf{Q}$ 的扩充,把无端分划称为**无理数**,称 $\mathbf{R}$ 为**实数集**.

最后一项工作是必须指出 $\mathbf{R}$ 中运算的唯一性.

定理 11　在 $\mathbf{R}$ 中的加、乘、求反元、求逆元等运算是唯一的,即从等价的分划出发,得到的结论也是等价的,且只能在有端分划的情形下出现形式上的差异.

证　仅就乘法来证明.设 $\bar{A}$, $\bar{B}$ 分别为 α, β 的同号类.为简便起见设 $\bar{A}$ 有端为 a, $\bar{B}$ 无端.我们证明 $\bar{A}\cdot\bar{B}=\bar{A}^\circ\bar{B}$(这里 $\bar{A}^\circ$ 表示去掉端的 $\bar{A}$).由于 $\bar{A}\cdot\bar{B}=a\cdot\bar{B}\cup\bar{A}^\circ\bar{B}$,所以只需指出 $a\cdot\bar{B}\subset\bar{A}^\circ\bar{B}$ 即可.事实上,对任一 $b\in\bar{B}$,由于 $\bar{B}$ 无端,故当 h 充分小时,$\dfrac{b}{1+h}\in\bar{B}$.又因 $a\cdot b=a(1+h)\dfrac{b}{1+h}$,而 $a(1+h)\in\bar{A}^\circ$,可见 $a\cdot b\in\bar{A}^\circ\bar{B}$.因此,只有 $\bar{A}$, $\bar{B}$ 皆无端时,$\bar{A}\cdot\bar{B}$ 才会比 $\bar{A}^\circ\cdot\bar{B}^\circ$ 多出一个 $a\cdot b$.　□

由于每一分划都是由它的下类或上类来确定的,因此,完全可由全体分划的下类(或上类)所组成集合 $\boldsymbol{R}'$ 来代替原来的分划集.不仅如此,当用下类(或上类)来定义实数时,也可以硬性规定统一的形式.如规定下类(或上类)一律无端来达到表示的唯一性.但不管采用哪一种方式,都可以相应地定义序和运算来达到相同的扩充目的.

七 实数的无限小数表示[①]

为了实用的目的,人们需要给实数一种方便的表示形式,使它既易于比较大小,又便于运算和估计以至达到任意精确的程度,无限小数就是这样的一种表示形式.

定理 12 对任一实数 $\gamma\in[0,1)$都唯一地对应着一个整数数列$\{c_n\}$,其中 c_n 为 $0,1,\cdots,9$ 中的某一数,且有无限个 $c_n<9$ 使得有理数列$\{a_n\}$,$a_n=0.c_1\cdots c_n$[②]满足不等式:

$$a_n \leqslant \gamma < a_n + 10^{-n}, n = 1,2,\cdots. \tag{2}$$

反之,任一满足上述关于 c_n 条件的整数数列$\{c_n\}$,必存在唯一实数 $\gamma\in[0,1)$,使不等式(2)成立.

证 首先证明,若实数 $\gamma\in[0,1)$,则存在整数数列$\{c_n\}$且满足不等式(2).为此,将闭区间$[0,1]$十等分,令 $0.c_1$ 为分点:$0,0.1,\cdots,0.9$(不考虑右端点)中不超过 γ 的最大数,于是 $0.c_1\leqslant\gamma<0.c_1+10^{-1}$.再对区间$[0.c_1,0.c_1+10^{-1}]$十等分,令 $0.c_1c_2$ 为分点:$0.c_1,0.c_11,\cdots,0.c_19$(不考虑右端点)中不超过 γ 的最大数,于是 $0.c_1c_2\leqslant\gamma<0.c_1c_2+10^{-2}$.照此无限进行下去,它的第 n 步便是(2)式.

还要证明在所有 c_n 中,必有无限多个小于 9.事实上,假如当 $n>r$ 后均有 $c_n=9$,则这时出现

$$a_n = 0.c_1\cdots c_r9\cdots9.$$

由于 $\gamma\geqslant a_n$,将有

$$\gamma - a_r \geqslant \frac{1}{10^r}\sum_{k=1}^{n-r}\frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^r}\left(1-\frac{1}{10^{n-r}}\right).$$

这表明当 n 充分大时上式右边可任意接近于 10^{-r},但由(2)$\gamma-a_r$ 应为小于 10^{-r}的定数,矛盾!

其次证明 γ 的存在性.设$\{c_n\}$满足定理中关于 c_n 的条件,显然$\{a_n\}$为递增数列.置 $a_n+10^{-n}=b_n$,则因

$$b_{n-1} - b_n = 10^{-(n-1)} - (c_n+1)10^{-n}\begin{cases} = 0, \text{当 } c_n = 9, \\ > 0, \text{当 } c_n < 9 \end{cases}$$

---

① 在本段中只用到实数域的性质(主要是阿基米德性和区间套定理),而与实数的具体定义方式无关.因此本段可独立阅读.

② 在此采取了通常十进位小数记法,即 $0.c_1\cdots c_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{10^k}$.

可知$[a_n,b_n]$, $n=1,2,\cdots$构成区间套.又因 $b_n-a_n=10^{-n}\to 0(n\to\infty)$,故由区间套定理存在唯一实数 γ,满足 $a_n\leqslant\gamma\leqslant b_n$, $n=1,2,\cdots$.但因有无限多个 $c_n<9$,从而$\{b_n\}$中无最小项.因此对任何 n, $\gamma\neq b_n$,这样就得到(2).

最后证明对应的唯一性.先证明不同实数对应不同的数列.事实上,若实数 γ,δ 都对应同一数列$\{c_n\}$,则由(2)可得不等式$|\gamma-\delta|<10^{-n}$对任何 n 成立,从而有 $\gamma=\delta$.再证明不同的数列为不同的实数所对应.设 γ 对应于$\{c_n\}$, δ 对应于$\{d_n\}$.如果当 $n<r$ 时, $c_n=d_n$,但 $c_r<d_r$,则由(2)有

$$\gamma<0.c_1\cdots c_r+10^{-r}\quad 及 \quad \delta\geqslant 0.c_1\cdots c_{r-1}d_r,$$

故由 $c_r<d_r$ 就得到$\gamma<\delta$.从而不同的数列对应的实数也不同. □

现在利用定理 11 的结果给$[0,1)$内的任一实数一种方便的记法:

$$\gamma=0.c_1c_2\cdots.$$

它不外乎是定理 11 中那一列不等式的缩写,有了这个记法,任何实数都可写作

$$\gamma=c_0+0.c_1c_2\cdots①, \tag{3}$$

其中 c_0 为整数.(3)式称为实数 γ 的无限小数表示,而有限小数

$$c_0+0.c_1\cdots c_n \quad 和 \quad c_0+0.c_1\cdots c_n+10^{-n}$$

分别称为 γ 的(n 阶)不足近似值和过剩近似值,它们一起构成足以确定 γ 的区间套.

八 无限小数四则运算的定义

我们将应用无限小数递增有界数列必“稳定”于某个小数这一重要性质来建立无限小数的四则运算.以下讨论的都是非负小数.

设

$$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots \tag{1}$$

是小数数列,若对所有 $k=1,2,\cdots$,有 $x_k\leqslant x_{k+1}$,数列(1)称为递增数列.若存在整数 M,使对于所有 $k=1,2,\cdots$,有 $x_k\leqslant M$,则称数列(1)有上界.

若数列的项 x_n 都是整数,并能找到 n_0,对于所有 $n>n_0$,有 $x_n=\xi$,则称数列稳定于 ξ.容易看出,若整数数列递增,并且有上界 M,那么这数列必稳定于某一整数 $\xi\leqslant M$.

现在考虑小数数列

$$\boldsymbol{a}_1=\alpha_{10}.\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\cdots$$

① 如果 c_n 从某项起均为 0,可将这些 0 省略而得到有限小数.又若 $c_0\geqslant 0$,还可简单地写作 $\gamma=c_0.c_1c_2\cdots$.

$$a_2 = \alpha_{20}.\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\cdots \tag{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n = \alpha_{n0}.\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(2)的右边相当于一个无限矩阵.

定义 7 若对任意 $k=0,1,2,\cdots$,(2)的第 k 列$\{\alpha_{nk}\}$稳定于 γ_k,则称数列(2)稳定于 $a=\gamma_0.\gamma_1\gamma_2\gamma_3\cdots$,记作

$$a_n \Rightarrow a, \tag{3}$$

其中 γ_0 是整数,$\gamma_k(k=1,2,\cdots)$是$\{0,1,2,\cdots,9\}$中某个数字.

定理 13 若递增数列(2)有上界 M,则数列必稳定于满足下列不等式的某个数 $\underline{a}$:

$$a_n \leqslant a \leqslant M \quad (n=1,2,3,\cdots). \tag{4}$$

证 由于矩阵(2)的零列也是递增的,而且有上界 M,因此零列的整数稳定于某一非负整数 $\gamma_0 \leqslant M$.现用归纳法来证明.假若已证明矩阵(2)中下标不大于 k 的各列分别稳定于 $\gamma_0.\gamma_1,\cdots,\gamma_k$,而且

$$\gamma_0.\gamma_1\cdots\gamma_k \leqslant M \quad (\gamma_1,\cdots,\gamma_k \text{ 是数字}).$$

现需证明(2)的第$(k+1)$列必稳定于某一数字 γ_{k+1},而且有不等式

$$\gamma_0.\gamma_1\cdots\gamma_k\gamma_{k+1} \leqslant M. \tag{5}$$

事实上,当 n_1 充分大时,且 $n>n_1$ 时,a_n 的小数表示可写为

$$a_n = \gamma_0.\gamma_1\cdots\gamma_k a_{n,k+1}a_{n,k+2}\cdots \leqslant M.$$

因为 a_n 是递增的,所以对上述 n,数字 $a_{n,k+1}(\leqslant 9)$递增,于是当 $n>n_2$(n_2 充分大)时,$\{a_{n,k+1}\}$将稳定于某一数字 γ_{k+1},而且

$$\gamma_0.\gamma_1\cdots\gamma_k\gamma_{k+1} \leqslant a_n \leqslant M \quad (n>n_2),$$

这就证明了不等式(5)和 $a_n \Rightarrow a=\gamma_0.\gamma_1\gamma_2\cdots$,于是可推出(4)中第二个不等式.

现证对所有 n,$a_n \leqslant a$. 若结论不成立,则可以找到自然数 n,使得 $a<a_n$.因此,对某个 k 有

$$a_n = \gamma_0.\gamma_1\cdots\gamma_k a_{n,k+1}a_{n,k+2}\cdots,$$

并且 $\gamma_{k+1}<a_{n,k+1}$. 当 n 无限增大时,$a_{n,k+1}$递增,并稳于数 γ_{k+1},由此得到 $\gamma_{k+1}<\gamma_{k+1}$的矛盾. □

给定两个小数 $x=\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots$,$y=\beta_0.\beta_1\beta_2\cdots$,用 $x^{(n)}$表示 x 的 n 位不足近似值,则 $x^{(n)}+y^{(n)}=\alpha_0.\alpha_1\cdots\alpha_n+\beta_0.\beta_1\cdots\beta_n$.

定理 14 在上述记号下,

$$\begin{aligned}&x^{(n)}+y^{(n)};\\&(x^{(n)}\cdot y^{(n)})^{(n)};\\&x^{(n)}-(y^{(n)}+10^{-n})\quad(x>y>0),\\&\left(\frac{x^{(n)}}{y^{(n)}+10^{-n}}\right)^{(n)}\quad(y>0)\end{aligned}\tag{6}$$

都是递增有界数列,所以分别稳定于某个数.

证　由于

$$x^{(n)}+y^{(n)}\leqslant\alpha_0+1+\beta_0+1;$$
$$(x^{(n)}y^{(n)})^{(n)}\leqslant(\alpha_0+1)(p_0+1);$$
$$x^{(n)}-(y^{(n)}+10^{-n})\leqslant\alpha_0+1;$$
$$\left(\frac{x^{(n)}}{y^{(n)}+10^{-n}}\right)^{(n)}\leqslant\frac{\alpha_0+1}{\beta_0.\beta_1\cdots\beta_s}\quad(\text{其中 } s \text{ 使得} \beta_s>0),$$

因此所有数列都是有界的,因为当 n 增大时,$x^{(n)}$递增,$y^{(n)}+10^{-n}$递减,易见(6)中各数列是递增的.由定理13,即有(6)中各数列稳定于某个数.　□

定义 8　对任意两个无限小数 x,y,我们定义 $x+y,x\cdot y,x-y$ 为

$$x^{n}+y^{(n)}\Rrightarrow x+y;$$
$$(x^{(n)}\cdot y^{(n)})^{(n)}\Rrightarrow x\cdot y;$$
$$x^{(n)}-(y^{(n)}+10^{-n})\Rrightarrow x-y\quad(x>y>0);$$
$$\left(\frac{x^{(n)}}{y^{(n)}+10^{-n}}\right)^{(n)}\Rrightarrow\frac{x}{y}\quad(y>0).$$

由此可知:当 $x>y>0$ 时,必存在 n,使得 $x^{(n)}-(y^{(n)}+10^{-n})>0$.

附录Ⅲ　积　分　表

一　含有 x^n 的形式

1. $\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

2. $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

二　含有 $a+bx$ 的形式

3. $\int \frac{x}{a+bx}\mathrm{d}x = \frac{1}{b^2}(bx - a\ln|a+bx|) + C$

4. $\int \frac{x}{(a+bx)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a+bx} + \ln|a+bx|\right) + C$

5. $$\int \frac{x}{(a+bx)^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{b^2}\left[\frac{-1}{(n-2)(a+bx)^{n-2}} + \frac{a}{(n-1)(a+bx)^{n-1}}\right] + C, n \neq 1,2$$

6. $\int \frac{x^2}{a+bx}\mathrm{d}x = \frac{1}{b^3}\left[\frac{bx}{2}(2a-bx) + a^2\ln|a+bx|\right] + C$

7. $\int \frac{x^2}{(a+bx)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{b^3}\left(bx - \frac{a^2}{a+bx} - 2a\ln|a+bx|\right) + C$

8. $\int \frac{x^2}{(a+bx)^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{b^3}\left[\frac{2a}{a+bx} - \frac{a^2}{2(a+bx)^2} + \ln|a+bx|\right] + C$

9. $$\int \frac{x^2}{(a+bx)^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{b^3}\left[\frac{-1}{(n-3)(a+bx)^{n-3}} + \frac{2a}{(n-2)(a+bx)^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)(a+bx)^{n-1}}\right] + C, n \neq 1,2,3$$

10. $\int \frac{1}{x(a+bx)}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+bx}\right| + C$

11. $\int \frac{1}{x(a+bx)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a+bx} + \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+bx}\right|\right) + C$

12. $\int \frac{1}{x^2(a+bx)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{x} + \frac{b}{a}\ln\left|\frac{x}{a+bx}\right|\right) + C$

13. $\int \frac{1}{x^2(a+bx)^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a^2}\left[\frac{a+2bx}{x(a+bx)} + \frac{2b}{a}\ln\left|\frac{x}{a+bx}\right|\right] + C$

三 含有 $a^2 \pm x^2, a>0$ 的形式

14. $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

15. $\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

16. $\int \frac{1}{(a^2 \pm x^2)^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{x}{(a^2 \pm x^2)^{n-1}}\right.$

$\left. + (2n-3)\int \frac{1}{(a^2 \pm x^2)^{n-1}}\mathrm{d}x\right], n \neq 1$

四 含有 $a+bx+cx^2, b^2 \neq 4ac$ 的形式

17. $\int \frac{1}{a+bx+cx^2}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C, \quad b^2<4ac$

$= \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| + C, \quad b^2>4ac$

18. $\int \frac{x}{a+bx+cx^2}\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2c}\left(\ln|a+bx+cx^2| - b\int \frac{1}{a+bx+cx^2}\mathrm{d}x\right)$

五 含有 $\sqrt{a+bx}$ 的形式

19. $\int x^n\sqrt{a+bx}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{b(2n+3)}$

$\cdot \left[x^n(a+bx)^{3/2} - na\int x^{n-1}\sqrt{a+bx}\,\mathrm{d}x\right]$

20. $\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right| + C, a>0$

$= \frac{2}{\sqrt{-a}}\arctan\sqrt{\frac{a+bx}{-a}} + C, a<0$

21. $\int \frac{1}{x^n\sqrt{a+bx}}\mathrm{d}x = \frac{-1}{a(n-1)}\left[\frac{\sqrt{a+bx}}{x^{n-1}}\right.$

$$+\frac{b(2n-3)}{2}\int\frac{1}{x^{n-1}\sqrt{a+bx}}\mathrm{d}x\Big],n\neq 1$$

22. $\int\frac{\sqrt{a+bx}}{x}\mathrm{d}x=2\sqrt{a+bx}+a\int\frac{1}{x\sqrt{a+bx}}\mathrm{d}x$

23. $\int\frac{\sqrt{a+bx}}{x^n}\mathrm{d}x=\frac{-1}{a(n-1)}\Big[\frac{(a+bx)^{3/2}}{x^{n-1}}$

$$+\frac{(2n-5)b}{2}\int\frac{\sqrt{a+bx}}{x^{n-1}}\mathrm{d}x\Big],n\neq 1$$

24. $\int\frac{x}{\sqrt{a+bx}}\mathrm{d}x=\frac{-2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx}+C$

25. $\int\frac{x^n}{\sqrt{a+bx}}\mathrm{d}x=\frac{2}{(2n+1)b}\left(x^n\sqrt{a+bx}-na\int\frac{x^{n-1}}{\sqrt{a+bx}}\mathrm{d}x\right)$

六 含有$\sqrt{x^2\pm a^2}$,$a>0$的形式

26. $\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm a^2\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|\right)+C$

27. $\int x^2\sqrt{x^2\pm a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}[x(2x^2\pm a^2)\sqrt{x^2\pm a^2}$

$$-a^4\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|]+C$$

28. $\int\frac{1}{x}\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{x^2+a^2}-a\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right|+C$

29. $\int\frac{1}{x}\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{x^2-a^2}-a\cdot\arccos\frac{a}{x}+C$

30. $\int\frac{1}{x^2}\sqrt{x^2\pm a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{-1}{x}\sqrt{x^2\pm a^2}+\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$

31. $\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$

32. $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2\pm a^2}\mp a^2\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|)+C$

33. $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C$

34. $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\frac{-1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right|+C$

35. $\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x=\mp\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{a^2x}+C$

36. $\int \frac{1}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} dx = \frac{\pm x}{a^2 \sqrt{x^2 \pm a^2}} + C$

七 含有$\sqrt{a^2 - x^2}$，$a > 0$ 的形式

37. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C$

38. $\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{8}\left[x(2x^2 - a^2)\sqrt{a^2 - x^2} + a^4 \arcsin \frac{x}{a} \right] + C$

39. $\int \frac{1}{x} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + C$

40. $\int \frac{1}{x^2} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{-1}{x} \sqrt{a^2 - x^2} - \arcsin \frac{x}{a} + C$

41. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$

42. $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{-1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + C$

43. $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{-\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C$

44. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{1}{2}\left(-x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C$

45. $\int \frac{1}{(a^2 - x^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} + C$

八 含有 sin x 或 cos x 的形式

46. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

47. $\int \cos x dx = \sin x + C$

48. $\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$

49. $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$

50. $\int \sin^n x dx = \frac{1}{n}\left[-\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx \right]$

51. $\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\left[\cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x dx \right]$

52. $\int x\sin x\mathrm{d}x = \sin x - x\cos x + C$

53. $\int x\cos x\mathrm{d}x = \cos x + x\sin x + C$

54. $\int x^n\sin x\mathrm{d}x = -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x\mathrm{d}x$

55. $\int x^n\cos x\mathrm{d}x = x^n\sin x - n\int x^{n-1}\sin x\mathrm{d}x$

56. $\int \frac{1}{1 \pm \sin x}\mathrm{d}x = \tan x \mp \sec x + C$

57. $\int \frac{1}{1 \pm \cos x}\mathrm{d}x = -\cot x \pm \csc x + C$

58. $\int \frac{1}{\sin x\cos x}\mathrm{d}x = \ln|\tan x| + C$

九 含有 tan *x*,cot *x*,sec *x*,csc *x* 的形式

59. $\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$

60. $\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$

61. $\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$

62. $\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$

63. $\int \tan^2 x\mathrm{d}x = -x + \tan x + C$

64. $\int \cot^2 x\mathrm{d}x = -x - \cot x + C$

65. $\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$

66. $\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$

67. $\int \tan^n x\mathrm{d}x = \frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - \int \tan^{n-2}x\mathrm{d}x,\quad n \neq 1$

68. $\int \cot^n x\mathrm{d}x = -\frac{\cot^{n-1}x}{n-1} - \int \cot^{n-2}x\mathrm{d}x, n \neq 1$

69. $\int \sec^n x\mathrm{d}x = \frac{\sec^{n-2}x\tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\mathrm{d}x,\quad n \neq 1$

70. $\int \csc^n x\mathrm{d}x = -\frac{\csc^{n-2}x\cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2}x\mathrm{d}x, n \neq 1$

71. $\int \frac{1}{1 \pm \tan x} dx = \frac{1}{2}(x \pm \ln|\cos x \pm \sin x|) + C$

72. $\int \frac{1}{1 \pm \cot x} dx = \frac{1}{2}(x \mp \ln|\sin x \pm \cos x|) + C$

73. $\int \frac{1}{1 \pm \sec x} dx = x + \cot x \mp \csc x + C$

74. $\int \frac{1}{1 \pm \csc x} dx = x - \tan x \pm \sec x + C$

十 含有反三角函数的形式

75. $\int \arcsin x dx = x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$

76. $\int \arccos x dx = x\arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C$

77. $\int \arctan x dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$

78. $\int \operatorname{arccot} x dx = x\operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$

79. $\int \operatorname{arcsec} x dx = x\operatorname{arcsec} x - \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$

80. $\int \operatorname{arccsc} x dx = x\operatorname{arccsc} x + \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$

81. $\int x\arcsin x dx = \frac{1}{4}[x\sqrt{1 - x^2} + (2x^2 - 1)\arcsin x] + C$

82. $\int x\arccos x dx = \frac{1}{4}[-x\sqrt{1 - x^2} + (2x^2 - 1)\arccos x] + C$

83. $\int x\arctan x dx = \frac{1}{2}[(1 + x^2)\arctan x - x] + C$

84. $\int x\operatorname{arccot} x dx = \frac{1}{2}[(1 + x^2)\operatorname{arccot} x + x] + C$

十一 含有 e^x 的形式

85. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

86. $\int e^x dx = e^x + C$

87. $\int xe^x dx = (x - 1)e^x + C$

88. $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx$

89. $\int \frac{1}{1+e^x}dx = x - \ln(1+e^x) + C$

90. $\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C$

91. $\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C$

十二 含有 $\ln x$ 的形式

92. $\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$

93. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 4\sqrt{x}(\ln\sqrt{x} - 1) + C$

94. $\int x\ln x dx = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$

95. $\int x^n\ln x dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln x - 1] + C,\quad n \neq -1$

96. $\int (\ln x)^2 dx = x[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2] + C$

97. $\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}dx$

98. $\int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$

99. $\int \cos(\ln x)dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + C$

100. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$

习 题 答 案

第一章　实数集与函数

§1　实　　数

4. 当 $x=\pm 1$ 时等号成立.

9. (1) 当 $a<b$ 时，$x<\dfrac{a+b}{2}$；当 $a>b$ 时，$x>\dfrac{a+b}{2}$；

(2) 当 $a>b$ 时，$x>\dfrac{a+b}{2}$；

(3) 当 $a\geqslant b>0$ 时，$\sqrt{a-b}<|x|<\sqrt{a+b}$；当 $|a|<b$ 时，$|x|<\sqrt{a+b}$.

§2　数集·确界原理

1. (1) $x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$；

(2) $x\in[-3-\sqrt{8},-3+\sqrt{8}]\cup[3-\sqrt{8},3+\sqrt{8}]$；

(3) $x\in(a,b)\cup(c,+\infty)$；

(4) $x\in\left[\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\dfrac{3}{4}\pi+2k\pi\right]$，$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$.

4. (1) $\sup S=\sqrt{2}$，$\inf S=-\sqrt{2}$；(2) $\sup S=+\infty$，$\inf S=1$；

(3) $\sup S=1$，$\inf S=0$；(4) $\sup S=1$，$\inf S=\dfrac{1}{2}$.

§3　函 数 概 念

3. $f_1(x)=\begin{cases}4x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ 4-4x, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1;\end{cases}$　$f_2(x)=\begin{cases}16x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{4},\\ 8-16x, & \dfrac{1}{4}<x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ 0, & \dfrac{1}{2}.\end{cases}$

4. (1) $(-\infty,+\infty)$；(2) $(10,+\infty)$；(3) $[1,100]$；(4) $(0,10]$.

5. (1) $-1,2,2$；(2) $2^{\Delta x}-2,-\Delta x$.

6. $\frac{1}{3+x},\frac{1}{1+2x},\frac{1}{1+x^2},\frac{1+x}{2+x},\frac{1}{2+x}$.

7. (1) $y=u^{20},u=1+x$;(2) $y=u^2,u=\arcsin v,v=x^2$;

(3) $y=\lg u,u=1+v,v=\sqrt{w},w=1+x^2$;(4) $y=2^u,u=v^2,v=\sin x$.

10. (1) 成立;(2) 不成立.

§4 具有某些特性的函数

4. (1) 偶;(2) 奇;(3) 偶;(4) 奇.

5. (1) π;(2) $\frac{\pi}{3}$;(3) 12π.

总 练 习 题

2. 是初等函数.(提示:利用第 1 题的结果.)

3. $\frac{1+x}{1-x},-\frac{x}{2+x},\frac{2}{1+x},\frac{x-1}{x+1},\frac{1+x}{1-x},\frac{1-x^2}{1+x^2},x$.

4. $\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$.

5. (1) $y=\left[\frac{x+2}{5}\right],x=30,31,\cdots,50$;(2) $y=[x+0.5],x>0$.

14. (1) (i) $f(x)=\begin{cases}\sin x+1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \sin x-1, & x<0,\end{cases}$ (ii) $f(x)=\begin{cases}\sin x+1, & x\geqslant 0,\\ 1-\sin x, & x<0;\end{cases}$

(2) (i) $f(x)=\begin{cases}x^3, & x<-1,\\ -1+\sqrt{1-x^2}, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1-\sqrt{1-x^2}, & 0<x\leqslant 1,\\ x^3, & x>1,\end{cases}$ (ii) $f(x)=\begin{cases}-x^3, & x<-1,\\ 1-\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1,\\ x^3, & x>1.\end{cases}$

第二章 数 列 极 限

§1 数列极限概念

3. (1) 0,无穷小数列;(2) 1;(3) 0,无穷小数列;

(4) 0,无穷小数列;(5) 0,无穷小数列;(6) 1;(7) 1.

§2 收敛数列的性质

1. (1) $\frac{1}{4}$;(2) 0;(3) $\frac{1}{3}$;(4) $\frac{1}{2}$; (5) 10;(6) 2.

4. (1) 1;(2) 2;(3) 3;(4) 1;(5) 0;(6) 1.

8. (1) $0\left(\text{提示:先证明}\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$;

(2) $1\left(\text{提示:}n!<\sum_{p=1}^{n}p!<(n-2)(n-2)!+(n-1)!+n!<2(n-1)!+n!\right)$;

(3) 0(提示:先证明$0<(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\leqslant n^{\alpha-1}$);

(4) $\frac{1}{1-\alpha}$(提示:记$p_n=(1+\alpha)(1+\alpha)^2\cdots(1+\alpha)^{2^n}$,则$(1-\alpha)p_n=1-\alpha^{2^{n+1}}$).

§3 数列极限存在的条件

1. (1) $\frac{1}{e}$;(2) e; (3) e;(4) $\sqrt{e}$;(5) 1.

3. (1) 2;(2) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4c})$;(3) 0.

总练习题

1. (1) 3;(2) 0;(3) 0.

第三章 函数极限

§1 函数极限概念

6. (1) $f(0-0)=-1,f(0+0)=1$;(2) $f(0-0)=-1,f(0+0)=0$;
(3) $f(0-0)=f(0+0)=1$.

§2 函数极限的性质

1. (1) $2-\frac{\pi^2}{2}$;(2) 1;(3) $\frac{2}{3}$;(4) -3;(5) $\frac{n}{m}$;(6) $\frac{4}{3}$;(7) $\frac{1}{2a}$; (8) $\frac{3^{70}8^{20}}{5^{90}}$.

2. (1) 1;(2) 0.

4. $m<n$ 时,0;$m=n$ 时,$\frac{a_0}{b_0}$.

8. (1) -1;(2) 1;(3) $\frac{n(n+1)}{2}$;(4) $\frac{1}{n}$;(5) 1.

§4 两个重要极限

1. (1) 2;(2) 0;(3) -1;(4) 1;(5) $\frac{1}{2}$;(6) 1;(7) 1;(8) $\sin 2a$;(9) 8;(10) $\sqrt{2}$.

2. (1) e^2;(2) e^{α};(3) e; (4) e^2; (5) e^2; (6) $e^{\alpha\beta}$.

4. (1) 0;(2) e.

§5 无穷小量与无穷大量

2. (1) 0;(2) 1.

4. (1) $y=0,x=0$;(2) $y=\frac{\pi}{2},y=-\frac{\pi}{2}$;

   (3) $y=3x+6,x=0,x=2$.

5. (1) 3;(2) 2;(3) 1;(4) $\frac{2}{5}$.

6. (1) $\frac{5}{2}$;(2) 2;(3) $\frac{1}{2}n(n+1)$.

总练习题

1. (1) 1;(2) $\frac{1}{2}$;(3) $a+b$;

   (4) 1;(5) -1;(6) $\frac{3}{2}$;(7) $\frac{1}{2}(m-n)$.

2. (1) $a=1,b=-1$;(2) $a=-1,b=\frac{1}{2}$;(3) $a=1,b=-\frac{1}{2}$.

8. (1) $+\infty$;(2) 0.

10. (1) $+\infty$;(2) $+\infty$.

第四章 函数的连续性

§1 连续性概念

2. (1) $x=0$,第二类间断点;(2) $x=0$,跳跃间断点;

(3) $x=n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,可去间断点;(4) $x=0$,可去间断点;(5) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,跳跃间断点;(6) 除 $x=0$ 外每一点都是第二类间断点;(7) $x=-7$ 为第二类间断点,$x=1$ 为跳跃间断点.

§2 连续函数的性质

1. (1) $f\circ g$ 处处连续,$g\circ f$,$x=0$ 为可去间断点;

   (2) $f\circ g$,$x=-1,0,1$ 为跳跃间断点,$g\circ f$ 处处连续.

8. (1) $\frac{3}{4}\pi$;(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

§3 初等函数的连续性

1. (1) 6;(2) $\frac{1}{2}$;(3) 1;(4) 1;(5) e.

第五章 导数与微分

§1 导数概念

1. $\Delta t=1;\bar{v}=55;\Delta t=0.1,\bar{v}=50.5;\Delta t=0.01;\bar{v}=50.05;v=50.$

2. 在时间 t 时刻所对应的旋转角 $\Phi(t)$,则角速度为 $\omega(t)=\dfrac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}$.

3. 4.

4. $a=6,b=-9$.

5. (1) $(1,0)$;(2) $\left(\dfrac{1}{2},-\ln 2\right)$.

6. (1) 切线方程:$y=x-1$,法线方程:$y=-x+3$;

   (2) 切线方程:$y=1$,法线方程:$x=0$.

7. (1) $f'(x)=\begin{cases}3x^2, & x\geqslant 0,\\ -3x^2, & x<0;\end{cases}$ (2) $f'(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ \text{不存在}, & x=0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

8. (1) $m\geqslant 1$;(2) $m\geqslant 2$;(3) $m\geqslant 3$.

9. (1) $k\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$; (2) $x=1$.

11. 0.

15. $\pi-\arctan\dfrac{2}{5}$.

§2 求导法则

1. (1) $f'(0)=0$, $f'(1)=18$;

   (2) $f'(0)=1,f'(\pi)=-1$; (3) $f'(1)=\dfrac{1}{4\sqrt{2}};f'(4)=\dfrac{1}{8\sqrt{3}}$.

2. (1) $y'=6x$; (2) $y'=\dfrac{-x^2-4x-1}{(x^2+x+1)^2}$; (3) $y'=n(x^{n-1}+1)$;

   (4) $y'=\dfrac{1}{m}-\dfrac{m}{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$; (5) $y'=3x^2\log_3 x+\dfrac{x^2}{\ln 3}$;

   (6) $y'=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)$; (7) $y'=-18x^5+5x^4-12x^3-12x^2-2x+3$;

   (8) $y'=\dfrac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}$; (9) $\dfrac{1-\cos x-x\sin x}{(1-\cos x)^2}$;

   (10) $y'=\dfrac{2}{x(1-\ln x)^2}$; (11) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\arctan x+\dfrac{\sqrt{x}+1}{1+x^2}$;

   (12) $y'=\dfrac{2x(\sin x+\cos x)-(x^2+1)(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$.

3. (1) $y'=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; (2) $y'=6x(x^2-1)^2$;

(3) $y'=3\cdot\frac{(1+x^2)^2(1+2x-x^2)}{(1-x)^4}$; (4) $y'=\frac{1}{x\ln x}$;

(5) $y'=\cot x$; (6) $y'=\frac{2x+1}{x^2+x+1}\cdot\frac{1}{\ln 10}$;

(7) $y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; (8) $y'=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$;

(9) $y'=3\cos 2x(\sin x+\cos x)$; (10) $y'=-6\cos 4x\sin 8x$;

(11) $y'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cos\sqrt{1+x^2}$; (12) $y'=6x\sin^2 x^2\cos x^2$;

(13) $y'=\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$; (14) $y'=\frac{6x^2}{1+x^6}\arctan x^3$;

(15) $y'=\frac{-1}{1+x^2}$; (16) $y'=\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$;

(17) $y'=e^{x+1}$; (18) $y'=\ln 2\cdot 2^{\sin x}\cos x$;

(19) $y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$; (20) $y'=x^{x^x}x^x\left[\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{x}\right]$;

(21) $y'=e^{-x}[2\cos 2x-\sin 2x]$;

(22) $y'=\frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$;

(23) $y'=\cos(\sin(\sin x))\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos x$;

(24) $y'=\cos\left(\frac{x}{\sin\left(\frac{x}{\sin x}\right)}\right)\frac{\sin\left(\frac{x}{\sin x}\right)-x\cos\left(\frac{x}{\sin x}\right)\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}}{\sin^2\left(\frac{x}{\sin x}\right)}$;

(25) $y'=\left(\prod_{j=1}^{n}(x-a_j)^{a_j}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x-a_k}\right)$;

(26) $y'=\frac{\cos x}{|a+b\sin x||\cos x|}$.

4. (1) $f'(x)=3x^2$, $f'(x+1)=3(x+1)^2$, $f'(x-1)=3(x-1)^2$;

(2) $f'(x)=3(x-1)^2$, $f'(x+1)=3x^2$, $f'(x-1)=3(x-2)^2$;

(3) $f'(x)=3(x+1)^2$, $f'(x+1)=3(x+1)^2$, $f'(x-1)=3(x-1)^2$.

5. (1) $f'(x)=g'(x+g(a))$; (2) $f'(x)=g'(x+g(x))(1+g'(x))$;

(3) $f'(x)=g'(xg(a))\cdot g(a)$;

(4) $f'(x)=g'(xg(x))(g(x)+xg'(x))$.

8. (1) $y'=3\mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{ch}\, x$; (2) $y'=\mathrm{sh}(\mathrm{sh}\, x)\mathrm{ch}\, x$;

(3) $y'=\mathrm{th}\, x$; (4) $y'=\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x+\mathrm{ch}^2 x}$.

9. (1) $y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; (2) $y'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

(3) $y'=\frac{1}{1-x^2}(|x|<1)$;　(4) $y'=\frac{1}{1-x^2}(|x|>1)$;

(5) $y'=0$;　(6) $y'=|\sec x|$.

§3 参变量函数的导数

1. (1) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=0$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\infty$;

(2) $\frac{dy}{dx}=-2$.

2. (1) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=1$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi}=0$.

3. (1) 切线方程 $y=\frac{1}{2}x$, 法线方程 $y=-2x$;

(2) $2y-(2-\sqrt{2})x=\frac{3}{2}\sqrt{2}-2$, $2x+(2-\sqrt{2})y=\frac{3}{2}\sqrt{2}-1$.

6. $\frac{1}{2}(\varphi-\pi)$.

§4 高阶导数

1 (1) $y''(1)=26$, $y'''(1)=18$, $y^{(4)}(1)=0$;

(2) $f''(0)=0$, $f''(1)=-\frac{3}{4\sqrt{2}}$, $f''(-1)=\frac{3}{4\sqrt{2}}$.

3. (1) $f''(x)=\frac{1}{x}$;　(2) $f'(x)=4xe^{-x^2}(3-2x^2)$;

(3) $f^{(5)}(x)=\frac{24}{(1+x)^5}$;　(4) $f^{(10)}(x)=e^x(x^3+30x^2+270x+720)$.

4. (1) $y''=\frac{1}{x^2}[f''(\ln x)-f'(\ln x)]$;

(2) $y''=n(n-1)x^{n-2}f'(x^n)+(nx^{n-1})^2f''(x^n)$;

(3) $y''=f''(f(x))(f'(x))^2+f'(f(x))f''(x)$.

5. (1) $y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$;　(2) $y^{(n)}=a^x\ln^n a$;

(3) $y^{(n)}=n!\left(\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}+\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right)$;

(4) $y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!\left(\ln x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}{x^{n+1}}$;

(5) $y^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$;

(6) $y^{(n)}=(a^2+b^n)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+n\varphi_0)$, $\varphi_0=\arctan\frac{b}{a}$.

6. (1) $y''=\dfrac{1}{3a\sin t\cos^4 t}$.

(2) $y''=\dfrac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}$.

7. $f'(x)=\begin{cases}3x^2, & x\geqslant 0,\\ -3x^2, & x<0,\end{cases}$ $f''(x)=\begin{cases}6x, & x\geqslant 0,\\ -6x, & x<0,\end{cases}$

$f'''(x)=\begin{cases}3, & x>0,\\ \text{不存在}, & x=0,\\ -3, & x<0.\end{cases}$

8. $(f^{-1})'''(y)=\dfrac{3f''(x)^2-f'(x)f'''(x)}{f'(x)^5}$.

9. (2) $y^{(2m)}|_{x=0}=0$, $y^{(2m+1)}|_{x=0}=(-1)^m(2m)!$.

10. (2) $y^{(2m)}|_{x=0}=0$, $y^{(2m+1)}|_{x=0}=[(2m-1)!!]^2$.

§5 微 分

1. 当 $\Delta x=0.1$, $dy=0.2$, 当 $\Delta x=0.01$, $dy=0.02$.
2. (1) $dy=(1+4x-x^2+4x^3)dx$; (2) $dy=\ln x dx$;

(3) $dy=(2x\cos 2x-2x^2\sin 2x)dx$; (4) $dy=\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}dx$;

(5) $dy=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)dx$; (6) $dy=-\operatorname{sgn} x\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. (1) 1.007; (2) 1.043 4; (3) 1.005 8; (4)5.1.
4. 0.33%.
5. 弦长.

总 练 习 题

6. $f'_+(a)=\varphi(a)$, $f'_-(a)=-\varphi(a)$, 当 $\varphi(a)=0$, $f'(a)$存在且等于零.
7. (1) $y'=e^{f(x)}(f'(e^x)e^x+f(e^x)f'(x))$;

(2) $y'=f'(f(f(x)))f'(f(x))f'(x)$.

8. (1) $y'=\dfrac{\varphi'(x)\varphi(x)+\psi'(x)\psi(x)}{\sqrt{(\varphi(x))^2+(\psi(x))^2}}(\varphi^2(x)+\psi^2(x)\neq 0)$, $y'=0(\varphi^2(x)+\psi^2(x)=0)$;

(2) $y'=\dfrac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$;

(3) $y'=\dfrac{\psi'(x)\varphi(x)\ln\varphi(x)-\varphi'(x)\psi(x)\ln\psi(x)}{\varphi(x)\psi(x)\ln^2\varphi(x)}$.

9. (1) $F'(x)=3(x^2+5)$; (2) $F'(x)=6x^2$.

第六章 微分中值定理及其应用

§2 柯西中值定理和不定式极限

5. (1) 1; (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; (3) 1; (4) 2;

(5) 1; (6) $\frac{1}{2}$; (7) 1; (8) $\frac{1}{e}$;

(9) 1; (10) 0; (11) $-\frac{1}{3}$; (12) $e^{\frac{1}{3}}$;

7. (1) $-\frac{4}{\pi^2}$; (2) 0; (3) 1; (4) e^{-1};

(5) $\frac{1}{2}$; (6) 0; (7) $-\frac{e}{2}$ (8) e^{-1}.

§3 泰勒公式

1. (1) $f(x)=1-\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}x^n+o(x^n)$;

(2) $f(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+o(x^5)$;

(3) $f(x)=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$.

2. (1) $\frac{1}{3}$; (2) $\frac{1}{2}$; (3) $\frac{1}{3}$.

3. (1) $f(x)=10+11(x-1)+7(x-1)^2+(x-1)^3$;

(2) $f(x)=1-x^2+x^2+\cdots+(-1)^{n-1}x^n+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}, 0<\theta<1$.

4. (1) $|R_4(x)|\leqslant\frac{1}{2^5\cdot 5!}$; (2) $|R_2(x)|\leqslant\frac{1}{16}$.

5. (1) 取 $n=12$, $e\approx 2.718\,281\,828$; (2) 1.041 39.

§4 函数的极值与最大最小值

(1) 极大值 $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{16}$; (2) 极小值 $f(-1)=-1$,极大值 $f(1)=1$;

(3) 极小值 $f(1)=0$,极大值 $f(e^2)=\frac{4}{e^2}$;

(4) 极大值 $f(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$.

5. (1) 最小值 $f(-1)=-10$,最大值 $f(1)=2$;

(2) 最大值 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$，无最小值；

(3) 最小值 $f(e^{-2})=-\frac{2}{e}$.

6. 边长为$\frac{l}{2}$.

7. 半径与高之比为 1:1.

8. 取 $x=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

9. 取 $a=1$.

10. (1) 极小值 $f(0)=f(\pm 1)=0$，极大值 $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}}$；

(2) 极大值 $f(1)=2$，极小值 $f(-1)=-2$；

(3) 极小值 $f(1)=0$，极大值 $f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{3\ 456}{3\ 125}$.

11. $a=-\frac{2}{3}$，$b=-\frac{1}{6}$，x_1 极小值点，x_2 极大值点.

12. $(p,\pm\sqrt{2}p)$.

13. $\frac{a\alpha}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}$.

§5 函数的凸性与拐点

1. (1) 凹区间$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$，凸区间$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，拐点$\left(\frac{1}{2},\frac{13}{2}\right)$；

(2) 凹区间$(-\infty,0)$，凸区间$(0,+\infty)$；

(3) 凹区间$(-1,0)$，凸区间$(-\infty,-1)$，$(0,+\infty)$，拐点$(-1,0)$；

(4) 凹区间$(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$，凸区间$(-1,1)$，拐点$(\pm 1,\ln 2)$；

(5) 凹区间$\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，凸区间$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$，拐点$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{3}{4}\right)$.

2. $a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{9}{2}$.

§6 函数图象的讨论

(1)

x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-2)$	-2	$(-2,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y	增凹 ↗	极大值 $f(-5)=80$	减凹 ↘	拐点 $(-2,26)$	减凸 ↘	极小值 $f(1)=-28$	增凸 ↗

(2)

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	+	0	−	+	0	+
y''	−	−	−	−	0	+
y	增凹 ↗	极大值 $-\frac{27}{8}$	减凹 ↘	增凹 ↗	拐点 $(0,0)$	增凸 ↗

渐近线 $x=-1$, $y=\frac{1}{2}x-1$;

(3)

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y	增凹 ↗	极大值 $f(-1)=-1+\frac{\pi}{2}$	减凹 ↘	拐点 $(0,0)$	减凸 ↘	极小值 $f(1)=1-\frac{\pi}{2}$	增凸 ↗

渐近线 $y=x-\pi$, $y=x+\pi$;

(4)

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	0	−	−	−
y''	−	−	−	0	+
y	增凹 ↗	极大值 $f(1)=\frac{1}{e}$	减凹 ↘	拐点 $\left(2,\frac{2}{e}\right)$	减凸 ↘

渐近线 $y=0$;

(5) 奇函数

x	0	$\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
y'	0	−	−	−	0	+
y''	0	−	0	+	+	+
y	拐点 $(0,0)$	减凹 ↘	拐点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{7}{4\sqrt{2}}\right)$	减凸 ↘	极大值 $f(1)=-2$	增凸 ↗

(6) 偶函数

x	0	$\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$
y'	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	$-$	0	$+$
y	极大值 $f(0)=1$	减凹 ↘	拐点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{e^2}\right)$	减凸 ↘

渐近线　$y=0$;

(7)

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right)$	$-\frac{1}{5}$	$\left(-\frac{1}{5},0\right)$	0	$\left(0,\frac{2}{5}\right)$	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{2}{5},+\infty\right)$
y'	$+$	$+$	$+$	不存在	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	不存在	$+$	$+$	$+$
y	增凹 ↗	拐点 $\left(-\frac{1}{5},-\frac{6}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$	增凸 ↗	极大值 0	减凸 ↘	极小值 $\left(\frac{2}{5},-\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$	增凸 ↗

(8) 设 $x_1=\frac{1}{2}-\frac{3}{10}\sqrt{5}, x_2=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\sqrt{5}$,

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	$(x_1,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$
y'	$-$	$-$	$-$	不存在	$+$	0
y''	$+$	0	$-$	不存在	$-$	$-$
y	减凸 ↘	拐点 $(x_1,f(x_1))$	减凹 ↘	极小值 $f(0)=0$	增凹 ↗	极大值 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

x	$\left(\frac{1}{2},x_2\right)$	x_2	$(x_2,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	减凹 ↘	拐点 $(x_2,f(x_2))$	减凸 ↘	极小值 $f(2)=0$	增凸 ↗

§8 方程的近似解

1. -1.20.
2. 1.538.

总 练 习 题

7. (1) e; (2) $\frac{3}{2}$; (3) 0.

第七章 实数的完备性(续)

§1 关于实数集完备性的基本定理

5. (1) 能;(2) (i) 不能,(ii) 能.

§3 上极限和下极限

1. (1) 2,0;(2) $\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$;(3) $+\infty,+\infty$;(4) $2,-2$;(5) π,π; (6) 1,1.

第八章 不 定 积 分

§1 不定积分概念与基本积分公式

2. $y=x^2+1$.

5. (1) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}-3\sqrt[3]{x}+C$; (2) $\frac{x^3}{3}+\ln|x|-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$;

(3) $\sqrt{\frac{2x}{g}}+C$; (4) $\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{9^x}{\ln 9}+\frac{2\cdot 6^x}{\ln 6}+C$;

(5) $\frac{3}{2}\arcsin x+C$; (6) $\frac{1}{3}(x-\arctan x)+C$;

(7) $\tan x-x+C$; (8) $\frac{1}{4}(2x-\sin 2x)+C$;

(9) $\sin x-\cos x+C$; (10) $-\tan x-\cot x+C$;

(11) $\frac{90^t}{\ln 90}+C$; (12) $\frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}}+C$;

(13) $2\arcsin x+C$; (14) $x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$;

(15) $\frac{1}{2}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x\right)+C$; (16) $\frac{1}{3}e^{3x}-3e^x-3e^{-x}+\frac{1}{3}e^{-3x}+C$.

§2 换元积分法与分部积分法

1. (1) $\frac{1}{3}\sin(3x+4)+C$;　(2) $\frac{1}{4}e^{2x^2}+C$;

(3) $\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$;　(4) $\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}+C$;

(5) $\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(\sqrt{3}x)+C$;　(6) $\frac{2^{2x+2}}{\ln 2}+C$;

(7) $-\frac{2}{9}\sqrt{(8-3x)^3}+C$;　(8) $-\frac{3}{10}\sqrt[3]{(7-5x)^2}+C$;

(9) $-\frac{1}{2}\cos x^2+C$;　(10) $-\frac{1}{2}\cot\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+C$;

(11) $\tan\frac{x}{2}+C$;　(12) $\tan x-\sec x+C$;

(13) $-\ln|\csc x+\cot x|+C$;　(14) $-\sqrt{1-x^2}+C$;

(15) $\frac{1}{4}\arctan\frac{x^2}{2}+C$;　(16) $\ln|\ln x|+C$;

(17) $\frac{1}{10}(1-x^5)^{-2}+C$;　(18) $\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C$;

(19) $\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|+C$;　(20) $\ln|\sin x|+C$;

(21) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3x+\frac{1}{5}\sin^5x+C$;　(22) $\ln|\tan x|+C$;

(23) $\arctan e^x+C$;　(24) $\ln|x^2-3x+8|+C$;

(25) $\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}-\frac{3}{2(x+1)^2}+C$;　(26) $\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C$;

(27) $\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C$;

(28) $-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}+C$;

(29) $-\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}-6x^{\frac{1}{6}}-3\ln\left|\frac{x^{\frac{1}{6}}-1}{x^{\frac{1}{6}}+1}\right|+C$;

(30) $x-4\sqrt{x+1}+4\ln|\sqrt{x+1}+1|+C$.

2. (1) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$;　(2) $x\ln x-x+C$;

(3) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$;

(4) $-\frac{1}{4x^2}(2\ln x+1)+C$;　(5) $x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$;

(6) $\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x-\frac{x}{2}+C$;　(7) $x\ln(\ln x)+C$;

(8) $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$;

(9) $\frac{1}{2}(\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|)+C$;

(10) $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm a^2\ln|\sqrt{x^2\pm a^2}+x|\right)+C$;

3. (1) $\frac{1}{\alpha+1}(f(x))^{\alpha+1}+C$; (2) $\arctan(f(x))+C$;

(3) $\ln|f(x)|+C$.

5. (1) $\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C$; (2) $\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$;

(3) $\frac{x}{16}-\frac{1}{6}\cos^3 x\sin^3 x-\frac{1}{64}\sin 4x+C$.

6. (1) $I_n=\frac{1}{k}x^n e^{kx}-\frac{n}{k}I_{n-1}$; (2) $I_n=x(\ln x)^n-nI_{n-1}$;

(3) $I_n=x(\arcsin x)^n+n\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{n-1}-n(n-1)I_{n-2}$;

(4) $I_n=\frac{1}{n^2+a^2}[e^{ax}\sin^{n-1}x(a\sin x-n\cos x)+n(n-1)I_{n-2}]$.

7. (1) $e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{8}\right)+C$;

(2) $x[(\ln x)^3-3(\ln x)^2+6\ln x-6]+C$;

(3) $x(\arcsin x)^3+3\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2-6x\arcsin x-6\sqrt{1-x^2}+C$;

(4) $\frac{1}{10}e^x(\sin^3 x-3\sin^2 x\cos x+3\sin x-3\cos x)+C$.

§3 有理函数和可化为有理函数的不定积分

1. (1) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C$; (2) $\ln\frac{(x-4)^2}{|x-3|}+C$;

(3) $\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$;

(4) $\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}+C$;

(5) $\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{8}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\arctan x-\frac{x-1}{4(x^2+1)}+C$;

(6) $-\frac{5x+3}{2(2x^2+2x+1)}-\frac{5}{2}\arctan(2x+1)+C$.

2. (1) $\frac{1}{2}\arctan\left(2\tan\frac{x}{2}\right)+C$; (2) $\frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\tan x\right)+C$;

(3) $\frac{1}{2}\ln|\cos x+\sin x|+\frac{x}{2}+C$;

(4) $\frac{7}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}-\frac{2x+3}{4}\sqrt{1+x-x^2}+C$;

(5) $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|+C$;

(6) $\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$.

总 练 习 题

(1) $\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-\frac{24}{13}x^{\frac{13}{12}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$;

(2) $\frac{1}{2}x^2\arcsin x-\frac{1}{4}\arcsin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+C$;

(3) $2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$;　(4) $2e^{\sin x}(\sin x-1)+C$;

(5) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$;　(6) $\arccos\frac{1}{x}+C$;

(7) $\ln|\cos x+\sin x|+C$;　(8) $\ln|x-2|-\frac{3}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+C$;

(9) $\tan x+\frac{1}{3}\tan^3x+C$;　(10) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin2x+\frac{1}{32}\sin4x+C$;

(11) $\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+\frac{1}{x-2}+C$;

(12) $x\arctan(1+\sqrt{x})-\sqrt{x}+\ln|2+x+2\sqrt{x}|+C$;

(13) $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}\ln(x^4+2)+C$;　(14) $x-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$;

(15) $\frac{1}{99}(1-x)^{-99}-\frac{1}{49}(1-x)^{-98}+\frac{1}{97}(1-x)^{-97}+C$;

(16) $-\frac{1}{x}\arcsin x-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$;

(17) $\frac{x^2-1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+x+C$;　(18) $2\sqrt{\tan x}\left(1+\frac{1}{5}\tan^5x\right)+C$;

(19) $\frac{e^x}{1+x^2}+C$;

(20) $I_n=\frac{2}{(2n+1)b_1}[v^n\sqrt{u}+n(a_2b_1-a_1b_2)I_{n-1}]$.

第九章 定 积 分

§1 定积分概念

2. (1) $\frac{1}{4}$; (2) $e-1$; (3) e^b-e^a; (4) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$.

§2 牛顿—莱布尼茨公式

1. (1) 4;　(2) $\frac{\pi}{2}-1$; (3) $\ln 2$; (4) $\frac{e+e^{-1}}{2}-1$;

(5) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$; (6) $\frac{44}{3}$; (7) $4-2\ln 3$; (8) $\frac{2}{3}$.

2. (1) $\frac{1}{4}$; (2) $\frac{1}{2}$; (3) $\frac{\pi}{4}$; (4) $\frac{2}{\pi}$.

§4 定积分的性质

6. a.

10. 提示:证得存在第一个零点 x_1 后,考察辅助函数 $g(x)=(x-x_1)f(x)$.

11. 提示:f 凸,等价于曲线在任一切线的上方.(1)取 $x_0=\frac{a+b}{2}$; (2) $f(x)\geqslant f(t)+f'(t)(x-t)$,对 t 积分.

12. 提示:$\frac{1}{k+1}<\frac{1}{x}<\frac{1}{k}$,在$[k,k+1]$上积分.

§5 微积分学基本定理·定积分计算(续)

3. (1) 1; (2) 0.

4. (1) $\frac{2}{7}$; (2) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$; (3) $\frac{\pi a^4}{16}$; (4) $\frac{4}{3}$;

(5) $\arctan e-\frac{\pi}{4}$; (6) $\frac{\pi}{4}$; (7) $\frac{\pi}{2}-1$; (8) $\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)$;

(9) $2-\frac{2}{e}$; (10) 2; (11) $a^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right)$; (12) $\frac{\pi}{4}$.

8. $J(2m,2n)=\frac{(2n-1)!!(2m-1)!!}{2^{m+n}(m+n)!}\cdot\frac{\pi}{2}\left(=\frac{\pi(2n)!(2m)!}{2^{2m+2n+1}m!n!(m+n)!}\right)$.

10. $f(x)-f(a)$; $1-\cos x$.

12,13. 提示:使用积分第二中值定理.

15. 提示:$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,对 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 进行分部积分.

总练习题

1. 提示:f 凸,$f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$,$x_0=\frac{1}{a}\int_0^a\varphi(t)\mathrm{d}t$,$x=\varphi(t)$,并积分之.

3. 提示:$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_{\sqrt{x}}^x f(t)\mathrm{d}t$,并考察右边两项的极限.

4. 提示:$x=np+x^*$,$0<x^*\leqslant p$,利用周期函数的积分性质.

8. 提示:与第1题类似,但需注意 $\ln u$ 为凹函数.

9. 提示:证明$\{a_n\}$递减,有下界.

第十章 定积分的应用

§1 平面图形的面积

1. $\frac{8}{3}$. 2. $\frac{1}{10}(99\ln 10-81)$. 3. $(3\pi+2)/(9\pi-2)$. 4. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 5. $\frac{3}{2}\pi a^2$.

6. $\frac{1}{4}\pi a^2$. 7. $\frac{1}{6}ab$. 8. $\frac{16}{35}$. 9. $\frac{5\pi}{24}-\frac{\sqrt{3}}{4}$. 10. $4ab\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}(0<b<a)$.

§2 由截面面积求立体体积

1. $\frac{400}{3}$.

2. (1) $\frac{\pi^2}{2}$; (2) $5\pi^2a^3$; (3) $\frac{8}{3}\pi a^3$; (4) $\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

4. $\frac{32}{105}\pi a^3$. 6. $2\pi^2$

§3 曲线的弧长与曲率

1. (1) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$; (2) $1+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(\sqrt{2}+1)$; (3) $6a$;

(4) $2\pi^2a$; (5) $\frac{3}{2}\pi a$; (6) $a\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$.

2. (1) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; (2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; (3) $\frac{\sqrt{2}}{4a}$; (4) $\frac{2}{3a}$.

3. $a=1,b=\sqrt{2}$(或 $a=\sqrt{2},b=1$).

5. $\frac{3}{4a},\frac{4a}{3},\left(x-\frac{2}{3}a\right)^2+y^2=\frac{16}{9}a^2$.

7. $\left(-\ln\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

§4 旋转曲面的面积

1. (1) $2\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$; (2) $\frac{64}{3}\pi a^2$;

(3) $a=b$ 时 $S=4\pi a^2$, $a<b$ 时 $S=2\pi a\left(a+\frac{b^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\arcsin\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\right)$, $a>b$ 时

$S=2\pi a\left(a+\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{b}\right)$.

(4) $4\pi^2ar$.

2. $S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$.

3. (1) $\frac{32}{5}\pi a^2$; (2) $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$.

§5 定积分在物理中的某些应用

1. 14 373.33(千牛). 2. $\frac{1}{2}\nu ab(2h+b\sin\alpha)$.

3. −1 108.35(千牛). 4. $\frac{kmM}{a(a+l)}$. 5. $\frac{kM^2}{l^2}\ln\frac{(c+l)^2}{c(c+2l)}$.

6. $\frac{2k\delta}{r}$. 7. 76 969.02(千焦). 8. 3 920(千焦).

9. $\frac{27}{7}ka^{\frac{7}{3}}c^{\frac{2}{3}}$. 10. $\frac{4}{3}\pi r^4 g$.

§6 定积分的近似计算

1. 0.693 8, 0.693 1.
2. 1.856 9,1.852 2,1.851 9.
3. 8.64(米^2).
4. 矩形法平均:28.71 或 28.66;梯形法平均:28.68;抛物线法平均:28.67.

第十一章 反常积分

§1 反常积分概念

1. (1) $\frac{1}{2}$; (2) 0; (3) 2; (4) $1-\ln 2$;

   (5) $\frac{\pi}{4}$; (6) $\frac{1}{2}$; (7) 发散; (8) 发散.

2. (1) $p<1$ 时收敛于$\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$, $p\geqslant 1$ 时发散;

   (2) 发散; (3) 4; (4) 1;

   (5) −1; (6) $\frac{\pi}{2}$; (7) π; (8) 发散.

§2 无穷积分的性质与收敛判别

4. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 发散;
   (4) 收敛; (5) $n>1$ 时收敛, $n\leqslant 1$ 时发散;
   (6) $n-m>1$ 时收敛, $n-m\leqslant 1$ 时发散.
5. (1) 条件收敛; (2) 绝对收敛; (3) 条件收敛; (4) 条件收敛.

§3 瑕积分的性质与收敛判别

3. (1) 发散; (2) 收敛; (3) 发散; (4) 收敛;
(5) 发散; (6) $m<3$ 时收敛,$m\geqslant 3$ 时发散;
(7) $0<\alpha<1$ 时绝对收敛,$1\leqslant\alpha<2$ 时条件收敛,$\alpha\geqslant 2$ 时发散; (8) 收敛.

4. (1) $(-1)^n n!$; (2) $\dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

总 练 习 题

3. (1) $\dfrac{a}{a^2+b^2}$; (2) $\dfrac{b}{a^2+b^2}$; (3) 0; (4) 0.

4. $0<\lambda\leqslant 1$ 时条件收敛;$1<\lambda<2$ 时绝对收敛;$\lambda\leqslant 0$ 或 $\lambda\geqslant 2$ 时发散.

6. (2) 提示:证明充分性时问题归为证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)$ 存在,这可由 $f'(x)$ 的定号性进而估计 $\left|\int_u^{+\infty}xf'(x)\mathrm{d}x\right|$ (u 足够大)而得.

索　　引

五　画

六　画

七　画

八 画

九 画

十 画

十一画

十二画

十三画

十四画

十五画

人 名 索 引

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学分析　　（上册）　　（第三版）
作者＝华东师范大学数学系编
页数＝３３５
ＳＳ号＝１０６５５７８０
出版日期＝１９８１年０４月第１版

目　　录

第十二章 数 项 级 数

§1 级数的收敛性

读者已经在初等数学中知道:有限个实数 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 相加,其结果是一个实数.本章将讨论"无限个实数相加"所可能出现的情形及其特征.例如,在第二章提到《庄子·天下篇》"一尺之棰,日取其半,万世不竭"的例中,把每天截下那一部分的长度"加"起来:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots,$$

这就是"无限个数相加"的一个例子.从直观上可以看到,它的和是 1.再如下面由"无限个数相加"的表达式

$$1+(-1)+1+(-1)+\cdots$$

中,如果将它写作

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots,$$

其结果无疑是 0,如写作

$$1+[(-1)+1]+[(-1)+1]+\cdots=1+0+0+0+\cdots,$$

其结果则是 1,因此两个结果完全不同.由此提出这样的问题:"无限个数相加"是否存在"和";如果存在,"和"等于什么?可见,"无限个数相加"不能简单地引用有限个数相加的概念,而需建立它本身严格的理论.

定义 1 给定一个数列 $\{u_n\}$,对它的各项依次用"+"号连接起来的表达式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

称为**数项级数**或**无穷级数**(也常简称**级数**),其中 u_n 称为数项级数(1)的**通项**.

数项级数(1)也常写作:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 或简单写作 $\sum u_n$.

数项级数(1)的前 n 项之和,记为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+\cdots+u_n, \tag{2}$$

称它为数项级数(1)的**第 n 个部分和**,也简称**部分和**.

定义 2 若数项级数(1)的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于 S(即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$),则称

数项级数(1)**收敛**,称 S 为数项级数(1)的**和**,记作

$$S=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \text{或} S=\sum u_n.$$

若 $\{S_n\}$ 是发散数列,则称数项级数(1)**发散**.

例 1　讨论**等比级数**(也称为**几何级数**)

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots \tag{3}$$

的收敛性($a\neq 0$).

解　$q\neq 1$ 时,级数(3)的第 n 个部分和

$$S_n=a+aq+\cdots+aq^{n-1}=a\cdot\frac{1-q^n}{1-q}.$$

因此,

(i) 当 $|q|<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}a\cdot\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}$. 此时级数(3)收敛,其和为 $\frac{a}{1-q}$.

(ii) 当 $|q|>1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$,级数(3)发散.

(iii) 当 $q=1$ 时,$S_n=na$,级数发散.

当 $q=-1$ 时,$S_{2k}=0, S_{2k+1}=a, k=0,1,2,\cdots$,级数发散.

总之,$|q|<1$ 时,级数(3)收敛;$|q|\geqslant 1$ 时,级数(3)发散. □

例 2　讨论数项级数

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots \tag{4}$$

的收敛性.

解　级数(4)的第 n 个部分和

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

因此级数(4)收敛,且

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=1.$$ □

由于级数(1)的收敛或发散(简称**敛散性**),是由它的部分和数列 $\{S_n\}$ 来确

定,因而也可把级数(1)作为数列$\{S_n\}$的另一种表现形式.反之,任给一个数列$\{a_n\}$,如果把它看作某一数项级数的部分和数列,则这个数项级数就是

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + \cdots. \tag{5}$$

这时数列$\{a_n\}$与级数(5)具有相同的敛散性,且当$\{a_n\}$收敛时,其极限值就是级数(5)的和.

基于级数与数列的这种关系,读者不难根据数列极限的性质推出下面有关级数的一些定理.

定理 12.1(级数收敛的柯西准则) 级数(1)收敛的充要条件是:任给正数ε,总存在正整数N,使得当$m > N$以及对任意的正整数p,都有

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}| < \varepsilon. \tag{6}$$

根据定理 12.1,我们立刻可写出级数(1)发散的充要条件:存在某正数ε_0,对任何正整数N,总存在正整数$m_0(>N)$和p_0,有

$$|u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| \geqslant \varepsilon_0. \tag{7}$$

由定理 12.1 立即可得如下推论,它是级数收敛的一个必要条件.

推论 若级数(1)收敛,则

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

例 3 讨论调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

的敛散性.

解 这里调和级数显然满足推论的结论,即

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

但令$p = m$时,有

$$\begin{aligned}\left|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{2m}\right| &= \left|\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m}\right| \\ &\geqslant \left|\frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \cdots + \frac{1}{2m}\right| \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

因此,取$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$,对任何正整数$N$,只要$m > N$和$p = m$就有(7)式成立.所以调和级数是发散的. □

例 4 应用级数收敛的柯西准则证明级数$\sum \frac{1}{n^2}$收敛.

证 由于

$$\begin{aligned}&|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|\\=&\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(m+p)^2}\\<&\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\cdots+\frac{1}{(m+p-1)(m+p)}\\=&\frac{1}{m}-\frac{1}{m+p}\\<&\frac{1}{m},\end{aligned}$$

因此,对任给正数 ε,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,使当 $m>N$ 及对任意正整数 p,由上式就有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\frac{1}{m}<\varepsilon.$$

依定理 12.1 推得级数 $\sum\frac{1}{n^2}$ 是收敛的. □

定理 12.2 若级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都收敛,则对任意常数 c,d,级数 $\sum(cu_n+dv_n)$ 亦收敛,且

$$\sum(cu_n+dv_n)=c\sum u_n+d\sum v_n.$$

由定理 12.1,级数 $\sum u_n$ 的敛散性取决于:对任给正数 ε,是否存在充分大的正数 N,使得当 $n>N$ 及对任意正整数 p 恒有(6)式成立. 由此可见,一个级数是否收敛与级数前面有限项的取值无关. 从而我们可得到以下定理.

定理 12.3 去掉、增加或改变级数的有限个项并不改变级数的敛散性.

由此定理知道,若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,其和为 S,则级数

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots \tag{8}$$

也收敛,且其和 $R_n=S-S_n$. (8)式称为级数 $\sum u_n$ 的**第 n 个余项**(或简称**余项**),它表示以部分和 S_n 代替 S 时所产生的误差.

定理 12.4 在收敛级数的项中任意加括号,既不改变级数的收敛性,也不改变它的和.

证 设 $\sum u_n$ 为收敛级数,其和为 S. 记

$$v_1=u_1+\cdots+u_{n_1},v_2=u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2},\cdots,$$

$$v_k=u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k},\cdots.$$

现在证明 $\sum u_n$ 加括号后的级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})=\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k$ 也收敛,且其和也是 S. 事实上,设 $\{S_n\}$ 为收敛级数 $\sum u_n$ 的部分和数列,则级数 $\sum v_k$ 的部分和

数列$\{S_{n_k}\}$是$\{S_n\}$的一个子列. 由于$\{S_n\}$收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. 故由子列性质,$\{S_{n_k}\}$也收敛,且$\lim\limits_{k\to\infty}S_{n_k}=S$,即级数$\sum v_k$收敛,且它的和也等于$S$. □

注意:从级数加括号后的收敛,不能推断它在未加括号前也收敛. 例如

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots=0$$

收敛,但级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

却是发散的.

习　　题

1. 证明下列级数的收敛性,并求其和数:

(1) $\dfrac{1}{1\cdot6}+\dfrac{1}{6\cdot11}+\dfrac{1}{11\cdot16}+\cdots+\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$;

(2) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)+\cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$.

2. 证明:若级数$\sum u_n$发散,$c\neq0$,则$\sum cu_n$也发散.

3. 设级数$\sum u_n$与$\sum v_n$都发散,试问$\sum(u_n+v_n)$一定发散吗? 又若u_n与$v_n(n=1,2,\cdots)$都是非负数,则能得出什么结论?

4. 证明:若数列$\{a_n\}$收敛于a,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-a$.

5. 证明:若数列$\{b_n\}$有$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$,则

(1) 级数$\sum(b_{n+1}-b_n)$发散;

(2) 当$b_n\neq0$时,级数$\sum\left(\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=\dfrac{1}{b_1}$.

6. 应用第4,5题的结果求下列级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(a+n-1)(a+n)}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$.

7. 应用柯西准则判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\dfrac{\sin2^n}{2^n}$;　　(2) $\sum\dfrac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$;

(3) $\sum\dfrac{(-1)^n}{n}$;　　(4) $\sum\dfrac{1}{\sqrt{n+n^2}}$.

8. 证明级数$\sum u_n$收敛的充要条件是:任给正数ϵ,存在某正整数N,对一切$n>N$总有

$$|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\epsilon.$$

9. 举例说明:若级数$\sum u_n$对每个固定的p满足条件

$$\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}+\cdots+u_{n+p})=0,$$

此级数仍可能不收敛.

10. 设级数$\sum u_n$满足:加括号后级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_{n_k+1}+\cdots+u_{n_{k+1}})$收敛($n_1=0$),且在同一括号中的$u_{n_k+1},u_{n_k+2},\cdots,u_{n_{k+1}}$符号相同,证明$\sum u_n$亦收敛.

§2 正项级数

一 正项级数收敛性的一般判别原则

若数项级数各项的符号都相同,则称它为**同号级数**.对于同号级数,只须研究各项都是由正数组成的级数——称为**正项级数**.如果级数的各项都是负数,则它乘以-1后就得到一个正项级数,它们具有相同的敛散性.

定理 12.5 正项级数$\sum u_n$收敛的充要条件是:部分和数列$\{S_n\}$有界,即存在某正数M,对一切正整数n有$S_n<M$.

证 由于$u_i>0(i=1,2,\cdots)$,所以$\{S_n\}$是递增数列.而单调数列收敛的充要条件是该数列有界(单调有界定理(定理2.9)).这就证得本定理的结论. □

定理 12.6(比较原则) 设$\sum u_n$和$\sum v_n$是两个正项级数,如果存在某正数N,对一切$n>N$都有

$$u_n\leqslant v_n, \tag{1}$$

则

(i) 若级数$\sum v_n$收敛,则级数$\sum u_n$也收敛;

(ii) 若级数$\sum u_n$发散,则级数$\sum v_n$也发散.

证 因为改变级数的有限项并不影响原有级数的敛散性,因此不妨设不等式(1)对一切正整数都成立.

现分别以S_n'和S_n''记级数$\sum u_n$与$\sum v_n$的部分和.由(1)式推得,对一切正整数n,都有

$$S_n'\leqslant S_n'' \tag{2}$$

若$\sum v_n$收敛,即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n''$存在,则由(2)式对一切$n$有$S_n'\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}S_n''$,即正项级数$\sum u_n$的部分和数列$\{S_n'\}$有界,由定理12.5级数$\sum u_n$收敛.这就证明了(i);(ii)为(i)的逆否命题,自然成立. □

例 1 考察$\sum \frac{1}{n^2-n+1}$的收敛性.

解 由于当 $n \geqslant 2$ 时,有

$$\frac{1}{n^2-n+1} \leqslant \frac{1}{n^2-n} = \frac{1}{n(n-1)} \leqslant \frac{1}{(n-1)^2}.$$

因为正项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$ 收敛(§1 例 4),故由定理 12.6 和 12.3,级数 $\sum \frac{1}{n^2-n+1}$也收敛. □

在实际使用上,比较原则的下述极限形式通常更为方便.

推论 设

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \tag{3}$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots \tag{4}$$

是两个正项级数,若

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = l, \tag{5}$$

则

(i) 当 $0 < l < +\infty$时,级数(3)、(4)同时收敛或同时发散;

(ii) 当 $l = 0$ 且级数(4)收敛时,级数(3)也收敛;

(iii) 当 $l = +\infty$且级数(4)发散时,级数(3)也发散.

证 由(5),对任给正数 ε,存在某正数 N,当 $n > N$ 时,恒有

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon$$

或

$$(l - \varepsilon) v_n < u_n < (l + \varepsilon) v_n. \tag{6}$$

由定理 12.6 及(6)式推得,当$0 < l < +\infty$(这里设 $\varepsilon < l$)时,级数(3)与(4)同时收敛或同时发散. 这就证得(i).

对于(ii),当 $l = 0$ 时,由(6)式右半部分及比较原则可得:若级数(4)收敛,则级数(3)也收敛.

对于(iii),若 $l = +\infty$,即对任给的正数 M,存在相应的正数 N,当 $n > N$ 时,都有

$$\frac{u_n}{v_n} > M$$

或

$$u_n > M v_n.$$

于是由比较原则知道,若级数(4)发散,则级数(3)也发散. □

例 2 级数

$$\sum\frac{1}{2^n-n}$$

是收敛的,因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2^n-n}}{\dfrac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\dfrac{n}{2^n}}=1$$

以及等比级数$\sum\frac{1}{2^n}$收敛,所以根据推论,级数$\sum\frac{1}{2^n-n}$也收敛.

例 3 级数

$$\sum\sin\frac{1}{n}=\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n}+\cdots$$

是发散的. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}}=1,$$

根据推论以及调和级数$\sum\frac{1}{n}$发散,所以级数$\sum\sin\frac{1}{n}$也发散. □

二 比式判别法和根式判别法

根据比较原则,可以利用已知收敛或者发散级数作为比较对象来判别其他级数的敛散性. 本段所介绍的两个方法是以等比级数作为比较对象而得到的.

定理 12.7(达朗贝尔判别法,或称比式判别法) 设$\sum u_n$为正项级数,且存在某正整数N_0及常数$q(0<q<1)$.

(i) 若对一切$n>N_0$,成立不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q,\tag{7}$$

则级数$\sum u_n$收敛.

(ii) 若对一切$n>N_0$,成立不等式

$$\frac{u_{n+1}}{n_n}\geqslant 1,\tag{8}$$

则级数$\sum u_n$发散.

证 (i) 不妨设不等式(7)对一切$n\geqslant 1$成立,于是有

$$\frac{u_2}{u_1}\leqslant q,\ \frac{u_3}{u_2}\leqslant q,\cdots,\frac{u_n}{u_{n-1}}\leqslant q,\cdots.$$

把前$n-1$个不等式按项相乘后,得到

$$\frac{u_2}{u_1}\cdot\frac{u_3}{u_2}\cdot\cdots\cdot\frac{u_n}{u_{n-1}}\leqslant q^{n-1}$$

或者

$$u_n\leqslant u_1q^{n-1}.$$

由于当$0<q<1$时,等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}$收敛,根据比较原则及上述不等式可推得级数$\sum u_n$收敛.

(ii) 由于$n>N_0$时成立不等式(8),即有

$$u_{n+1}\geqslant u_n\geqslant u_{N_0}.$$

于是当$n\to\infty$时,u_n的极限不可能为零.由定理12.1推论知级数$\sum u_n$是发散的. □

推论1(比式判别法的极限形式) 若$\sum u_n$为正项级数,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q, \tag{9}$$

则

(i) 当$q<1$时,级数$\sum u_n$收敛;

(ii) 当$q>1$或$q=+\infty$时,级数$\sum u_n$发散.

证 由(9)式,对任意取定的正数$\varepsilon(<|1-q|)$,存在正数N,当$n>N$时,都有

$$q-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<q+\varepsilon.$$

当$q<1$时,取ε使$q+\varepsilon<1$,由上述不等式的右半部分及定理12.7的(i),推得级数$\sum u_n$是收敛的.

若$q>1$,则取ε使$q-\varepsilon>1$,由上述不等式的左半部分及定理12.7的(ii),推得级数$\sum u_n$是发散的.

若$q=+\infty$,则存在N,当$n>N$时有

$$\frac{u_{n+1}}{n_n}>1,$$

所以这时级数$\sum u_n$是发散的. □

例4 级数

$$\frac{2}{1}+\frac{2\cdot5}{1\cdot5}+\frac{2\cdot5\cdot8}{1\cdot5\cdot9}+\cdots+\frac{2\cdot5\cdot8\cdots[2+3(n-1)]}{1\cdot5\cdot9\cdots[1+4(n-1)]}+\cdots,$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+3n}{1+4n}=\frac{3}{4}<1,$$

根据推论 1 级数是收敛的. □

例 5 讨论级数$\sum nx^{n-1}(x>0)$的敛散性.

解 因为

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)x^n}{nx^{n-1}}=x\cdot\frac{n+1}{n}\to x\ (n\to\infty),$$

根据推论 1,当$0<x<1$时级数收敛;当$x>1$时级数发散;而当$x=1$时,所考察的级数是$\sum n$,它显然也是发散的. □

若(9)中$q=1$,这时用比式判别法不能对级数的敛散性作出判断,因为它可能是收敛的,也可能是发散的.例如级数$\sum\frac{1}{n^2}$和$\sum\frac{1}{n}$,它们的比式极限都是

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\to 1\qquad(n\to\infty),$$

但$\sum\frac{1}{n^2}$是收敛的(§1 例 4),而$\sum\frac{1}{n}$却是发散的(§1 例 3).

若某级数的(9)式的极限不存在,则可应用上、下极限来判别.

推论 2 设$\sum u_n$为正项级数.

(i) 若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q<1$,则级数收敛;

(ii) 若$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{u_{n-1}}{u_n}=q>1$,则级数发散.

对本推论读者可仿照推论 1 的方法证明.

例 6 研究级数

$$1+b+bc+b^2c+b^2c^2+\cdots+b^nc^{n-1}+b^nc^n+\cdots\tag{10}$$

的敛散性,其中$0<b<c$.

解 由于

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\begin{cases}b,\ n\text{ 为奇数},\\ c,\ n\text{ 为偶数},\end{cases}$$

故有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=c,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=b,$$

于是,当$c<1$时,级数(10)收敛;当$b>1$时,级数(10)发散;但当$b<1<c$时,比式判别法无法判断级数(10)的敛散性. □

定理 12.8(柯西判别法,或称根式判别法) 设$\sum u_n$为正项级数,且存在某正数N_0及正常数l,

(i) 若对一切$n>N_0$,成立不等式

$$\sqrt[n]{u_n}\leqslant l<1,\tag{11}$$

则级数$\sum u_n$收敛;

(ii) 若对一切 $n>N_0$,成立不等式

$$\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1, \tag{12}$$

则级数$\sum u_n$发散.

证 由(11)式有

$$u_n\leqslant l^n.$$

因为等比级数$\sum l^n$当$0<l<1$时收敛,故由比较原则,这时级数$\sum u_n$也收敛,对于情形(ii),由(12)式可推得

$$u_n\geqslant 1^n=1.$$

当$n\to\infty$时,显然u_n不可能以零为极限,因而由级数收敛的必要条件可知,级数$\sum u_n$是发散的. □

推论 1(根式判别法的极限形式) 设$\sum u_n$为正项级数,且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l, \tag{13}$$

则

(i) 当$l<1$时,级数$\sum u_n$收敛;

(ii) 当$l>1$时,级数$\sum u_n$发散.

证 由(13)式,当取$\varepsilon<|1-l|$时,存在某正数N,对一切$n>N$,有

$$l-\varepsilon<\sqrt[n]{u_n}<l+\varepsilon.$$

于是由定理 12.8 就能得到这个推论所要证明的结论. □

例 7 研究级数$\sum\frac{2+(-1)^n}{2^n}$的敛散性.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2}=\frac{1}{2},$$

所以级数是收敛的. □

若在(13)式中$l=1$,则根式判别法仍无法对级数的敛散性作出判断.例如,对$\sum\frac{1}{n^2}$和$\sum\frac{1}{n}$,都有

$$\sqrt[n]{u_n}\to 1\quad(n\to\infty).$$

但$\sum\frac{1}{n^2}$是收敛的,而$\sum\frac{1}{n}$却是发散的.

若(13)式的极限不存在,则可根据根式$\sqrt[n]{u_n}$的上极限来判断.

推论 2 设$\sum u_n$为正项级数,且

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=l,$$

则当

(i) $l<1$时级数收敛;

(ii) $l>1$时级数发散.

本推论的证明可仿照推论 1 的证法进行.

例 8 考察级数

$$b+c+b^2+c^2+\cdots+b^n+c^n+\cdots,$$

其中 $0<b<c<1$.

解 由于

$$\sqrt[n]{u_n}=\begin{cases}(c^m)^{\frac{1}{2m}}\to\sqrt{c},\\(b^{m+1})^{\frac{1}{2m+1}}\to\sqrt{b}\end{cases}\quad(m\to\infty)$$

及

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=\sqrt{c}<1,$$

因此级数是收敛的.但若应用比式判别法,则由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{b^n}=+\infty,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b^{n+1}}{c^n}=0<1,$$

则无法应用定理 12.7 推论 2 判断其收敛性. □

读者已从第二章总练习题 4(7)知道,若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q,$$

则必有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q.$$

这说明凡能由比式判别法鉴别收敛性的级数,它也能由根式判别法来判断,而且可以说,根式判别法较之比式判别法更有效.例如,级数 $\sum\frac{2+(-1)^n}{2^n}$.由于

$$\lim_{m\to\infty}\frac{u_{2m}}{u_{2m-1}}=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{3}{2^{2m}}}{\frac{1}{2^{2m-1}}}=\frac{3}{2},$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{u_{2m+1}}{u_{2m}}=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{2m+1}}}{\frac{3}{2^{2m}}}=\frac{1}{6},$$

故由比式判别法无法鉴别此级数的收敛性.但应用根式判别法来考察这个级数(例 7),可知此级数是收敛的.

三 积分判别法

积分判别法是利用非负函数的单调性和积分性质,并以反常积分为比较对象来判断正项级数的敛散性.

定理 12.9 设 f 为$[1,+\infty)$上非负减函数,那么正项级数 $\sum f(n)$ 与反常

积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

证 由假设 f 为 $[1,+\infty)$ 上非负减函数,对任何正数 A,f 在 $[1,A]$ 上可积,从而有

$$f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(n-1),\ n=2,3,\cdots.$$

依次相加可得

$$\sum_{n=2}^{m} f(n) \leqslant \int_1^m f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=2}^{m} f(n-1) = \sum_{n=1}^{m-1} f(n). \tag{14}$$

若反常积分收敛,则由(14)式左边,对任何正整数 m,有

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} f(n) \leqslant f(1) + \int_1^m f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

根据定理 12.5,级数 $\sum f(n)$ 收敛.

反之,若 $\sum f(n)$ 为收敛级数,则由(14)式右边,对任一正整数 $m(>1)$ 有

$$\int_1^m f(x)\mathrm{d}x \leqslant S_{m-1} \leqslant \sum f(n) = S. \tag{15}$$

因为 $f(x)$ 为非负减函数,故对任何正数 A,都有

$$0 \leqslant \int_1^A f(x)\mathrm{d}x \leqslant S_n < S,\ n \leqslant A \leqslant n+1.$$

联系(15)式及定理 11.2 得反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

用同样方法,读者可以证明 $\sum f(n)$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是同时发散的. □

例 9 讨论 p **级数** $\sum \frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

解 函数 $f(x)=\frac{1}{x^p}$,当 $p>0$ 时在 $[1,+\infty)$ 上是非负减函数.由第十一章§2 例 3 知道反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 在 $p>1$ 时收敛,$p\leqslant 1$ 时发散.故由定理 12.9 得 $\sum \frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛,当 $0<p\leqslant 1$ 时发散.至于 $p\leqslant 0$ 的情形,则可由定理 12.1 推论知道它也是发散的. □

例 10 讨论下列级数

$$\text{(i)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p};\quad \text{(ii)}\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)^p}$$

的敛散性.

解 研究反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$,由于

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{(\ln x)^p}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^p}$$

当 $p>1$ 时收敛,$p\leqslant 1$ 时发散.根据定理 12.9 知级数(i)在 $p>1$ 时收敛,$p\leqslant 1$ 时发散.

对于(ii),考察反常积分 $\int_3^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)(\ln\ln x)^p}$,同样可推得级数(ii)在 $p>1$ 时收敛,在 $p\leqslant 1$ 时发散. □

*四 拉贝判别法

比式判别法和根式判别法是基于把所要判断的级数与某一等比级数相比较的想法而得到的,也就是说,只有那些级数的通项收敛于零的速度比某一等比级数收敛速度快的级数,这两方法才能鉴定出它的收敛性.如果级数的通项收敛速度较慢,它们就无能为力了.因此为了获得判别范围更大的一类级数,就必须寻找级数的通项收敛于零较慢的级数作为比较标准.

以 p 级数为比较标准,得到拉贝(Raabe)判别法,现介绍如下:

定理 12.10(拉贝判别法) 设 $\sum u_n$ 为正项级数,且存在某正整数 N_0 及常数 r,

(i) 若对一切 $n>N_0$,成立不等式

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\geqslant r>1,$$

则级数 $\sum u_n$ 收敛;

(ii) 若对一切 $n>N_0$,成立不等式

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\leqslant 1,$$

则级数 $\sum u_n$ 发散.

证 (i) 由 $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\geqslant r$ 可得 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1-\frac{r}{n}$.选 p 使 $1<p<r$.由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^p}{\frac{r}{n}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x)^p}{rx}=\lim_{x\to 0}\frac{p(1-x)^{p-1}}{r}=\frac{p}{r}<1,$$

因此,存在正数 N,使对任意 $n>N$,

$$\frac{r}{n}>1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^p.$$

这样

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<1-\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^p\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^p=\left(\frac{n-1}{n}\right)^p.$$

于是,当 $n>N$ 时就有

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=\frac{u_{n+1}}{u_n}\cdot\frac{u_n}{u_{n-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{u_{N+1}}{u_N}\cdot u_N\\&\leqslant\left(\frac{n-1}{n}\right)^p\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^p\cdots\left(\frac{N-1}{N}\right)^p\cdot u_N\end{aligned}$$

$$=\frac{(N-1)^p}{n^p}\cdot u_N.$$

当 $p>1$ 时，$\sum\frac{1}{n^p}$ 收敛，故级数 $\sum u_n$ 是收敛的.

(ii) 由 $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\leqslant 1$ 可得 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$，于是

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=\frac{u_{n+1}}{u_n}\cdot\frac{u_n}{u_{n-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{u_3}{u_2}\cdot u_2\\&>\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot u_2\\&=\frac{1}{n}\cdot u_2.\end{aligned}$$

因为 $\sum\frac{1}{n}$ 发散，故 $\sum u_n$ 是发散的. □

推论(拉贝判别法的极限形式)　设 $\sum u_n$ 为正项级数，且极限

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=r$$

存在，则

(i) 当 $r>1$ 时，级数 $\sum u_n$ 收敛；

(ii) 当 $r<1$ 时，级数 $\sum u_n$ 发散.

例 11　讨论级数

$$\sum\left[\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\right]^s \tag{16}$$

当 $s=1,2,3$ 时的敛散性.

解　无论 $s=1,2,3$ 哪一值，对级数(16)的比式极限，都有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$$

所以用比式判别法无法判别级数(16)的敛散性. 现在应用拉贝判别法来讨论，当 $s=1$ 时，由于

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=n\left(1-\frac{2n+1}{2n+2}\right)=\frac{n}{2n+2}\to\frac{1}{2}\quad(n\to\infty),$$

所以级数(16)是发散的. 当 $s=2$ 时，由于

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=n\left[1-\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2\right]=\frac{n(4n+3)}{(2n+2)^2}\to 1\quad(n\to\infty),$$

这时拉贝判别法也无法对级数(16)作出判断. 当 $s=3$ 时，由于

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=n\left[1-\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^3\right]=\frac{n(12n^2+18n+7)}{(2n+2)^3}\to\frac{3}{2}\quad(n\to\infty),$$

所以级数(16)收敛. □

从上面看到，比式判别法有其局限性，拉贝判别法虽然判别的范围比它更广泛些，但当 $r=1$ 时仍无法判别. 我们还可以建立比拉贝判别法更为有效的方法，但这个过程是无限的. 虽然每次都能得到新的、判别范围更广泛的判别法，但这些判别法也更加复杂. 这里就不再介绍了.

习　　题

1. 应用比较原则判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\frac{1}{n^2+a^2}$；　　(2) $\sum 2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$；

(3) $\sum\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$；　　(4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$；

(5) $\sum\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$；　　(6) $\sum\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$；

(7) $\sum(\sqrt[n]{a}-1)\ (a>1)$；　　(8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

(9) $\sum(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)\ (a>0)$.

2. 用比式判别法或根式判别法鉴定下列级数的敛散性：

(1) $\sum\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{n!}$；　　(2) $\sum\frac{(n+1)!}{10^n}$；

(3) $\sum\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$；　　(4) $\sum\frac{n!}{n^n}$；

(5) $\sum\frac{n^2}{2^n}$；　　(6) $\sum\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$；

(7) $\sum\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$　(其中 $a_n\to a(n\to\infty)$；$a_n,b,a>0$，且 $a\neq b$).

3. 设$\sum u_n$ 和$\sum v_n$ 为正项级数，且存在正数 N_0，对一切 $n>N_0$，有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

证明：若级数$\sum v_n$ 收敛，则级数$\sum u_n$ 也收敛；若$\sum u_n$ 发散，则$\sum v_n$ 也发散.

4. 设正项级数$\sum a_n$ 收敛，证明$\sum a_n^2$ 亦收敛；试问反之是否成立？

5. 设 $a_n\geqslant0$，$n=1,2,\cdots$. 且$\{na_n\}$有界，证明$\sum a_n^2$ 收敛.

6. 设级数$\sum a_n^2$ 收敛，证明$\sum\frac{a_n}{n}(a_n>0)$也收敛.

7. 设正项级数$\sum u_n$ 收敛，证明级数$\sum\sqrt{u_nu_{n+1}}$也收敛.

8. 利用级数收敛的必要条件，证明下列等式：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0\quad(a>1)$.

9. 用积分判别法讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\frac{1}{n^2+1}$；　　(2) $\sum\frac{n}{n^2+1}$；

(3) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$；　　(4) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$.

10. 设$\{a_n\}$为递减正项数列，证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与$\sum 2^m a_{2^m}$同时收敛或同时发散.

11. 用拉贝判别法判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1}$；　(2) $\sum\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$　$(x>0)$.

12. 用根式判别法证明级数 $\sum 2^{-n-(-1)^n}$ 收敛，并说明比式判别法对此级数无效.

13. 求下列极限(其中 $p>1$)：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p^{n+1}}+\frac{1}{p^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{p^{2n}}\right)$.

14. 设 $a_n>0$，证明数列 $\{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\}$ 与级数 $\sum a_n$ 同时收敛或同时发散.

§3　一般项级数

上节我们讨论了正项级数的收敛性问题，关于一般数项级数的收敛性判别问题要比正项级数复杂，本节只讨论某些特殊类型的级数的收敛性问题.

一　交错级数

若级数的各项符号正负相间，即

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n+1}u_n+\cdots\quad(u_n>0,n=1,2,\cdots),\tag{1}$$

则称(1)为**交错级数**.

定理 12.11(莱布尼茨判别法)　若交错级数(1)满足下述两个条件：

(i) 数列 $\{u_n\}$ 单调递减；

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，

则级数(1)收敛.

证　考察交错级数(1)的部分和数列 $\{S_n\}$，它的奇数项和偶数项分别为

$$S_{2m-1}=u_1-(u_2-u_3)-\cdots-(u_{2m-2}-u_{2m-1}),$$

$$S_{2m}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2m-1}-u_{2m}).$$

由条件(i)，上述两式中各个括号内的数都是非负的，从而数列 $\{S_{2m-1}\}$ 是递减的，而数列 $\{S_{2m}\}$ 是递增的. 又由条件(ii)知道

$$0<S_{2m-1}-S_{2m}=u_{2m}\to0\quad(m\to\infty),$$

从而 $\{[S_{2m},S_{2m-1}]\}$ 是一个区间套. 由区间套定理，存在惟一的一个数 S，使得

$$\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}=\lim_{m\to\infty}S_{2m}=S.$$

所以数列 $\{S_n\}$ 收敛，即级数(1)收敛.　□

推论　若级数(1)满足莱布尼茨判别法的条件，则收敛级数(1)的余项估计式为

$$|R_n|\leqslant u_{n+1}.$$

对于下列交错级数应用莱布尼茨判别法检验，容易检验它们都是收敛的.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}+\cdots;\tag{2}$$

$$1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}+\cdots;\tag{3}$$

$$\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}-\frac{4}{10^4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{n}{10^n}+\cdots.\tag{4}$$

二 绝对收敛级数及其性质

若级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots\tag{5}$$

各项绝对值所组成的级数

$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots\tag{6}$$

收敛,则称原级数(5)为**绝对收敛**.

定理 12.12 绝对收敛的级数一定收敛.

证 由于级数(6)收敛,根据级数的柯西收敛准则,对任意正数 ε,总存在正数 N,使得对 $n>N$ 和任意正整数 r,有

$$|u_{m+1}|+|u_{m+2}|+\cdots+|u_{m+r}|<\varepsilon.$$

由于

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+r}|\leqslant|u_{m+1}|+|u_{m+2}|+\cdots+|u_{m+r}|<\varepsilon,$$

因此由柯西准则知级数(5)也收敛. □

对于级数(5)是否绝对收敛,可引用正项级数的各种判别法对级数(6)进行考察.

例 1 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}=\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+\cdots+\frac{\alpha^n}{n!}+\cdots$$

的各项绝对值所组成的级数是

$$\sum\frac{|\alpha|^n}{n!}=|\alpha|+\frac{|\alpha|^2}{2!}+\cdots+\frac{|\alpha|^n}{n!}+\cdots.$$

应用比式判别法,对于任何实数 α 都有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha|}{n+1}=0,$$

因此,所考察的级数对任何实数 α 都绝对收敛. □

若级数(5)收敛,但级数(6)不收敛,则称级数(5)为**条件收敛**.

例如级数(2)是条件收敛,而级数(3)、(4)则是绝对收敛.

全体收敛的级数可分为绝对收敛级数与条件收敛级数两大类.

下面讨论绝对收敛级数的两个重要性质.

1. 级数的重排

我们把正整数列$\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$到它自身的一一映射$f:n\to k(n)$称为正整数列的重排,相应地对于数列$\{u_n\}$按映射$F:u_n\to u_{k(n)}$所得到的数列$\{u_{k(n)}\}$称为原级数的重排.相应于此,我们也称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{k(n)}$是级数(5)的重排.为叙述上的方便,记$v_n=u_{k(n)}$,即把级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{k(n)}$写作

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots. \tag{7}$$

定理12.13 设级数(5)绝对收敛,且其和等于S,则任意重排后所得到的级数(7)也绝对收敛亦有相同的和数.

证 先假设级数(5)是正项级数,用S_n表示它的第n个部分和.现以

$$\sigma_m=v_1+v_2+\cdots+v_m$$

表示级数(7)的第m个部分和.因为级数(7)为级数(5)的重排,所以每一$v_k(1\leqslant k\leqslant m)$都等于某一$u_{i_k}(1\leqslant k\leqslant m)$.记

$$n=\max\{i_1,i_2,\cdots,i_m\},$$

则对任何m,都存在n,使$\sigma_m\leqslant S_n$.

由于$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$,所以对任何正整数$m$都有$\sigma_m\leqslant S$,即得级数(7)收敛,且其和$\sigma\leqslant S$.

由于级数(5)也可看作级数(7)的重排,所以也有$S\leqslant\sigma$,从而推得$\sigma=S$.

若级数(5)是一般项级数且绝对收敛,则由级数(6)收敛及上述证明可推得级数$\sum|v_n|$也收敛,即级数(7)是绝对收敛的.

最后证明绝对收敛级数(7)的和也等于S.为此,令

$$p_n=\frac{|u_n|+u_n}{2},\quad q_n=\frac{|u_n|-u_n}{2}. \tag{8}$$

当$u_n\geqslant0$时,$p_n=u_n\geqslant0$,$q_n=0$;当$u_n<0$时,$p_n=0$,$q_n=|u_n|=-u_n\geqslant0$.从而有

$$0\leqslant p_n\leqslant|u_n|,\quad 0\leqslant q_n\leqslant|u_n|, \tag{9}$$

$$p_n+q_n=|u_n|,\quad p_n-q_n=u_n. \tag{10}$$

因为级数(5)绝对收敛,故由(9)知道$\sum p_n$,$\sum q_n$都是正项的收敛级数.再由定理12.2可得

$$S=\sum u_n=\sum p_n-\sum q_n.$$

对于级数(5)重排后所得到的级数(7),也可按(8)式的办法,把它表示为两个收敛的正项级数之差

$$\sum v_n=\sum p_n'-\sum q_n',$$

其中$\sum p_n'$,$\sum q_n'$分别是$\sum p_n$,$\sum q_n$的重排,前面已经证明收敛的正项级数重排后,它的和不变,从而有

$$\sum v_n=\sum p_n'-\sum q_n'=\sum p_n-\sum q_n=S.$$ □

注意:由条件收敛级数重排后所得到的新级数,即使收敛,也不一定收敛于原来的和数.而且条件收敛级数适当重排后,可得到发散级数,或收敛于任何事先指定的数.例如级数(2)是条件收敛的,设其和为A,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=A.$$

乘以常数$\frac{1}{2}$后,有

$$\frac{1}{2}\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{A}{2}.$$

将上述两个级数相加,就得到

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}A.$$

2. 级数的乘积

由定理 12.2 知道,若$\sum u_n$ 为收敛级数,a 为常数,则

$$a\sum u_n=\sum au_n,$$

由此立刻可以推广到收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与有限项和的乘积,即

$$(a_1+a_2+\cdots+a_m)\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}a_ku_n,$$

现在讨论在什么条件下能把它推广到无穷级数之间的乘积上去?

设有收敛级数

$$\sum u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=A, \tag{11}$$

$$\sum v_n=v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots=B. \tag{12}$$

把级数(11)与(12)中每一项所有可能的乘积列成下表:

$$\begin{array}{|cccccc}
u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \cdots & u_1v_n & \cdots\\
u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \cdots & u_2v_n & \cdots\\
u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & \cdots & u_3v_n & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
u_nv_1 & u_nv_2 & u_nv_3 & \cdots & u_nv_n & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array} \tag{13}$$

这些乘积 u_iv_j 可以按各种方法排成不同的级数,常用的有按正方形顺序或按对角线顺序(图 12-1 所示)依次相加,于是分别有

$$u_1v_1+u_1v_2+u_2v_2+u_2v_1+u_1v_3+u_2v_3+u_3v_3+u_3v_2+u_3v_1+\cdots \tag{14}$$

和

$$u_1v_1+u_1v_2+u_2v_1+u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1+\cdots. \tag{15}$$

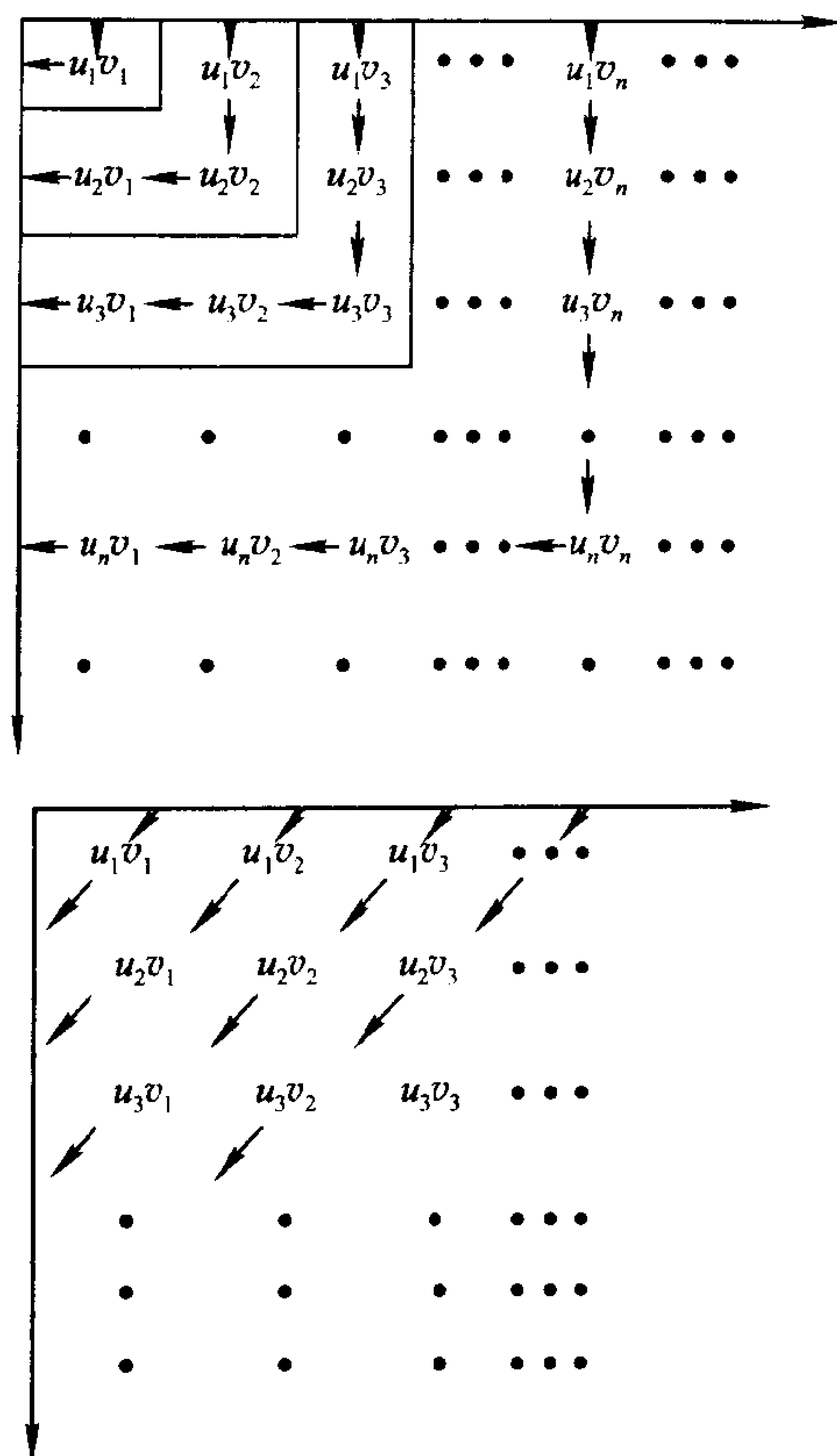


图 12－1

定理12.14(柯西定理)　若级数(11)、(12)都绝对收敛,则对(13)中所有乘积 u_iv_j 按任意顺序排列所得到的级数 $\sum w_n$ 也绝对收敛,且其和等于 AB.

证　以 S_n 表示级数 $\sum|w_n|$ 的部分和,即

$$S_n = |w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n|,$$

其中 $w_k = u_{i_k}v_{j_k}(k=1,2,\cdots,n)$,记

$$m = \max\{i_1,j_1,i_2,j_2,\cdots,i_n,j_n\},$$

$$A_m = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_m|,$$

$$B_m = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_m|,$$

则必有

$$S_n \leqslant A_mB_m. \tag{16}$$

由定理条件,级数(11)与(12)都绝对收敛,因而 $\sum|u_n|$ 与 $\sum|v_n|$ 的部分和数列 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 都是有界的.于是由不等式(15)知 $\{S_n\}$ 是有界的,从而级数 $\sum w_n$ 绝对收敛.

由于绝对收敛级数具有可重排的性质,也就是说级数的和与采用哪一种排列的次序无关.为方便求和,采取级数(14)(按正方形顺序)并对各被加项取括号,即

$$u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1) + (u_1v_3 + u_2v_3 + u_3v_3 + u_3v_2 + u_3v_1) + \cdots,$$

把每一括号作为一项,得新级数

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n + \cdots, \tag{17}$$

它与级数$\sum w_n$同时收敛,且和数相同.现以 P_n 表示级数(17)的部分和,它与级数(11),(12)的部分和 A_n 与B_n 有如下关系式:

$$P_n = A_nB_n.$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} A_nB_n = \lim_{n\to\infty} A_n \lim_{n\to\infty} B_n = AB.$$ □

例2 等比级数

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots, \quad |r| < 1$$

是绝对收敛的.将$(\sum r^n)^2$ 按(15)的顺序排列,则得到

$$\frac{1}{(1-r)^2} = 1 + (r + r) + (r^2 + r^2 + r^2) + \cdots + (\underbrace{r^n + \cdots + r^n}_{n+1个}) + \cdots$$

$$= 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + (n+1)r^n + \cdots.$$ □

三 阿贝耳判别法和狄利克雷判别法

本段介绍两个判别一般项级数收敛性的方法,先引进一个公式:

引理(分部求和公式,也称阿贝耳变换) 设 $\varepsilon_i, v_i (i = 1,2,\cdots,n)$为两组实数,若令

$$\sigma_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_k \qquad (k = 1,2,\cdots,n),$$

则有如下分部求和公式成立:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sigma_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\sigma_2 + \cdots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)\sigma_{n-1} + \varepsilon_n\sigma_n. \tag{18}$$

证 以 $v_1 = \sigma_1, v_k = \sigma_k - \sigma_{k-1} (k = 2,3,\cdots,n)$分别乘以 $\varepsilon_k (k = 1,2,\cdots,n)$,整理后就得所要证的公式(18). □

推论(阿贝耳引理) 若

(i) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是单调数组;

(ii) 对任一正整数 $k (1 \leqslant k \leqslant n)$有$|\sigma_k| \leqslant A$(这里 $\sigma_k = v_1 + \cdots + v_k$),则记 $\varepsilon = \max\limits_k \{|\varepsilon_k|\}$时,有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k\right| \leqslant 3\varepsilon A. \tag{19}$$

证 由(i)知道

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \cdots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$$

都是同号的.于是由分部求和公式及条件(ii)推得

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k\right| = |(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sigma_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\sigma_2 + \cdots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)\sigma_{n-1} + \varepsilon_n\sigma_n|$$

$$\leqslant A|(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)+\cdots+(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)|+A|\varepsilon_n|$$
$$=A|\varepsilon_1-\varepsilon_n|+A|\varepsilon_n|$$
$$\leqslant A(|\varepsilon_1|+2|\varepsilon_n|)$$
$$\leqslant 3\varepsilon A.$$ □

现在讨论级数

$$\sum a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n+\cdots \tag{20}$$

收敛性的判别法.

定理 12.15(阿贝耳判别法) 若$\{a_n\}$为单调有界数列,且级数$\sum b_n$收敛,则级数(20)收敛.

证 由级数$\sum b_n$收敛,依柯西准则,对任给正数ε,存在正数N,使当$n>N$时对任一正整数p,都有

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}b_k\right|<\varepsilon.$$

又由于数列$\{a_n\}$有界,所以存在$M>0$,使$|a_n|\leqslant M$,应用(19)式结果可得到

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}a_kb_k\right|\leqslant 3M\varepsilon.$$

这就说明级数(20)收敛. □

定理 12.16(狄利克雷判别法) 若数列$\{a_n\}$单调递减,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,又级数$\sum b_n$的部分和数列有界,则级数(20)收敛.

证明方法类似于定理 12.15,请读者自证.

由阿贝耳判别法知道,若级数$\sum u_n$收敛,则下述两个级数:

$$\sum\frac{u_n}{n^p}\quad(p>0),\quad \sum\frac{u_n}{\sqrt{n+1}}$$

都收敛.

例 3 若数列$\{a_n\}$具有性质:

$$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant\cdots,\quad \lim_{n\to\infty}a_n=0,$$

则级数$\sum a_n\sin nx$和$\sum a_n\cos nx$对任何$x\in(0,2\pi)$都收敛.

解 因为

$$2\sin\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)=\sin\frac{x}{2}+\left(\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{x}{2}\right)+\cdots$$
$$+\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]$$

$$=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x,$$

当 $x\in(0,2\pi)$时,$\sin\frac{x}{2}\neq 0$,故得到

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}. \tag{21}$$

所以级数$\sum\cos nx$ 的部分和数列当 $x\in(0,2\pi)$时有界,由狄利克雷判别法推得级数$\sum a_n\cos nx$ 收敛.同理可证级数$\sum a_n\sin nx$ 也是收敛的. □

作为例 3 的特殊情形,我们知道级数

$$\sum\frac{\sin nx}{n} \quad 和 \quad \sum\frac{\cos nx}{n}$$

对一切 $x\in(0,2\pi)$都收敛.

习 题

1. 下列级数哪些是绝对收敛,条件收敛或发散的:

(1) $\sum\frac{\sin nx}{n!}$; (2) $\sum(-1)^n\frac{n}{n+1}$;

(3) $\sum\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$; (4) $\sum(-1)^n\sin\frac{2}{n}$;

(5) $\sum\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$; (6) $\sum\frac{(-1)^n\ln(n+1)}{n+1}$;

(7) $\sum(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$; (8) $\sum n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$.

2. 应用阿贝耳判别法或狄利克雷判别法判断下列级数的收敛性:

(1) $\sum\frac{(-1)^n}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$ $(x>0)$;

(2) $\sum\frac{\sin nx}{n^\alpha}, x\in(0,2\pi)$ $(\alpha>0)$;

(3) $\sum(-1)^n\frac{\cos^2 nx}{n}$.

3. 设 $a_n>0, a_n>a_{n+1}(n=1,2,\cdots)$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.证明级数

$$\sum(-1)^{n-1}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

是收敛的.

---

4. 设 p_n, q_n 如(8)式所定义.证明:若$\sum u_n$ 条件收敛,则级数$\sum p_n$ 与$\sum q_n$ 都是发散的.

5. 写出下列级数的乘积:

(1) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}\right)$； (2) $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\right)$.

6. 证明级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$与$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}$绝对收敛，且它们的乘积等于$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+b)^n}{n!}$.

7. 重排级数$\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$，使它成为发散级数.

8. 证明：级数$\sum\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$收敛.

总 练 习 题

1. 证明：若正项级数$\sum u_n$收敛，且数列$\{u_n\}$单调，则$\lim\limits_{n\to\infty} nu_n=0$.

2. 若级数$\sum a_n$与$\sum c_n$都收敛，且成立不等式

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n \quad (n=1,2,\cdots),$$

证明级数$\sum b_n$也收敛.若$\sum a_n$，$\sum c_n$都发散，试问$\sum b_n$一定发散吗？

3. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\neq 0$，且级数$\sum b_n$绝对收敛，证明级数$\sum a_n$也收敛.若上述条件中只知道$\sum b_n$收敛，能推得$\sum a_n$收敛吗？

4. (1)设$\sum u_n$为正项级数，且$\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$，能否断定$\sum u_n$收敛？

(2) 对于级数$\sum u_n$有$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\geqslant 1$，能否断定级数$\sum u_n$不绝对收敛，但可能条件收敛？

(3) 设$\sum u_n$为收敛的正项级数，能否存在一个正数ϵ，使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^{1+\epsilon}}}=c>0.$$

5. 证明：若级数$\sum a_n$收敛，$\sum(b_{n+1}-b_n)$绝对收敛，则级数$\sum a_nb_n$也收敛.

6. 设$a_n>0$，证明级数

$$\sum\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

是收敛的.

7. 证明：若级数$\sum a_n^2$与$\sum b_n^2$收敛，则级数$\sum a_nb_n$和$\sum(a_n+b_n)^2$也收敛，且

$$\left(\sum a_nb_n\right)^2\leqslant\sum a_n^2\cdot\sum b_n^2,$$

$$\left(\sum(a_n+b_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

第十三章　函数列与函数项级数

§1　一致收敛性

我们已经知道可以用收敛数列(或数项级数)来表示或定义一个数.本章将讨论怎样用函数列(或函数项级数)来表示(或定义)一个函数,并研究这个函数所具有的性质.

一　函数列及其一致收敛性

设

$$f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots \tag{1}$$

是一列定义在同一数集 E 上的函数,称为定义在 E 上的**函数列**.(1)也可简单地写作:

$$\{f_n\} \text{ 或 } \quad f_n, \quad n = 1,2,\cdots.$$

设 $x_0 \in E$,以 x_0 代入(1)可得数列

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \cdots, f_n(x_0), \cdots. \tag{2}$$

若数列(2)收敛,则称函数列(1)**在点 x_0 收敛**,x_0 称为函数列(1)的**收敛点**.若数列(2)发散,则称函数列(1)**在点 x_0 发散**.若函数列(1)在数集 $D \subset E$ 上每一点都收敛,则称(1)在**数集 D 上收敛**.这时 D 上每一点 x,都有数列 $\{f_n(x)\}$ 的一个极限值与之相对应,由这个对应法则所确定的 D 上的函数,称为函数列(1)的**极限函数**.若把此极限函数记作 f,则有

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), \qquad x \in D$$

或

$$f_n(x) \to f(x) \qquad (n \to \infty), x \in D.$$

函数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义是:对每一固定的 $x \in D$,任给正数 ε,恒存在正数 N(注意:一般说来 N 值的确定与 ε 和 x 的值都有关,所以也用 $N(\varepsilon, x)$ 表示它们之间的依赖关系),使得当 $n > N$ 时,总有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

使函数列 $\{f_n\}$ 收敛的全体收敛点集合,称为函数列 $\{f_n\}$ 的**收敛域**.

例 1　设 $f_n(x) = x^n, n = 1,2,\cdots$ 为定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的函数列,证明它的

收敛域是$(-1,1]$,且有极限函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}\tag{3}$$

证 任给$\varepsilon>0$(不妨设$\varepsilon<1$),当$0<|x|<1$时,由于

$$|f_n(x)-f(x)|=|x|^n,$$

只要取$N(\varepsilon,x)=\frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}$,当$n>N(\varepsilon,x)$时,就有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

当$x=0$和$x=1$时,则对任何正整数n,都有

$$|f_n(0)-f(0)|=0<\varepsilon,|f_n(1)-f(1)|=0<\varepsilon.$$

这就证得$\{f_n\}$在$(-1,1]$上收敛,且有(3)式所表示的极限函数.

当$|x|>1$时,则有$|x|^n\to+\infty(n\to\infty)$,当$x=-1$时,对应的数列为

$$-1,1,-1,1,\cdots.$$

它显然是发散的.所以函数列$\{x^n\}$在区间$(-1,1]$外都是发散的. □

例2 定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数列$f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$,$n=1,2,\cdots$.由于对任何实数x,都有

$$\left|\frac{\sin nx}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n},$$

故对任给的$\varepsilon>0$,只要$n>N=\frac{1}{\varepsilon}$,就有

$$\left|\frac{\sin nx}{n}-0\right|<\varepsilon.$$

所以函数列$\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$的收敛域为无限区间$(-\infty,+\infty)$,极限函数$f(x)=0$. □

对于函数列,我们不仅要讨论它在哪些点上收敛,而更重要的是要研究极限函数所具有的解析性质.比如能否由函数列每项的连续性,判断出极限函数的连续性.又如极限函数的导数或积分,是否分别是函数列每项导数或积分的极限.对这些问题的讨论,只要求函数列在数集D上的收敛是不够的,必须对它在D上的收敛性提出更高的要求才行,这就是以下所要讨论的一致收敛性问题.

定义1 设函数列$\{f_n\}$与函数f定义在同一数集D上,若对任给的正数ε,总存在某一正整数N,使得当$n>N$时,对一切$x\in D$,都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称函数列$\{f_n\}$在D上**一致收敛**于f,记作

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x)\quad(n\to\infty),\quad x\in D.$$

由定义看到,如果函数列$\{f_n\}$在D上一致收敛,那么对于所给的ε,不管D

上哪一点x,总存在公共的$N(\varepsilon)$(即N的选取仅与ε有关,与x的取值无关),只要$n>N$,都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

由此看到函数列$\{f_n\}$在D上一致收敛,必在D上每一点都收敛.反之,在D上每一点都收敛的函数列$\{f_n\}$,在D上不一定一致收敛.

如上述例2中函数列$\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$,对任给正数$\varepsilon$,不管$x$取$(-\infty,+\infty)$上什么值,都可取$N=\frac{1}{\varepsilon}$(它仅依赖于$\varepsilon$的值),当$n>N$时,恒有$\left|\frac{\sin nx}{n}\right|<\varepsilon$,所以函数列$\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于函数$f(x)=0$.

函数列$\{f_n\}$在D上不一致收敛于函数f,是指它们不满足定义1的条件.但也可以根据定义1对不一致收敛给予正面的陈述.即函数列(1)在D上不一致收敛于f的充要条件是:存在某正数ε_0,对任何正数N,都有D上某一点x'与正整数$n'>N$(注意:x'与n'的取值与N有关),使得

$$|f_n(x')-f(x')|\geqslant\varepsilon.$$

从前面例1中知道,函数列$\{x^n\}$在$(0,1)$上收敛于$f(x)=0$.我们证明它在$(0,1)$上不一致收敛.事实上,令$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$,对任何正数$N$,取正整数$n>N+1$及$x'=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\in(0,1)$,则有

$$|x'^n-0|=1-\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{2}.$$

函数列(1)一致收敛于f,从几何意义上讲:对任何正数ε,存在正整数N,对于一切序号大于N的曲线$y=f_n(x)$,都落在以曲线$y=f(x)+\varepsilon$与$y=f(x)-\varepsilon$为边(即以曲线$y=f(x)$为"中心线",宽度为2ε)的带形区域内(如图13-1所示).

函数列$\{x^n\}$在区间$(0,1)$内不一致收敛,从几何意义上讲:存在某个事先给定的$\varepsilon(<1)$,无论N多么大,总有曲线$y=x^n(n>N)$不能全部地落在以$y=\varepsilon$与$y=-\varepsilon$为边的带形区域内,如图13-2所示,若函数列$\{x^n\}$只限于在区间$(0,b)(b<1)$内讨论,容易看到,只要$n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln b}$(其中$0<\varepsilon<1$),曲线$y=x^n$就全部落在以$y=\varepsilon$和$y=-\varepsilon$为上下边的带形区域内.所以$\{x^n\}$在$(0,b)$内是一致收敛的.

定理13.1(函数列一致收敛的柯西准则)　函数列$\{f_n\}$在数集D上一致收敛的充要条件是:对任给正数ε,总存在正数N,使得当$n,m>N$时,对一切$x\in D$,都有

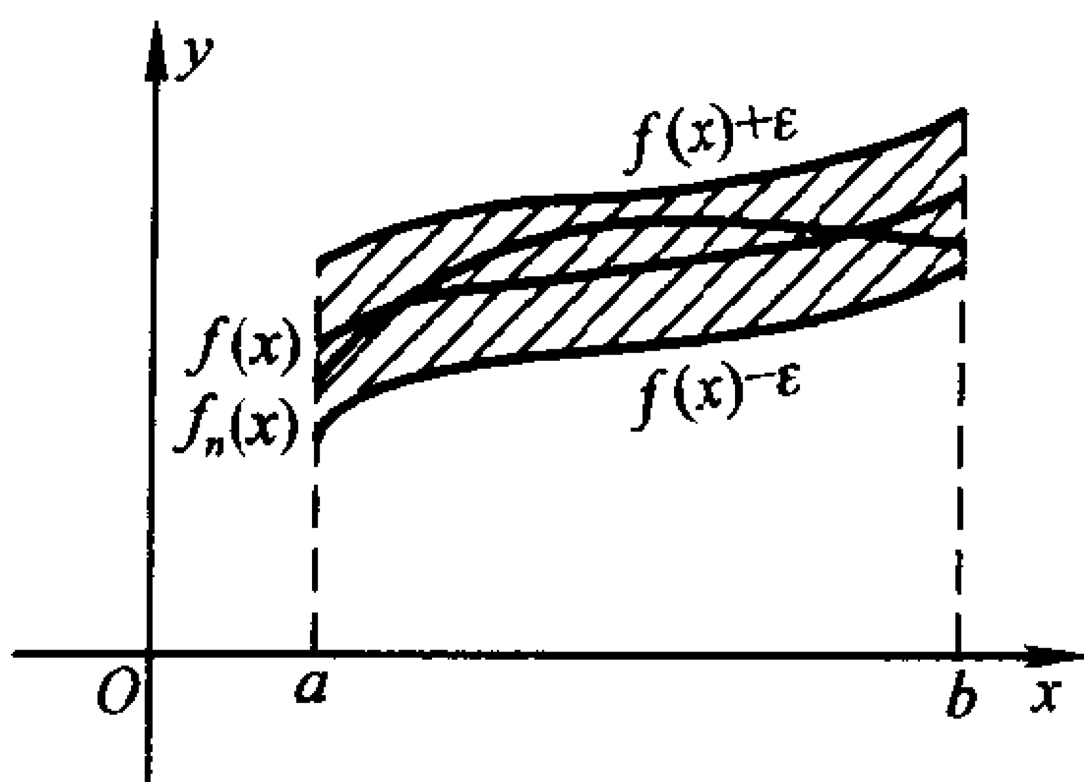


图 13－1

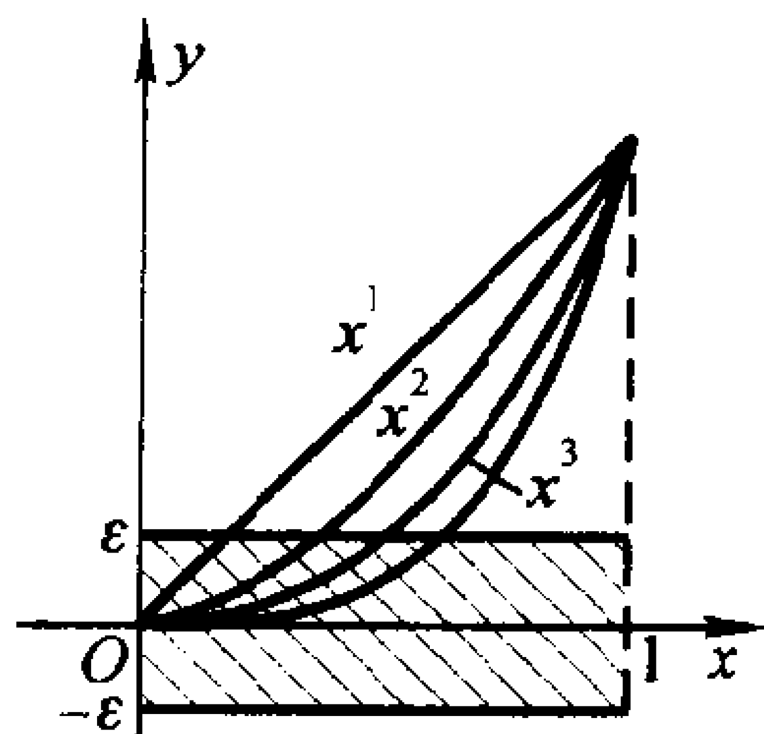


图 13－2

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon. \tag{4}$$

证 ［必要性］ 设 $f_n(x)\rightrightarrows f(x) \quad (n\to\infty), x\in D$,即对任给 $\varepsilon>0$,存在正数 N,使得当 $n>N$ 时,对一切 $x\in D$,都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

于是当 $n,m>N$,由(5)就有

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_m(x)| &\leqslant |f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f_m(x)|\\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

［充分性］ 若条件(4)成立,由数列收敛的柯西准则,$\{f_n\}$在 D 上任一点都收敛,记其极限函数为 $f(x), x\in D$. 现固定(4)式中的 n,让 $m\to\infty$,于是当 $n>N$ 时,对一切 $x\in D$ 都有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

由定义 1,$f_n(x)\rightrightarrows f(x) \quad (n\to\infty), x\in D$. □

根据一致收敛定义可推出下述定理:

定理 13.2 函数列$\{f_n\}$在区间 D 上一致收敛于 f 的充要条件是:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0. \tag{6}$$

证 ［必要性］ 若 $f_n(x)\rightrightarrows f(x) \quad (n\to\infty), x\in D$. 则对任给的正数 ε,存在不依赖于 x 的正整数N,当 $n>N$ 时,有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\quad x\in D.$$

由上确界的定义,亦有

$$\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

这就证得(6)式成立.

［充分性］ 由假设,对任给 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,有

$$\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon. \tag{7}$$

因为对一切 $x\in D$,总有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|.$$

故由(7)式得

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

于是$\{f_n\}$在 D 上一致收敛于 f. □

在判断函数列是否一致收敛上定理 13.2 更为方便一些(其缺点是必须事先知道它的极限函数),如例 2,由于

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|\frac{\sin nx}{n}-0\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

所以在$(-\infty,+\infty)$上,$\frac{\sin nx}{n}\rightrightarrows 0\ (n\to\infty)$.

例 3　定义在$[0,1]$上的函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}2n^2x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2n},\\ 2n-2n^2x, & \frac{1}{2n}<x\leqslant\frac{1}{n},\\ 0, & \frac{1}{n}<x\leqslant 1,\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots,\tag{8}$$

其中 $n=1,2,3$ 的图象如图 13－3 所示.

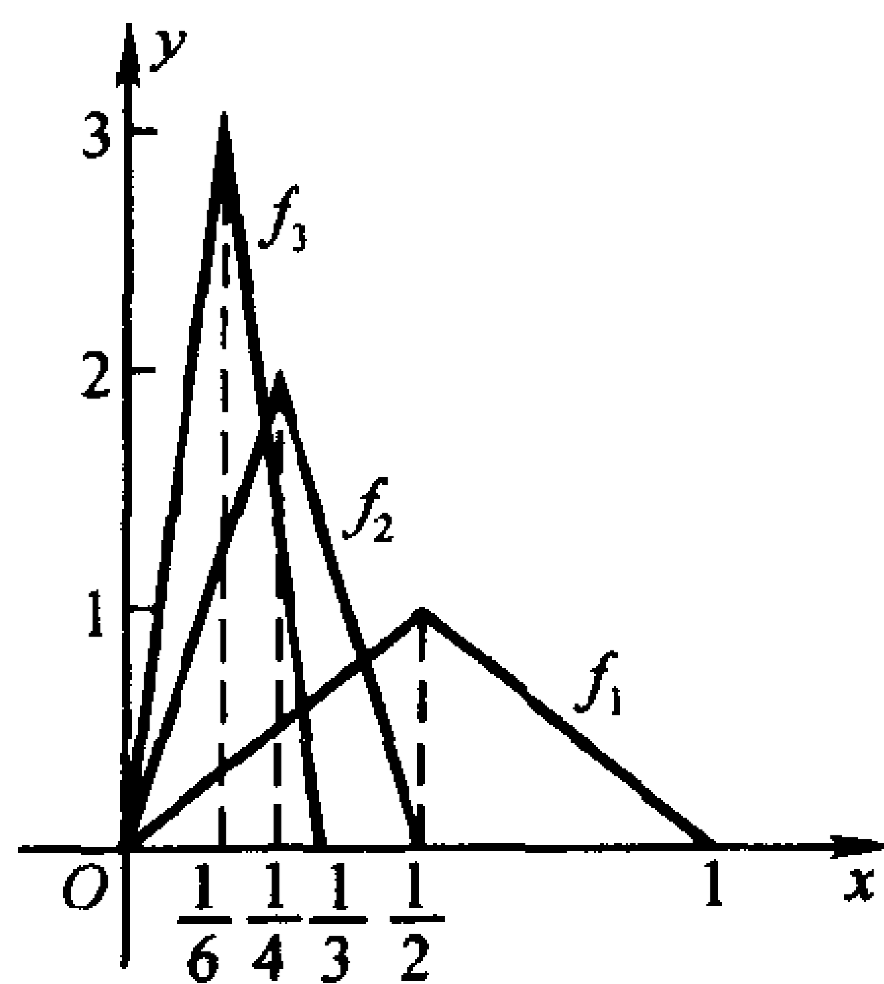


图 13－3

由于 $f_n(0)=0$,故 $f(0)=\lim_{n\to\infty}f_n(0)=0$. 当 $0<x\leqslant 1$ 时,只要 $n>\frac{1}{x}$,就有 $f_n(x)=0$,故在$(0,1]$上有 $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$.于是函数列(8)在$[0,1]$上的极限函数 $f(x)=0$.又由于

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=f_n\left(\frac{1}{2n}\right)=n\to\infty\quad(n\to\infty),$$

所以函数列(8)在$[0,1]$上不一致收敛. □

二　函数项级数及其一致收敛性

设$\{u_n(x)\}$是定义在数集 E 上的一个函数列,表达式

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots,x\in E\tag{9}$$

称为定义在 E 上的**函数项级数**,简记为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 或 $\sum u_n(x)$.称

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),\quad x\in E,n=1,2,\cdots\tag{10}$$

为函数项级数(9)的**部分和函数列**.

若 $x_0 \in E$,数项级数

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots \tag{11}$$

收敛,即部分和 $S_n(x_0) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x_0)$ 当 $n \to \infty$ 时极限存在,则称级数(9)**在点 x_0 收敛**,x_0 称为级数(9)的**收敛点**.若级数(11)发散,则称级数(9)**在点 x_0 发散**.若级数(9)在 E 的某个子集 D 上每点都收敛,则称级数(9)**在 D 上收敛**.若 D 为级数(9)全体收敛点的集合,这时则称 D 为级数(9)的**收敛域**.级数(9)在 D 上每一点 x 与其所对应的数项级数(11)的和 $S(x)$ 构成一个定义在 D 上的函数,称为级数(9)的**和函数**,并写作

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = S(x), \quad x \in D,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \quad x \in D.$$

也就是说,函数项级数(9)的收敛性就是指它的部分和函数列(10)的收敛性.

例 4 定义在$(-\infty, +\infty)$上的函数项级数(几何级数)

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \tag{12}$$

的部分和函数为 $S_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$.当 $|x|<1$ 时,

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{1-x}.$$

所以几何级数(12)在$(-1,1)$内收敛于和函数 $S(x) = \frac{1}{1-x}$;当 $|x| \geqslant 1$ 时,几何级数是发散的. □

函数项级数(9)的一致收敛性定义如下:

定义 2 设$\{S_n(x)\}$是函数项级数$\sum u_n(x)$的部分和函数列.若$\{S_n(x)\}$在数集 D 上一致收敛于函数$S(x)$,则称函数项级数$\sum u_n(x)$在 D 上**一致收敛**于函数$S(x)$,或称$\sum u_n(x)$在 D 上一致收敛.

由于函数项级数的一致收敛性是由它的部分和函数列来确定,所以由前段中有关函数列一致收敛的定理,都可推出相应的有关函数项级数的定理:

定理 13.3(一致收敛的柯西准则) 函数项级数$\sum u_n(x)$在数集 D 上一致收敛的充要条件为:对任给的正数 ε,总存在某正整数 N,使得当 $n>N$ 时,对一切 $x \in D$ 和一切正整数 p,都有

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

或

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon.$$

此定理中当 $p=1$ 时,得到函数项级数一致收敛的一个必要条件.

推论 函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛的必要条件是函数列 $\{u_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于零.

设函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 D 上的和函数为 $S(x)$,称

$$R_n(x)=S(x)-S_n(x)$$

为函数项级数 $\sum u_n(x)$ 的**余项**.

定理 13.4 函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛于 $S(x)$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|S(x)-S_n(x)|=0.$$

我们再来看例 4 中的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$,若仅在 $[-a,a]$ $(a<1)$ 上讨论,则由

$$\sup_{x\in[-a,a]}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\in[-a,a]}\left|\frac{-x^n}{1-x}\right|$$

$$=\frac{a^n}{1-a}\to 0\qquad(n\to\infty)$$

可得级数 $\sum x^n$ 在 $[-a,a]$ 上一致收敛.若在 $(-1,1)$ 上讨论这个级数,则由

$$\sup_{x\in(-1,1)}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\in(-1,1)}\left|\frac{x^n}{x-1}\right|\geqslant\left|\frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}{1-\frac{n}{n+1}}\right|$$

$$=n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}\to\infty\quad(n\to\infty)$$

知道级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 在 $(-1,1)$ 内不一致收敛.

三 函数项级数的一致收敛性判别法

判别函数项级数的一致收敛性除了根据定义或定理 13.4 外,有些级数还可根据级数各项的特性来判别.

定理 13.5(魏尔斯特拉斯判别法) 设函数项级数 $\sum u_n(x)$ 定义在数集 D 上,$\sum M_n$ 为收敛的正项级数,若对一切 $x\in D$,有

$$|u_n(x)|\leqslant M_n,\quad n=1,2,\cdots,\tag{13}$$

则函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

证 由假设正项级数 $\sum M_n$ 收敛,根据数项级数的柯西准则,任给正数 ε,存在某正整数 N,使得当 $n>N$ 及任何正整数 p,有

$$|M_{n+1}+\cdots+M_{n+p}|=M_{n+1}+\cdots+M_{n+p}<\varepsilon.$$

又由(13)式对一切 $x\in D$ 有

$$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|\leqslant|u_{n+1}(x)|+\cdots+|u_{n+p}(x)|$$
$$\leqslant M_{n+1}+\cdots+M_{n+p}<\varepsilon.$$

根据函数项级数一致收敛的柯西准则,级数$\sum u_n(x)$在D上一致收敛. □

例5 函数项级数

$$\sum\frac{\sin nx}{n^2},\qquad\sum\frac{\cos nx}{n^2}$$

在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.因为对一切$x\in(-\infty,+\infty)$有

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2},\qquad\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2},$$

而正项级数$\sum\frac{1}{n^2}$是收敛的. □

定理13.5也称为***M*判别法或优级数判别法**.当级数$\sum u_n(x)$与级数$\sum M_n$在区间$[a,b]$上成立关系式(13)时,则称级数$\sum M_n$在$[a,b]$上优于级数$\sum u_n(x)$,或称$\sum M_n$为$\sum u_n(x)$的**优级数**.

下面讨论定义在区间I上形如

$$\sum u_n(x)v_n(x)=u_1(x)v_1(x)+u_2(x)v_2(x)+\cdots+u_n(x)v_n(x)+\cdots\tag{14}$$

的函数项级数的一致收敛性判别法,它与数项级数一样,也是基于阿贝耳分部求和公式(第十二章§3的引理).

定理13.6(阿贝耳判别法) 设

(i) $\sum u_n(x)$在区间I上一致收敛;

(ii) 对于每一个$x\in I$,$\{v_n(x)\}$是单调的;

(iii) $\{v_n(x)\}$在I上一致有界,即对一切$x\in I$和正整数n,存在正数M,使得

$$|v_n(x)|\leqslant M,$$

则级数(14)在I上一致收敛.

证 由(i),任给$\varepsilon>0$,存在某正数N,使得当$n>N$及任何正整数p,对一切$x\in I$,有

$$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon$$

又由(ii),(iii)及阿贝耳引理(第十二章§3引理的推论)得到

$$|u_{n+1}(x)v_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)v_{n+p}(x)|$$
$$\leqslant(|v_{n+1}(x)|+2|v_{n+1}(x)|)\varepsilon\leqslant 3M\varepsilon.$$

于是根据函数项级数一致收敛性的柯西准则就得到本定理的结论. □

定理13.7(狄利克雷判别法) 设

(i) $\sum u_n(x)$的部分和函数列

$$U_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\quad(n=1,2,\cdots)$$

在 I 上一致有界；

(ii) 对于每一个 $x\in I$，$\{U_n(x)\}$是单调的；

(iii) 在 I 上 $v_n(x)\rightrightarrows 0(n\to\infty)$，

则级数(14)在 I 上一致收敛.

证 证法与定理 13.6 相仿.由(i)，存在正数 M，对一切 $x\in I$，有 $|U_n(x)|\leqslant M$.因此当 n,p 为任何正整数时，

$$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|=|U_{n+p}(x)-U_n(x)|\leqslant 2M.$$

对任何一个 $x\in I$，再由(ii)及阿贝耳引理，得到

$$|u_{n+1}(x)v_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)v_{n+p}(x)|$$
$$\leqslant 2M(|v_{n+1}(x)|+2|v_{n+p}(x)|).$$

再由(iii)，对任给的 $\varepsilon>0$，存在正数 N，当 $n>N$ 时，对一切 $x\in I$，有

$$|v_n(x)|<\varepsilon,$$

所以

$$|u_{n+1}(x)v_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)v_{n+p}(x)|<2M(\varepsilon+2\varepsilon)=6M\varepsilon.$$

于是由一致收敛性的柯西准则，级数(14)在 I 上一致收敛. □

例 6 函数项级数

$$\sum\frac{(-1)^n(x+n)^n}{n^{n+1}}$$

在[0,1]上一致收敛.因为记 $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n}$，$v_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ 时，由阿贝耳判别法(定理 13.6)就能得到结果. □

例 7 若数列$\{a_n\}$单调且收敛于零，则级数

$$\sum a_n\cos nx \tag{15}$$

在$[\alpha,2\pi-\alpha](0<\alpha<\pi)$上一致收敛.

证 由第十二章§3(21)式，在$[\alpha,2\pi-\alpha]$上有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|=\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}+\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{2},$$

所以级数$\sum\cos nx$的部分和函数列在$[\alpha,2\pi-\alpha]$上一致有界①，于是令

$$u_n(x)=\cos nx,v_n(x)=a_n,$$

则由狄利克雷判别法可得级数(15)在$[\alpha,2\pi-\alpha]$上一致收敛. □

对于例7中的级数(15)，只要$\{a_n\}$单调且收敛于零，那么级数(15)在不包含$2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$的任何闭区间上都一致收敛.

习 题

1. 讨论下列函数列在所示区间D上是否一致收敛，并说明理由：

(1) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}},\quad n=1,2,\cdots,D=(-1,1)$;

(2) $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2},n=1,2,\cdots,D=(-\infty,+\infty)$;

(3) $f_n(x)=\begin{cases}-(n+1)x+1, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{n+1},\\ 0, & \frac{1}{n+1}<x<1,n=1,2,\cdots;\end{cases}$

(4) $f_n(x)=\frac{x}{n},n=1,2,\cdots,(\text{i})D=[0,+\infty),(\text{ii})D=[0,1\,000]$;

(5) $f_n(x)=\sin\frac{x}{n},n=1,2,\cdots,(\text{i})D=[-l,l],(\text{ii})D=(-\infty,+\infty)$.

2. 证明：设$f_n(x)\to f(x),x\in D,a_n\to0\quad(n\to\infty)\quad(a_n>0)$.若对每一个正整数$n$有$|f_n(x)-f(x)|\leqslant a_n,x\in D$,则$\{f_n\}$在$D$上一致收敛于$f$.

3. 判别下列函数项级数在所示区间上的一致收敛性：

(1) $\sum\frac{x^n}{(n-1)!},x\in[-r,r]$;　(2) $\sum\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n},x\in(-\infty,+\infty)$;

(3) $\sum\frac{n}{x^n},|x|>r\geqslant1$;　(4) $\sum\frac{x^n}{n^2},x\in[0,1]$;

(5) $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n},x\in(-\infty,+\infty)$;　(6) $\sum\frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}},x\in(-\infty,+\infty)$.

4. 设函数项级数$\sum u_n(x)$在D上一致收敛于$S(x)$,函数$g(x)$在D上有界.证明级数$\sum g(x)u_n(x)$在D上一致收敛于$g(x)S(x)$.

5. 若在区间I上，对任何正整数n,

$$|u_n(x)|\leqslant v_n(x),$$

证明当$\sum v_n(x)$在I上一致收敛时，级数$\sum u_n(x)$在I上也一致收敛.

6. 设$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$是$[a,b]$上的单调函数，证明：若$\sum u_n(a)$与$\sum u_n(b)$都绝对收敛，则$\sum u_n(x)$在$[a,b]$上绝对且一致收敛.

---

① 对于定义在D上函数列$\{f_n(x)\}$,若存在正数M,对一切$x\in D$,都有$|f_n(x)|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$成立，则称$\{f_n(x)\}$在$D$上**一致有界**.

7. 在[0,1]上定义函数列

$$u_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=\frac{1}{n},\\ 0, & x\neq\frac{1}{n},\end{cases}\quad n=1,2,\cdots,$$

证明级数$\sum u_n(x)$在[0,1]上一致收敛,但它不存在优级数.

---

8. 讨论下列函数列或函数项级数在所示区间 D 上的敛散性:

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1-2n}{(x^2+n^2)[x^2+(n-1)^2]}, D=[-1,1]$;

(2) $\sum 2^n\sin\frac{x}{3^n}, D=(0,+\infty)$;

(3) $\sum\frac{x^2}{[1+(n-1)x^2](1+nx^2)}, D=(0,+\infty)$;

(4) $\sum\frac{x^n}{\sqrt{n}}, D=[-1,0]$;

(5) $\sum(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, D=(-1,1)$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, D=(0,2\pi)$.

9. 证明:级数$\sum(-1)^n x^n(1-x)$在[0,1]上绝对并一致收敛,但由其各项绝对值组成的级数在[0,1]上却不一致收敛.

10. 设 f 为定义在区间(a,b)内的任一函数,记

$$f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n}, n=1,2,\cdots,$$

证明函数列$\{f_n\}$在(a,b)内一致收敛于 f.

11. 设$\{u_n(x)\}$为$[a,b]$上正的递减且收敛于零的函数列,每一个 $u_n(x)$都是$[a,b]$上的单调函数,则级数

$$u_1(x)-u_2(x)+u_3(x)-u_4(x)+\cdots$$

在$[a,b]$上不仅收敛,而且一致收敛.

§2 一致收敛函数列与函数项级数的性质

本节讨论由函数列与函数项级数所确定的函数的连续性、可积性与可微性.

定理 13.8 设函数列$\{f_n\}$在$(a,x_0)\cup(x_0,b)$上一致收敛于 $f(x)$,且对每个 n, $\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)=a_n$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$均存在且相等.

证 先证$\{a_n\}$是收敛数列. 对任意 $\varepsilon>0$,由于$\{f_n\}$一致收敛,故有 N,当 $n>N$和任意正整数 p,对一切 $x\in(a,x_0)\cup(x_0,b)$有

$$|f_n(x)-f_{n+p}(x)|<\varepsilon. \tag{1}$$

从而

$$|a_n - a_{n+p}| = \lim_{x \to x_0} |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leqslant \varepsilon.$$

这样由柯西准则可知$\{a_n\}$是收敛数列.

设$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$. 再证$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

由于$f_n(x)$一致收敛于$f(x)$及a_n收敛于A,因此对任意$\varepsilon>0$,存在正数N,当$n>N$时,对任意$x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad 和 \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

同时成立.特别取$n = N+1$,有

$$|f_{N+1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, |a_{N+1} - A| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又$\lim\limits_{x \to x_0} f_{N+1}(x) = a_{N+1}$,故存在$\delta>0$,当$0<|x - x_0|<\delta$时,

$$|f_{N+1}(x) - a_{N+1}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

这样,当x满足$0<|x - x_0|<\delta$时,

$$|f(x) - A| \leqslant |f(x) - f_{N+1}(x)| + |f_{N+1}(x) - a_{N+1}| + |a_{N+1} - A|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

即$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. □

这个定理指出:在一致收敛的条件下,$\{f_n(x)\}$中两个独立变量x与n,在分别求极限时其求极限的顺序可以交换,即

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x). \tag{2}$$

类似地,若$f_n(x)$在(a,b)上一致收敛且$\lim\limits_{x \to a^+} f_n(x)$存在,可推得$\lim\limits_{x \to a^+} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{x \to a^+} f_n(x)$;若$f_n(x)$在$(a,b)$上一致收敛和$\lim\limits_{x \to b^-} f_n(x)$存在,则可推得$\lim\limits_{x \to b^-} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{x \to b^-} f_n(x)$.

由定理13.8可得到以下定理.

定理13.9(连续性) 若函数列$\{f_n\}$在区间I上一致收敛,且每一项都连续,则其极限函数f在I上也连续.

证 设x_0为I上任一点.由于$\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$,于是由定理13.8知$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$亦存在,且$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$,因此$f(x)$在$x_0$上连续. □

由定理13.9可知:若各项为连续函数的函数列在区间I上其极限函数不连续,则此函数列在区间I上不一致收敛.

例如:函数列$\{x^n\}$的各项在$(-1,1]$上都是连续的,但其极限函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1<x<1,\\ 1, & x=1\end{cases}$$

在$x=1$时不连续,从而推得$\{x^n\}$在$(-1,1]$上不一致收敛.

定理 13.10(可积性) 若函数列$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛,且每一项都连续,则

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

证 设f为函数列$\{f_n\}$在$[a,b]$上的极限函数.由定理 13.9,f在$[a,b]$上连续,从而$f_n(n=1,2,\cdots)$与f在$[a,b]$上都可积.

因为在$[a,b]$上$f_n \rightrightarrows f(n\to\infty)$,故对任给正数$\varepsilon$,存在$N$,当$n>N$时,对一切$x\in[a,b]$,都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

再根据定积分的性质,当$n>N$时有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x\\ &\leqslant \varepsilon(b-a).\end{aligned}$$

这就证明了等式(3). □

这个定理指出:在一致收敛的条件下,极限运算与积分运算的顺序可以交换.

例 1 设函数

$$f_n(x)=\begin{cases}2n\alpha_n, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2n},\\ 2\alpha_n-2n\alpha_n x, & \dfrac{1}{2n}\leqslant x<\dfrac{1}{n},\\ 0, & \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots.$$

其图象如图 13-4 所示.

显然$\{f_n(x)\}$是$[0,1]$上连续函数列,且对任意$x\in[0,1]$,$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$.又$\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0|=\alpha_n$,因此$\{f_n(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛于 0 的充要条件是$\alpha_n\to 0(n\to\infty)$.

由于$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\alpha_n}{2n}$,因此$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x\to\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$的充要条件是

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n}=0$. 这样当 $a_n\equiv 1$ 时,虽然 $\{f_n(x)\}$ 不一致收敛于 $f(x)$,但定理 13.10 的结论仍成立. 但当 $a_n=n$ 时,$\{f_n(x)\}$ 不一致收敛于 $f(x)$,且 $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x\equiv\frac{1}{2}$ 也不收敛于 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$. □

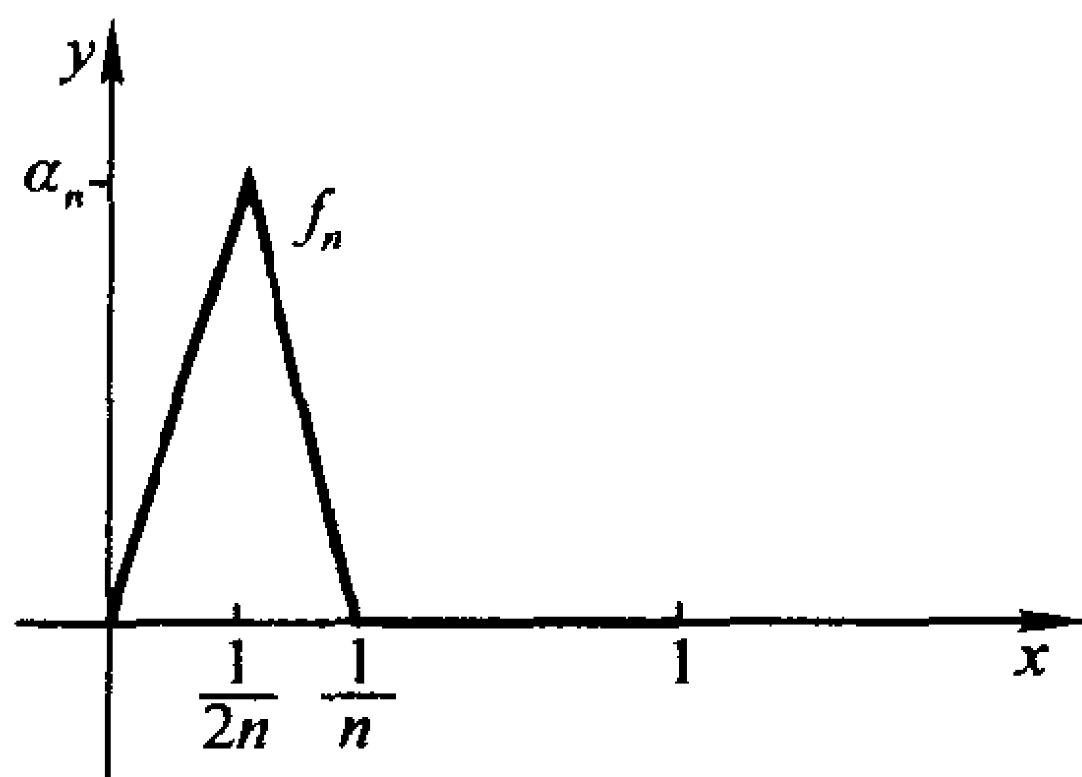


图 13-4

例 1 说明当 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 $f(x)$ 时,一致收敛性是极限运算与积分运算交换的充分条件,但不是必要条件.

定理 13.11(可微性) 设 $\{f_n\}$ 为定义在 $[a,b]$ 上的函数列,若 $x_0\in[a,b]$ 为 $\{f_n\}$ 的收敛点,$\{f_n\}$ 的每一项在 $[a,b]$ 上有连续的导数,且 $\{f'_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x). \tag{4}$$

证 设 $f_n(x_0)\to A(n\to\infty)$,$f'_n\rightrightarrows g(n\to\infty)$,$x\in[a,b]$. 我们要证明函数列 $\{f_n\}$ 在区间 $[a,b]$ 上收敛,且其极限函数的导数存在且等于 g.

由定理条件,对任一 $x\in[a,b]$,总有

$$f_n(x)=f_n(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'_n(t)\mathrm{d}t.$$

当 $n\to\infty$ 时,右边第一项极限为 A,第二项极限为 $\int_{x_0}^{x}g(t)\mathrm{d}t$ (定理 13.10),所以左边极限存在,记为 f,则有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}g(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $f(x_0)=A$. 由 g 的连续性及微积分学基本定理(第十章 §5)推得

$$f'=g.$$

这就证明了等式(4). □

在定理 13.11 的条件下,还可推出在 $[a,b]$ 上 $f_n\rightrightarrows f(n\to\infty)$,请读者自己证明.

与前面两个定理一样,一致收敛条件是极限运算与求导运算交换的充分条件,而不是必要条件.

例 2 函数列

$$f_n(x)=\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2),\quad n=1,2,\cdots$$

与

$$f_n'(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2},\quad n=1,2,\cdots$$

在[0,1]上都收敛于0,由于

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[0,1]}|f_n'(x)-f'(x)|=\frac{1}{2},$$

所以导函数列$\{f_n'(x)\}$在[0,1]上不一致收敛,但有

$$\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=0=\left[\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right]'.$$ □

在上述三个定理中,我们都可举出函数列不一致收敛但定理结论成立的例子.在今后的进一步学习中(如实变函数论)我们将讨论使上述定理成立的较弱的条件.但在目前的一般情况下,只有满足一致收敛的条件,才能保证定理结论的成立.

现在讨论定义在区间$[a,b]$上函数项级数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{5}$$

的连续性、逐项求积与逐项求导的性质,这些性质可由函数列的相应性质推出.

定理 13.12(连续性) 若函数项级数$\sum u_n(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛,且每一项都连续,则其和函数在$[a,b]$上也连续.

这个定理指出:在一致收敛条件下,(无限项)求和运算与求极限运算可以交换顺序,即

$$\sum\left(\lim_{x\to x_0}u_n(x)\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\sum u_n(x)\right). \tag{6}$$

定理13.13(逐项求积) 若函数项级数$\sum u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛,且每一项$u_n(x)$都连续,则

$$\sum\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\sum u_n(x)\mathrm{d}x. \tag{7}$$

定理13.14(逐项求导) 若函数项级数$\sum u_n(x)$在$[a,b]$上每一项都有连续的导函数,$x_0\in[a,b]$为$\sum u_n(x)$的收敛点,且$\sum u_n'(x)$在$[a,b]$上一致收敛,则

$$\sum\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x)\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum u_n(x)\right). \tag{8}$$

定理 13.13 和 13.14 指出,在一致收敛条件下,逐项求积或求导后求和等于求和后再求积或求导.

最后,我们指出,本节中六个定理的意义不只是检验函数列或函数项级数是否满足关系式(2)-(4),(6)-(8),更重要的是根据定理的条件,即使没有求出极限函数或和函数,也能由函数列或函数项级数本身获得极限函数或和函数的解析性质.

例3 设

$$u_n(x)=\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2),\quad n=1,2,\cdots.$$

证明函数项级数$\sum u_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛,并讨论其和函数在$[0,1]$上的连续性、可积性与可微性.

证 对每一个n,易见$u_n(x)$为$[0,1]$上增函数,故有

$$u_n(x)\leqslant u_n(1)=\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2),\quad n=1,2,\cdots.$$

又当$t\geqslant 1$时,有不等式$\ln(1+t^2)<t$,所以

$$u_n(x)\leqslant\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2)<\frac{1}{n^3}\cdot n=\frac{1}{n^2},\quad n=1,2,\cdots.$$

以收敛级数$\sum\frac{1}{n^2}$为$\sum u_n(x)$的优级数,推得$\sum u_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛.

由于每一个$u_n(x)$在$[0,1]$上连续,根据定理13.12与定理13.13,$\sum u_n(x)$的和函数$S(x)$在$[0,1]$上连续且可积.又由

$$u_n'(x)=\frac{2x}{n(1+n^2x^2)}\leqslant\frac{2x}{n\cdot 2nx}=\frac{1}{n^2},\quad n=1,2,\cdots,$$

即$\sum\frac{1}{n^2}$也是$\sum u_n'(x)$的优级数,故$\sum u'_n(x)$也在$[0,1]$上一致收敛.由定理13.14,得$S(x)$在$[0,1]$上可微. □

习 题

1. 讨论下列各函数列$\{f_n\}$在所定义的区间上:

(a) $\{f_n\}$与$\{f_n'\}$的一致收敛性;

(b) $\{f_n\}$是否有定理13.9,13.10,13.11的条件与结论.

(1) $f_n(x)=\frac{2x+n}{x+n},x\in[0,b]$; (2) $f_n(x)=x-\frac{x^n}{n},x\in[0,1]$;

(3) $f_n(x)=nxe^{-nx^2},x\in[0,1]$.

2. 证明:若函数列$\{f_n\}$在$[a,b]$上满足定理13.11的条件,则$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛.

3. 证明定理13.12和13.14.

4. 设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n^2},x\in[-1,1]$,计算积分$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t$.

5. 设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}},x\in(-\infty,+\infty)$,计算积分$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t$.

6. 设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx},x>0$,计算$\int_{\ln 2}^{\ln 3}S(t)\mathrm{d}t$.

7. 证明:函数$f(x)=\sum\frac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty,+\infty)$上连续,且有连续的导函数.

8. 证明：定义在$[0,2\pi]$上的函数项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n\cos nx(0<r<1)$，满足定理13.13条件，且$\int_0^{2\pi}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n\cos nx\right)\mathrm{d}x = 2\pi$.

---

9. 讨论下列函数列在所定义区间上的一致收敛性及极限函数的连续性、可微性和可积性：

(1) $f_n(x)=xe^{-nx^2}, n=1,2,\cdots, x\in[-l,l]$;

(2) $f_n(x)=\dfrac{nx}{nx+1},\quad n=1,2,\cdots,$

(i) $x\in[0,+\infty)$,　　(ii) $x\in[a,+\infty)\quad(a>0)$.

10. 证明函数

$$S(x)=\sum\frac{1}{n^x}$$

在$(1,+\infty)$内连续，且有连续的各阶导数.

11. 设f在$(-\infty,+\infty)$上有任何阶导数，记$F_n=f^{(n)}$，且在任何有限区间内

$$F_n\rightrightarrows\varphi(n\to\infty),$$

试证$\varphi(x)=ce^x$（c为常数）.

总练习题

1. 试问k为何值时，下列函数列$\{f_n\}$一致收敛：

(1) $f_n(x)=xn^ke^{-nx}, 0\leqslant x<\infty$;

(2)

$$f_n(x)=\begin{cases} xn^k, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{n},\\ \left(\dfrac{2}{n}-x\right)n^k, & \dfrac{1}{n}<x\leqslant\dfrac{2}{n},\\ 0, & \dfrac{2}{n}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

2. 证明：(1)若$f_n(x)\rightrightarrows f(x), x\in I$，且$f$在$I$上有界，则$\{f_n\}$至多除有限项外在$I$上是一致有界的；

(2) 若$f_n(x)\rightrightarrows f(x)(n\to\infty), x\in I$，且对每个正整数$n$，$f_n$在$I$上有界，则$\{f_n\}$在$I$上一致有界.

3. 设f为$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$上的连续函数，证明：

(1) $\{x^nf(x)\}$在$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$上收敛；

(2) $\{x^nf(x)\}$在$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$上一致收敛的充要条件是$f(1)=0$.

4. 若把定理 13.10 中一致收敛函数列 $\{f_n\}$ 的每一项在 $[a,b]$ 上连续改为在 $[a,b]$ 上可积,试证 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上的极限函数在 $[a,b]$ 上也可积.

5. 设级数 $\sum a_n$ 收敛,证明

$$\lim_{x\to 0^+}\sum\frac{a_n}{n^x}=\sum a_n.$$

6. 设可微函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛, $\{f'_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界,证明: $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

第十四章 幂级数

§1 幂级数

本章将讨论由幂级数列$\{a_n(x-x_0)^n\}$所产生的函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots, \tag{1}$$

它称为**幂级数**,是一类最简单的函数项级数,从某种意义上说,它也可以看作是多项式函数的延伸.幂级数在理论和实际上都有很多应用,特别在应用它表示函数方面,使我们对它的作用有许多新的认识.

下面将着重讨论 $x_0=0$,即

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{2}$$

的情形,因为只要把(2)中的 x 换成$x-x_0$,就得到(1).

一 幂级数的收敛区间

首先讨论幂级数(2)的收敛性问题.显然任意一个幂级数(2)在 $x=0$ 处总是收敛的.除此之外,它还在哪些点收敛? 我们有下面重要的定理.

定理 14.1(阿贝耳定理) 若幂级数(2)在 $x=\bar{x}\neq0$ 收敛,则对满足不等式$|x|<|\bar{x}|$的任何 x,幂级数(2)收敛而且绝对收敛;若幂级数(2)在 $x=\bar{x}$ 时发散,则对满足不等式$|x|>|\bar{x}|$的任何 x,幂级数(2)发散.

证 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\bar{x}^n$ 收敛,从而数列$\{a_n\bar{x}^n\}$收敛于零且有界,即存在某正数 M,使得

$$|a_n\bar{x}^n|<M \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

另一方面对任意一个满足不等式$|x|<|\bar{x}|$的 x,设

$$r=\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|<1,$$

则有

$$|a_nx^n| = \left|a_n\bar{x}^n \cdot \frac{x^n}{\bar{x}^n}\right| = |a_n\bar{x}^n|\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n < Mr^n.$$

由于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} Mr^n$ 收敛,故幂级数(2) 当 $|x|<|\bar{x}|$ 时绝对收敛.

现在证明定理的第二部分.设幂级数(2)在 $x=\bar{x}$ 时发散,如果存在某一个 x_0,它满足不等式 $|x_0|>|\bar{x}|$,且使级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx_0^n$ 收敛.则由定理第一部分知道,幂级数(2) 应在 $x=\bar{x}$ 时绝对收敛,这与假设相矛盾,所以对一切满足不等式 $|x|>|\bar{x}|$ 的 x,幂级数(2) 都发散. □

由此定理知道:幂级数(2)的收敛域是以原点为中心的区间.若以 $2R$ 表示区间的长度,则称 R 为幂级数的**收敛半径**.实际上,它就是使得幂级数(2)收敛的那些收敛点的绝对值的上确界.所以

当 $R=0$ 时,幂级数(2)仅在 $x=0$ 处收敛;

当 $R=+\infty$时,幂级数(2)在$(-\infty,+\infty)$上收敛;

当$0<R<+\infty$时,幂级数(2)在$(-R,R)$内收敛;对一切满足不等式$|x|>R$ 的 x,幂级数(2)都发散;至于 $x=\pm R$,(2)可能收敛也可能发散.

我们称$(-R,R)$为幂级数(2)的**收敛区间**.

怎样求得幂级数(2)的收敛半径,有如下定理.

定理 14.2 对于幂级数(2),若

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho, \tag{3}$$

则当

(i) $0<\rho<+\infty$时,幂级数(2)的收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}$;

(ii) $\rho=0$ 时,幂级数(2)的收敛半径 $R=+\infty$;

(iii) $\rho=+\infty$时,幂级数(2)的收敛半径 $R=0$.

证 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$,由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nx^n|} = \lim\sqrt[n]{|a_n|}\,|x| = \rho|x|,$$

根据级数的根式判别法,当 $\rho|x|<1$ 时,级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ 收敛;当 $\rho|x|>1$ 时级数发散.于是$0<\rho<+\infty$时,由$\rho|x|<1$得幂级数(2)的收敛半径$R=\frac{1}{\rho}$.当 $\rho=0$ 时,对任何 x 皆有$\rho|x|<1$,所以 $R=+\infty$.当 $\rho=+\infty$ 时,则对除 $x=0$ 外的任何 x 皆有$\rho|x|>1$,所以 $R=0$. □

在第十二章§2第二段曾经指出:若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho$,则有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$.因

此，我们也常用级数的比式判别法来推出幂级数(2)的收敛半径.

例1 级数 $\Sigma \frac{x^n}{n^2}$，由于

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1(n \to \infty),$$

所以它的收敛半径 $R=1$，即收敛区间为 $(-1,1)$；当 $x = \pm 1$ 时，有 $\left|\frac{(\pm 1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$，由于级数 $\Sigma \frac{1}{n^2}$ 收敛，所以级数 $\Sigma \frac{x^n}{n^2}$ 在 $x = \pm 1$ 时也收敛. 于是这个级数的收敛域为 $[-1,1]$. □

例2 级数

$$x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots, \tag{4}$$

由于

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1,$$

所以幂级数(4)的收敛区间是 $(-1,1)$. 但级数(4)当 $x=1$ 时发散，$x=-1$ 时收敛，从而推得级数(4)的收敛域是半开区间 $[-1,1)$. □

照此方法，读者不难验证级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad 与 \quad \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

的收敛半径分别为 $R=+\infty$ 与 $R=0$.

定理 14.3(柯西—阿达玛(Cauchy - Hadamard)定理) 对于幂级数(2)，设

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}, \tag{5}$$

则当

(i) $0<\rho<+\infty$ 时，收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}$；

(ii) $\rho=0$ 时，$R=+\infty$；

(iii) $\rho=+\infty$ 时，$R=0$.

注意：由于上极限(5)总是存在，因而任一幂级数总能由(5)式得到它的收敛半径.

定理 14.3 的证明与定理 14.2 相仿，读者可自行根据定理 12.8 推论 2 推出.

例3 级数

$$1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{2^4} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{3^{2n-1}} + \frac{x^{2n}}{2^{2n}} + \cdots,$$

由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2},$$

所以收敛半径 $R=2$. 由于 $x=\pm 2$ 时，这两个数项级数都发散. 故级数的收敛域为 $(-2,2)$. □

下面讨论幂级数(2)的一致收敛性问题.

定理 14.4 若幂级数(2)的收敛半径为 $R(>0)$,则在它的收敛区间$(-R,R)$内任一闭区间$[a,b]$上级数(2)都一致收敛.

证 设 $\bar{x}=\max\{|a|,|b|\}\in(-R,R)$,那么对于$[a,b]$上任一点 x,都有

$$|a_n x^n|\leqslant|a_n\bar{x}^n|.$$

由于级数(2)在点 $\bar{x}$ 绝对收敛,应用优级数判别法推得级数(2)在$[a,b]$上一致收敛. □

定理 14.5 若幂级数(2)的收敛半径为 $R(>0)$,且在 $x=R$(或 $x=-R$)时收敛,则级数(2)在$[0,R]$(或$[-R,0]$)上一致收敛.

证 设级数(2)在 $x=R$ 时收敛,对于 $x\in[0,R]$有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n R^n\left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

已知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n R^n$ 收敛,函数列$\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^n\right\}$在$[0,R]$上递减且一致有界,即

$$1\geqslant\frac{x}{R}\geqslant\left(\frac{x}{R}\right)^2\geqslant\cdots\geqslant\left(\frac{x}{R}\right)^n\geqslant\cdots\geqslant0.$$

故由阿贝耳判别法(定理 13.6),级数(2)在$[0,R]$上一致收敛. □

关于一般幂级数(1)的收敛性问题,也可仿照上述的办法来确定它的收敛区间和收敛半径.

例 4 级数

$$\sum\frac{(x-1)^n}{2^n n}=\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2\cdot2}+\cdots+\frac{(x-1)^n}{2^n\cdot n}+\cdots,\tag{6}$$

由于

$$\frac{\dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)}}{\dfrac{1}{2^n\cdot n}}=\frac{n}{2(n+1)}\to\frac{1}{2}\quad(n\to\infty),$$

所以级数(6)的收敛半径 $R=2$,因而级数(6)的收敛区间为$|x-1|<2$ 即$(-1,3)$. 当 $x=-1$ 时,级数(6)为收敛级数

$$\sum\frac{(-2)^n}{2^n\cdot n}=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n}+\cdots.$$

当 $x=3$ 时,级数(6)为发散级数

$$\sum\frac{2^n}{2^n n}=\sum\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots.$$

于是级数(6)的收敛域为$[-1,3)$. □

二 幂级数的性质

首先由定理 13.12 立刻可得

定理 14.6 (i) 幂级数(2)的和函数是$(-R,R)$内的连续函数;(ii) 若幂级数(2)在收敛区间的左(右)端点上收敛,则其和函数也在这一端点上右(左)连续.

在讨论幂级数的逐项求导与逐项求积之前,先要确定幂级数(2)在收敛区间$(-R,R)$内逐项求导与逐项求积后所得到的幂级数

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots \tag{7}$$

与

$$a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\cdots \tag{8}$$

的收敛区间.

定理 14.7 幂级数(2)与幂级数(7)、(8)具有相同的收敛区间.

证 这里只要证明(2)与(7)具有相同的收敛区间就可以了,因为对(8)逐项求导就得到(2).

设x_0为幂级数(2)收敛区间$(-R,R)$内任一不为零的点.由阿贝耳定理(定理 14.1)的证明知道,存在正数M与$r(r<1)$,对一切正整数n,都有

$$|a_nx_0^n|<Mr^n.$$

于是

$$|na_nx_0^{n-1}|=\left|\frac{n}{x_0}\right||a_nx_0^n|<\frac{M}{|x_0|}nr^n,$$

由级数的比式判别法知道,级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}nr^n$收敛.根据级数的比较原则及上述不等式,就推出幂级数(7)在点x_0是绝对收敛的(当然也是收敛的!).由于x_0为$(-R,R)$内任一点,这就证得幂级数(7)在$(-R,R)$内收敛.

现在证明幂级数(7)对一切满足不等式$|x|>R$的x都不收敛.如若不然,幂级数(7)在点$x_0(|x_0|>R)$收敛,则有一数$\bar{x}$,使得$|x_0|>|\bar{x}|>R$.由阿贝耳定理,幂级数(7)在$x=\bar{x}$时绝对收敛.但是,取$n\geqslant|\bar{x}|$时,就有

$$|na_n\bar{x}^{n-1}|=\frac{n}{|\bar{x}|}|a_n\bar{x}^n|\geqslant|a_n\bar{x}^n|,$$

由比较原则推得幂级数(2)在$x=\bar{x}$时绝对收敛.这与所设幂级数(2)的收敛区间为$(-R,R)$相矛盾.这就证得幂级数(7)的收敛区间也是$(-R,R)$. □

定理 14.8 设幂级数(2)在收敛区间$(-R,R)$上的和函数为f,若x为$(-R,R)$内任意一点,则

(i) f在x可导,且

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1};$$

(ii) f 在 0 与 x 这个区间上可积,且

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

定理 14.8 指出幂级数在收敛区间内可逐项求导与逐项求积.

证 由定理 14.7,级数(2),(7),(8)具有相同的收敛半径 R.因此,对任意一个 $x\in(-R,R)$,总存在正数 r,使得 $|x|<r<R$,根据定理 14.4,级数(2),(7)在 $[-r,r]$ 上一致收敛.再由第十三章§2 的逐项求导与逐项求积定理,就得到所要证明的结论(i)与(ii). □

由定理 14.8 的(i)可得:

推论 1 记 f 为幂级数(2)在收敛区间 $(-R,R)$ 内的和函数,则在 $(-R,R)$ 内 f 具有任何阶导数,且可逐项求导任何次,即

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots,$$
$$f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)n(n-1)\cdots 2a_{n+1}x + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

推论 2 记 f 为幂级数(2)在 $x=0$ 某邻域内的和函数,则级数(2)的系数与 f 在 $x=0$ 处的各阶导数有如下关系:

$$a_0 = f(0), a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (n = 1,2,\cdots).$$

这个推论还表明,若级数(2)在 $(-R,R)$ 上有和函数 f,则级数(2)由 f 在 $x=0$ 处的各阶导数所惟一确定.

三 幂级数的运算

在讨论幂级数的运算之前,先说明两个幂级数(2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

与

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + \cdots \tag{9}$$

相等的意义.

定义 若幂级数(2)与(9)在 $x=0$ 的某邻域内有相同的和函数,则称这两个幂级数在这邻域内相等.

定理 14.9 若幂级数(2)与(9)在 $x=0$ 的某邻域内相等,则它们同次幂项的系数相等,即

$$a_n = b_n \quad (n = 1,2,\cdots).$$

这个定理的结论可直接由定理 14.8 的推论 2 得到.

根据这个定理还可推得:若幂级数(2)的和函数为奇(偶)函数,则(2)式不出现偶(奇)次幂的项.

定理 14.10 若幂级数(2)与(9)的收敛半径分别为 R_a 和 R_b,则有

$$\lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_nx^n,\ |x|<R_a,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n,\ |x|<R,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,\ |x|<R,$$

式中 λ 为常数,$R=\min\{R_a,R_b\}$,$c_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$.

定理的证明可由数项级数的相应性质推出.

例 5 几何级数在收敛域 $(-1,1)$ 内有

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots.\tag{10}$$

对级数(10)在 $(-1,1)$ 内逐项求导得

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots,\tag{11}$$

$$f''(x)=\frac{2!}{(1-x)^3}=2+3\cdot 2x+\cdots+n(n-1)x^{n-2}+\cdots.\tag{12}$$

级数(10)在 $[0,x]$ $(x<1)$ 上逐项求积可得

$$\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n\mathrm{d}t,$$

所以

$$\ln\frac{1}{1-x}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots\quad(|x|<1).\tag{13}$$

上式对 $x=-1$ 也成立(参见本节习题 3). □

从这个例子可以看到:由已知级数(10)的和函数,通过逐项求导或逐项求积可间接地求得级数(11)、(12)或(13)的和函数.

习 题

1. 求下列幂级数的收敛半径与收敛区域:

(1) $\sum nx^n$;

(2) $\sum\frac{x^n}{n^2\cdot 2^n}$;

(3) $\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$;

(4) $\sum r^{n^2}x^n(0<r<1)$;

(5) $\sum\frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$; (6) $\sum\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$;

(7) $\sum\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$; (8) $\sum\frac{x^{n^2}}{2^n}$.

2. 应用逐项求导或逐项求积方法求下列幂级数的和函数(应同时指出它们的定义域):

(1) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$;

(2) $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$;

(3) $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+\cdots+n(n+1)x^n+\cdots$.

3. 证明:设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $|x|<R$ 内收敛,若 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 也收敛,则

$$\int_0^R f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$$

(注意:这里不管 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=R$ 是否收敛).应用这个结果证明:

$$\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}.$$

4. 证明:

(1) $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 满足方程 $y^{(4)}=y$;

(2) $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$ 满足方程 $xy''+y'-y=0$.

5. 证明:设 f 为幂级数(2)在 $(-R,R)$ 上的和函数,若 f 为奇函数,则级数(2)仅出现奇次幂的项,若 f 为偶函数,则(2)仅出现偶次幂的项.

---

6. 求下列幂级数的收敛域:

(1) $\sum\frac{x^n}{a^n+b^n}$ $(a>0,b>0)$; (2) $\sum\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$.

7. 证明定理14.3并求下列幂级数的收敛半径:

(1) $\sum\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$;

(2) $a+bx+ax^2+bx^3+\cdots$ $(0<a<b)$.

8. 求下列幂级数的收敛半径及其和函数:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$.

9. 设 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 为等差数列 $(a_0\neq 0)$.试求:

(1) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径;

(2) 数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$ 的和数.

§2 函数的幂级数展开

一 泰勒级数

在第六章§3的泰勒定理中曾指出,若函数 f 在点 x_0 的某邻域内存在直至 $n+1$ 阶的连续导数,则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),\tag{1}$$

这里 $R_n(x)$ 为拉格朗日型余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\tag{2}$$

其中 ξ 在 x 与 x_0 之间,称(1)为 f 在 x_0 的泰勒公式.

如果在(1)中抹去余项 $R_n(x)$,那么在 x_0 附近 f 可用(1)式右边的多项式来近似代替,如果函数 f 在 $x=x_0$ 处存在任意阶的导数,这时称形式为

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots\tag{3}$$

的级数为函数 f 在 x_0 的**泰勒级数**. 对于级数(3)是否能在 x_0 附近确切地表达 f,或说 f 在 x_0 的泰勒级数在 x_0 附近的和函数是否就是 f,这就是本节所要讨论的问题.

先看一个例子.

例1 由于函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处任何阶导数都等于0(第六章§4第二段末尾),即

$$f^{(n)}(0)=0, n=1,2,\cdots,$$

所以 f 在 $x=0$ 的泰勒级数为

$$0+0\cdot x+\frac{0}{2!}x^2+\cdots+\frac{0}{n!}x^n+\cdots.$$

显然它在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛,且其和函数 $S(x)=0$. 由此看到,对一切 $x\neq 0$ 都有 $f(x)\neq S(x)$. □

这个例子说明,具有任意阶导数的函数,其泰勒级数并不是都能收敛于函数本身.下面定理指出:具备什么条件的函数 f,它的泰勒级数才能收敛于 f 本身.

定理 14.11 设 f 在点 x_0 具有任意阶导数,那么 f 在区间 (x_0-r,x_0+r) 内等于它的泰勒级数的和函数的充分条件是:对一切满足不等式 $|x-x_0|<r$ 的 x,有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,$$

这里 $R_n(x)$ 是 f 在 x_0 的泰勒公式余项.

读者可自行由第六章§3泰勒定理推出本定理的证明.

如果 f 能在 x_0 的某邻域上等于其泰勒级数的和函数,则称函数 f 在 x_0 的这一邻域内可以展开成泰勒级数,并称等式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \tag{4}$$

的右边为 f 在 $x=x_0$ 处的**泰勒展开式**,或称**幂级数展开式**.

由级数的逐项求导性质可推得:若 f 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 上的和函数,则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 就是 f 在 $(-R,R)$ 上的泰勒展开式,这是幂级数展开的惟一性问题.

在实际应用上,主要讨论函数在 $x_0=0$ 处的展开式,这时(3)式可以写作

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots,$$

称为**麦克劳林级数**.

从定理 14.11 知道,余项对确定函数能否展开为幂级数是极为重要的,下面我们重新写出当 $x_0=0$ 时的积分型余项、拉格朗日型余项和柯西型余项,它们分别是

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t,$$

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1},\ \xi\text{ 在 }0\text{ 与 }x\text{ 之间},$$

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^n x^{n+1},\ 0\leqslant\theta\leqslant1.$$

二 初等函数的幂级数展开式

例 2 求 k 次多项式函数

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_kx^k$$

的展开式.

解 由于

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}n!c_n, & n\leqslant k,\\ 0, & n>k,\end{cases}$$

总有 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$. 因而

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\\&=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_kx^k,\end{aligned}$$

即多项式函数的幂级数展开式就是它本身. □

例 3 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 的展开式.

解 由于 $f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x, f^{(n)}(0)=1, (n=1,2,\cdots)$. 所以 f 的拉格朗日余项为 $R_n(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}(0\leqslant\theta\leqslant1)$. 显见

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

它对任何实数 x, 都有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}=0.$$

因而 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$. 由定理 14.11 得到

$$\mathrm{e}^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots, x\in(-\infty,+\infty).$$ □

例 4 函数 $f(x)=\sin x$. 由于

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right), n=1,2,\cdots.$$

现在考察正弦函数的拉格朗日余项 $R_n(x)$, 由于

$$\begin{aligned}|R_n(x)|&=\left|\frac{\sin\left(\xi+(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\\&\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to0\quad(n\to\infty),\end{aligned}$$

所以 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内能展开为麦克劳林级数

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots.$$

同样可证(或逐项求导), 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots.$$ □

例 5 函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 的各阶导数是

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

从而

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!,$$

所以 f 的麦克劳林级数是

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots, \tag{5}$$

用比式判别法容易求得级数(5)的收敛半径 $R=1$,且当 $x=1$ 时收敛,$x=-1$ 时发散,故级数(5)的收敛域是$(-1,1]$.现在讨论在这收敛区间上它的余项的极限情形.

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时用拉格朗日余项,有

$$\begin{aligned}|R_n(x)|&=\left|\frac{1}{(n+1)!}(-1)^n\frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1}\right|\\&=\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1}\right|\\&\leqslant\frac{1}{n+1}\to 0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

对于 $-1<x<0$ 的情形,拉格朗日余项不易估计,改用柯西余项进行考察.我们有

$$\begin{aligned}|R_n(x)|&=\left|\frac{1}{n!}(-1)^n\frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}}(1-\theta)^n x^{n+1}\right|\\&=\frac{1}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n|x|^{n+1},0\leqslant\theta\leqslant 1.\end{aligned}$$

因为 $-1<x<0$,故有 $1-\theta\leqslant 1+\theta x$.即 $0\leqslant\frac{1-\theta}{1+\theta x}\leqslant 1$,所以

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}\to 0\quad(n\to\infty).$$

这就证得在$(-1,1]$上 $\ln(1+x)$等于其麦克劳林级数(5).

将(5)式中 x 换成$x-1$ 后就得到函数 $f(x)=\ln x$ 在$x=1$ 处的泰勒展开式:

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+\cdots.$$

它的收敛域为$(0,2]$. □

例 6 讨论二项式函数 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 的展开式.

当 α 为正整数时,由二项式定理直接展开,就得到 f 的展开式,这已在前面例 2 中讨论过.

下面讨论 α 不等于正整数时的情形,这时

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},n=1,2,\cdots,$$

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1), n=1,2,\cdots.$$

于是 $f(x)$ 的麦克劳林级数是

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots. \tag{6}$$

运用比式判别法,可得(6)的收敛半径 $R=1$.现在 $(-1,1)$ 内考察它的柯西余项

$$R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n(1+\theta x)^{\alpha-1},$$

$$0\leqslant\theta\leqslant1.$$

由比式判别法,级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}$ 当 $|x|<1$ 时收敛,故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}=0.$$

又由于 $x>-1$ 有 $1+\theta x\geqslant1-\theta$,且 $0\leqslant\frac{1-\theta}{1+\theta x}\leqslant1$,从而有

$$\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\leqslant1.$$

再当 $|x|<1$ 时,有 $0<(1+\theta x)^{\alpha-1}<(1+|x|)^{\alpha-1}\leqslant2^{\alpha-1}$.于是当 $\alpha>1$ 时 $(1+\theta x)^{\alpha-1}$ 是与 n 无关的有界量;当 $\alpha<1$ 时,也有同样结论.综上所述,当 $|x|<1$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

所以在 $(-1,1)$ 上,

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots. \tag{7}$$

对于收敛区间端点的情形,它与 α 的取值有关,其结果如下(其推导参见菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷第二分册):

当 $\alpha\leqslant-1$ 时,收敛域为 $(-1,1)$;

当 $-1<\alpha<0$ 时,收敛域为 $(-1,1]$;

当 $\alpha>0$ 时,收敛域为 $[-1,1]$.

当(7)式中 $\alpha=-1$ 时就得到

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots,(-1,1). \tag{8}$$

当 $\alpha=-\frac{1}{2}$ 时得到

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots,(-1,1]. \tag{9}$$

□

一般地说,只有少数比较简单的函数,其幂级数展开式能直接从定义出发,并根据定理 14.11 求得.更多的情况是从已知的展开式出发,通过变量代换、四则运算或逐项求导、逐项求积等方法,间接地求得函数的幂级数展开式.

例 7 以 x^2 与 $-x^2$ 分别代入(8)与(9)式,可得

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots,(-1,1), \tag{10}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\cdots,(-1,1). \tag{11}$$

对于(10)、(11)分别逐项求积可得函数 arctan x 与 arcsin x 的展开式:

$$\begin{aligned}\arctan x&=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\\&=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,[-1,1],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arcsin x&=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}\\&=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\cdots,[-1,1].\end{aligned}$$ □

由此可见,熟悉某些初等函数的展开式,对于一些函数的幂级数展开是极为方便的.特别是前面介绍的例 3 至例 7 的结果,对于用间接方法求幂级数展开式特别有用.

作为本节的结束,最后举例说明怎样用幂级数形式表示某些非初等函数.在本章开头就已经提到幂级数的这种特有的功能.

例 8 用间接方法求非初等函数

$$F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

的幂级数展开式.

解 以 $-x^2$ 代替例 3 中 e^x 展开式的 x,得

$$\mathrm{e}^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}+\cdots,$$
$$-\infty<x<+\infty.$$

再逐项求积就得到 $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的展开式

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\\&=x-\frac{1}{1!}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2!}\frac{x^5}{5}-\frac{1}{3!}\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots.\end{aligned}$$ □

习 题

1. 设函数 f 在区间 (a,b) 内的各阶导数一致有界,即存在正数 M,对一切 $x\in(a,b)$,有

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M, n=1,2,\cdots.$$

证明:对 (a,b) 内任一点 x 与 x_0 有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (f^{(0)}(x)=f(x),0!=1).$$

2. 利用已知函数的幂级数展开式,求下列函数在 $x=0$ 处的幂级数展开式,并确定它收敛于该函数的区间:

(1) e^{x^2}; (2) $\dfrac{x^{10}}{1-x}$;

(3) $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$; (4) $\sin^2 x$;

(5) $\dfrac{e^x}{1-x}$; (6) $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$;

(7) $\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$; (8) $(1+x)e^{-x}$;

(9) $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

3. 求下列函数在 $x=1$ 处的泰勒展开式:

(1) $f(x)=3+2x-4x^2+7x^3$; (2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

---

4. 求下列函数的麦克劳林级数展开式:

(1) $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$; (2) $x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$.

5. 试将 $f(x)=\ln x$ 按 $\dfrac{x-1}{x+1}$ 的幂展开成幂级数.

* §3 复变量的指数函数·欧拉公式

先讲复数项级数.设级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

中每一项都是复数 $u_n=a_n+ib_n$(a_n,b_n 为实数,i 为虚部单位)($n=1,2,\cdots$),则(1)式可写成

$$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)+\cdots+(a_n+ib_n)+\cdots. \tag{2}$$

以 S_n 表示(9)的第 n 个部分和,并记

$$R_n=\sum_{k=1}^{n}a_k, I_n=\sum_{k=1}^{n}b_k,$$

则有

$$S_n = R_n + \mathrm{i}I_n.$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ 存在,则称级数(1)收敛,若 A,B 分别记这两个极限值,则级数(1)的和记为 $A+\mathrm{i}B$.据此,级数(1)收敛的充要条件是:级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad 与 \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

都收敛.

级数(1)各项 u_n 的模为

$$|u_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, n = 1,2,\cdots.$$

若级数

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots$$

收敛,则称级数(1)**绝对收敛**.由关系式

$$|a_n| \leqslant |u_n|, \ |b_n| \leqslant |u_n|, n = 1,2,\cdots$$

可证得:若级数(1)绝对收敛,则级数(1)必收敛.

设 $c_n(n=0,1,2,\cdots)$为复数,z 为复变量,则称级数

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots \tag{3}$$

为**复数项幂级数**.若 $z=z_0$ 使得级数(3)收敛,则称它在点 z_0 收敛.所有使级数(3)收敛的全体复数构成复数项幂级数(3)的**收敛域**.

记

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|},$$

这时和§1实数项幂级数一样可证得:级数(3)对一切满足 $|z|<\frac{1}{\rho}$ 的 z 不仅收敛,而且绝对收敛;对一切 $|z|>\frac{1}{\rho}$ 的 z,级数(3)是发散的.现以 $R=\frac{1}{\rho}$ 表示复数项幂级数(3)的收敛半径(当 $\rho=0$ 时,$R=+\infty$;当 $\rho=+\infty$ 时,$R=0$),则级数(3)的收敛范围是复平面上的以原点为中心,R 为半径的圆.

例如级数

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \tag{4}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0,$$

故级数(4)的收敛半径 $R=+\infty$,即(4)在整个复平面上都是收敛的,当 z 为实变量 x 时,(4)的和函数为实变量的指数函数 e^x.因此,我们也把级数(4)的和函数,定义为复变量 z 的**指数函数** e^z,即

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots. \tag{5}$$

用同样的方法可定义复变量的正弦函数与余弦函数:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, \tag{6}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots. \tag{7}$$

它们的收敛域都是整个复平面.

以 iz 代替(5)式中的 z,可得

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \cdots + \frac{(iz)^n}{n!} + \cdots \\ &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right). \end{aligned}$$

联系(6)与(7)式,就有

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z.$$

当 z 为实变量 x 时,则得

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \ -\infty < x < +\infty.$$

它称为**欧拉公式**.这个公式给出了(实变量)指数函数与三角函数之间的关系.

由于任一复数 z 都可写作 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$($r$ 为 z 的模,即 $|z| = r$,$\theta = \arg z$ 为 z 的幅角),那么由欧拉公式可推得复数的指数形式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.$$

与实幂级数一样,由级数的乘法运算可得

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

当以 $z = x + iy$ 代入上式,则有

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

习 题

1. 证明棣莫弗(de Moivre)公式

$$\cos nx + i\sin nx = (\cos x + i\sin x)^n.$$

2. 应用欧拉公式与棣莫弗公式证明:

(1) $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\cos n\alpha$;

(2) $e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\sin n\alpha$.

总 练 习 题

1. 证明:当 $|x| < \frac{1}{2}$ 时

$$\frac{1}{1 - 3x + 2x^2} = 1 + 3x + 7x^2 + \cdots + (2^n - 1)x^{n-1} + \cdots.$$

2. 求下列函数的幂级数展开式:

(1) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$; (2) $f(x)=\sin^3 x$;

(3) $f(x)=\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t$.

3. 确定下列幂级数的收敛域,并求其和函数:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} x^{2n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}$.

4. 应用幂级数性质求下列级数的和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

5. 设函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

定义在[0,1]上,证明它在(0,1)上满足下述方程:

$$f(x)+f(1-x)+\ln x \ln(1-x)=f(1).$$

6. 利用函数的幂级数展开式求下列不定式极限:

(1) $\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$; (2) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$.

第十五章　傅里叶级数

§1　傅里叶级数

本章将讨论在数学与工程技术中都有着广泛应用的一类函数项级数，即由三角函数列所产生的三角级数.

一　三角级数·正交函数系

在科学实验与工程技术的某些现象中，常会碰到一种周期运动.最简单的周期运动，可用正弦函数

$$y = A\sin(\omega x + \varphi) \tag{1}$$

来描写.由(1)所表达的周期运动也称为**简谐振动**，其中 A 为**振幅**，φ 为**初相角**，ω 为**角频率**，于是简谐振动 y 的**周期**是 $T=\frac{2\pi}{\omega}$.较为复杂的周期运动，则常是几个简谐振动

$$y_k = A_k\sin(k\omega x + \varphi_k), k = 1,2,\cdots,n$$

的叠加

$$y = \sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{n} A_k\sin(k\omega x + \varphi_k). \tag{2}$$

由于简谐振动 y_k 的周期为$\frac{T}{k}\left(T=\frac{2\pi}{\omega}\right)$，$k=1,2,\cdots,n$，所以函数(2)的周期为 T.对无穷多个简谐振动进行叠加就得到函数项级数

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(n\omega x + \varphi_n). \tag{3}$$

若级数(3)收敛，则它所描述的是更为一般的周期运动现象.对于级数(3)，我们只要讨论 $\omega=1$(如果 $\omega\neq1$，可用 ωx 代换 x)的情形.由于

$$\sin(nx + \varphi_n) = \sin\varphi_n\cos nx + \cos\varphi_n\sin nx,$$

所以

$$\begin{aligned} &A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(nx + \varphi_n) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin\varphi_n\cos nx + A_n\cos\varphi_n\sin nx). \end{aligned} \tag{3'}$$

记 $A_0=\frac{a_0}{2}, A_n\sin\varphi_n=a_n, A_n\cos\varphi_n=b_n, n=1,2,\cdots$,

则级数(3′)可写成

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{4}$$

它是由**三角函数列**(也称为**三角函数系**)

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots \tag{5}$$

所产生的一般形式的**三角级数**.

容易验证,若三角级数(4)收敛,则它的和一定是一个以 2π 为周期的函数.

关于三角级数(4)的收敛性有如下定理:

定理 15.1 若级数

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$$

收敛,则级数(4)在整个数轴上绝对收敛且一致收敛.

证 对任何实数 x,由于

$$|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\leqslant|a_n|+|b_n|,$$

应用魏尔斯特拉斯 M 判别法(定理 13.5)就能推得本定理的结论. □

为进一步研究三角级数(4)的收敛性,我们先探讨三角函数系(5)具有哪些特性.

首先容易看出,三角函数系(5)中所有函数具有共同的周期 2π.

其次,在三角函数系(5)中,任何两个不相同的函数的乘积在$[-\pi,\pi]$上的积分都等于零,即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x=0, \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x=0\quad(m\neq n),\\&\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\mathrm{d}x=0\quad(m\neq n),\\&\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\mathrm{d}x=0.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

而(5)中任何一个函数的平方在$[-\pi,\pi]$上的积分都不等于零,即

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x=\pi,\\&\int_{-\pi}^{\pi}1^2\mathrm{d}x=2\pi.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

通常把两个函数 φ 与 ψ 在$[a,b]$上可积,且

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x = 0$$

的函数 φ 与 ψ 称为在 $[a,b]$ 上是**正交**的. 由此,我们说三角函数系(5)在 $[-\pi,\pi]$ 上具有**正交性**,或说(5)是**正交函数系**.

二 以 2π 为周期的函数的傅里叶级数

应用三角函数系(5)的正交性,我们讨论三角级数(4)的和函数 f 与级数(4)的系数 a_0, a_n, b_n 之间的关系.

定理 15.2 若在整个数轴上

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{9}$$

且等式右边级数一致收敛,则有如下关系式:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, n = 0,1,2,\cdots, \tag{10a}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x, n = 1,2,\cdots. \tag{10b}$$

证 由定理条件,函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续且可积. 对(9)式逐项积分得

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

由关系式(6)知,上式右边括号内的积分都等于零. 所以

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi = a_0\pi,$$

即得

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x,$$

现以 $\cos kx$ 乘(9)式两边(k 为正整数),得

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cos kx + b_n\sin nx\cos kx). \tag{11}$$

从第十三章§1 习题 4 知道,由级数(9)一致收敛,可推出级数(11)也一致收敛. 于是对级数(11)逐项求积,有

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x \\ &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\mathrm{d}x + \right. \\ &\left. b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

由三角函数的正交性,右边除了以 a_k 为系数的那一项积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x = \pi$$

外,其他各项积分都等于 0,于是得出:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x = a_k\pi \quad (k = 1,2,\cdots),$$

即

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x \quad (k = 1,2,\cdots).$$

同理,(9)式两边乘以 $\sin kx$,并逐项求积,可得

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x \quad (k = 1,2,\cdots).$$ □

一般地说,若 f 是以 2π 为周期且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积的函数,则可按公式(10)计算出 a_n 和 b_n,它们称为函数 f(关于三角函数系)的**傅里叶系数**,以 f 的傅里叶系数为系数的三角级数(9)称为 f(关于三角函数系)的**傅里叶级数**,记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx). \tag{12}$$

这里记号"~"表示上式右边是左边函数的傅里叶级数. 由定理 15.2 知道:若(9)式右边的三角级数在整个数轴上一致收敛于其和函数 f,则此三角级数就是 f 的傅里叶级数,即此时(12)式中的记号"~"可换为等号. 然而,若从以 2π 为周期且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积的函数 f 出发,按公式(10)求出其傅里叶系数并得到傅里叶级数(12),这时还需讨论此级数是否收敛. 如果收敛,是否收敛于 f 本身. 这就是下一段所要叙述的内容.

三 收敛定理

下面的定理称为傅里叶级数**收敛定理**.

定理 15.3 若以 2π 为周期的函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上按段光滑,则在每一点 $x\in[-\pi,\pi]$,f 的傅里叶级数(12)收敛于 f 在点 x 的左、右极限的算术平均值,即

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

其中 a_n, b_n 为 f 的傅里叶系数.

下面先对定理中的某些概念作解释,然后举例说明如何运用这个定理把函数展开成傅里叶级数. 关于收敛定理的证明将在 §3 中进行.

我们知道,若 f 的导函数在 $[a,b]$ 上连续,则称 f 在 $[a,b]$ 上**光滑**. 但若定义在 $[a,b]$ 上除了至多有有限个第一间断点的函数 f 的导函数在 $[a,b]$ 上除了至多有限个点外都存在且连续,在这有限个点上导函数 f' 的左、右极限存在,则称 f 在 $[a,b]$ 上**按段光滑**.

根据上述定义,若函数 f 在$[a,b]$上按段光滑,则有如下重要性质:

1° f 在$[a,b]$上可积.

2° 在$[a,b]$上每一点都存在 $f(x\pm 0)$,且有:

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}=f'(x+0),\\&\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x-t)-f(x-0)}{-t}=f'(x-0).\end{aligned}\tag{13}$$

3° 在补充定义 f'在$[a,b]$上那些至多有限个不存在点上的值后(仍记为f'),f'在$[a,b]$上可积.

从几何图形上讲,在区间$[a,b]$上按段光滑函数,是由有限个光滑弧段所组成,它至多有有限个第一类间断点与角点(图 15-1).

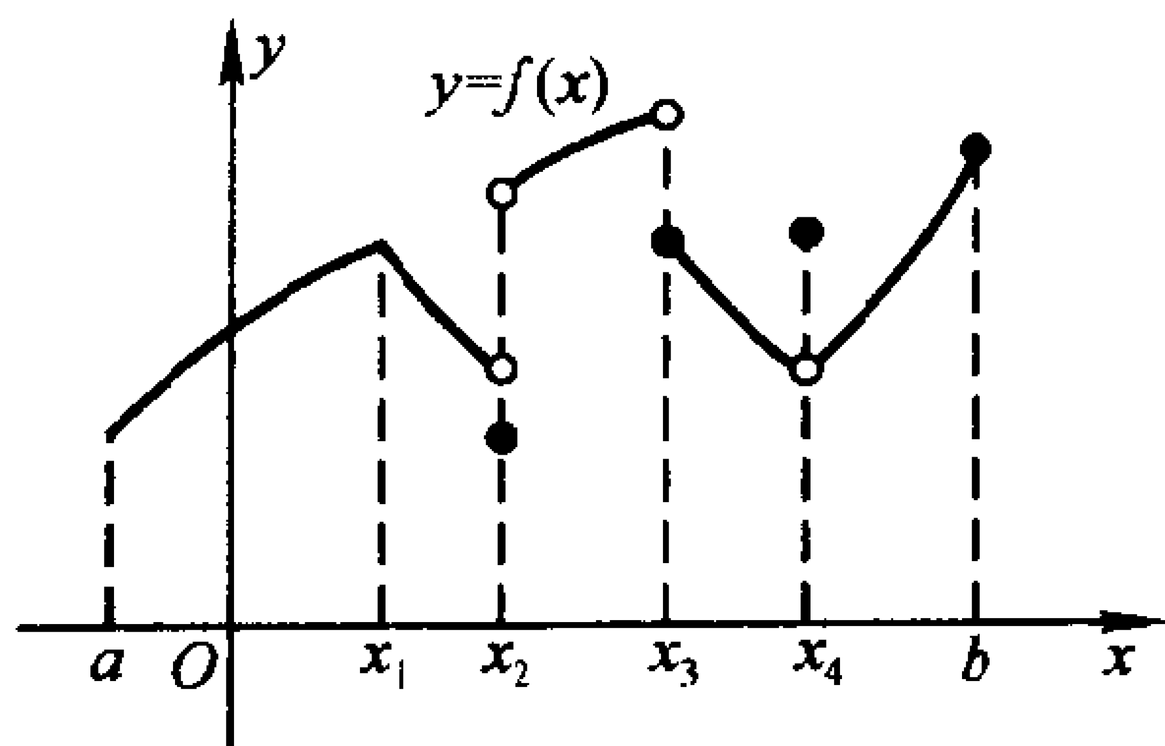


图 15-1

收敛定理指出,f 的傅里叶级数在点 x 处收敛于这一点上 f 的左、右极限的算术平均值$\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$;而当 f 在点 x 连续时,则有$\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=f(x)$,即此时 f 的傅里叶级数收敛于$f(x)$.于是有如下推论.

推论 若 f 是以 2π 为周期的连续函数,且在$[-\pi,\pi]$上按段光滑,则 f 的傅里叶级数在$(-\infty,\infty)$上收敛于 f.

根据收敛定理的假设,f 是以 2π 为周期的函数,所以系数公式(10)中的积分区间$[-\pi,\pi]$可以改为长度为 2π 的任何区间,而不影响 a_n,b_n 的值:

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,n=0,1,2,\cdots,\\b_n&=\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots,\end{aligned}\tag{10'}$$

其中 c 为任何实数.

注意:在具体讨论函数的傅里叶级数展开式时,常只给出函数 f 在$(-\pi,\pi]$(或$[-\pi,\pi)$)上的解析表达式,但读者应理解为它是定义在整个数轴上以 2π 为周期的函数.即在$(-\pi,\pi]$以外的部分按函数在$(-\pi,\pi]$上的对应关系作**周期延拓**.如 f 为$(-\pi,\pi]$上的解析表达式,那么周期延拓后的函数为

$$\hat{f}(x)=\begin{cases}f(x),x\in(-\pi,\pi],\\f(x-2k\pi),x\in((2k-1)\pi,(2k+1)\pi],\\\qquad\qquad k=\pm 1,\pm 2,\cdots,\end{cases}$$

如图 15-2 所示.因此我们说函数 f 的傅里叶级数就是指函数$\hat{f}$的傅里叶级数.

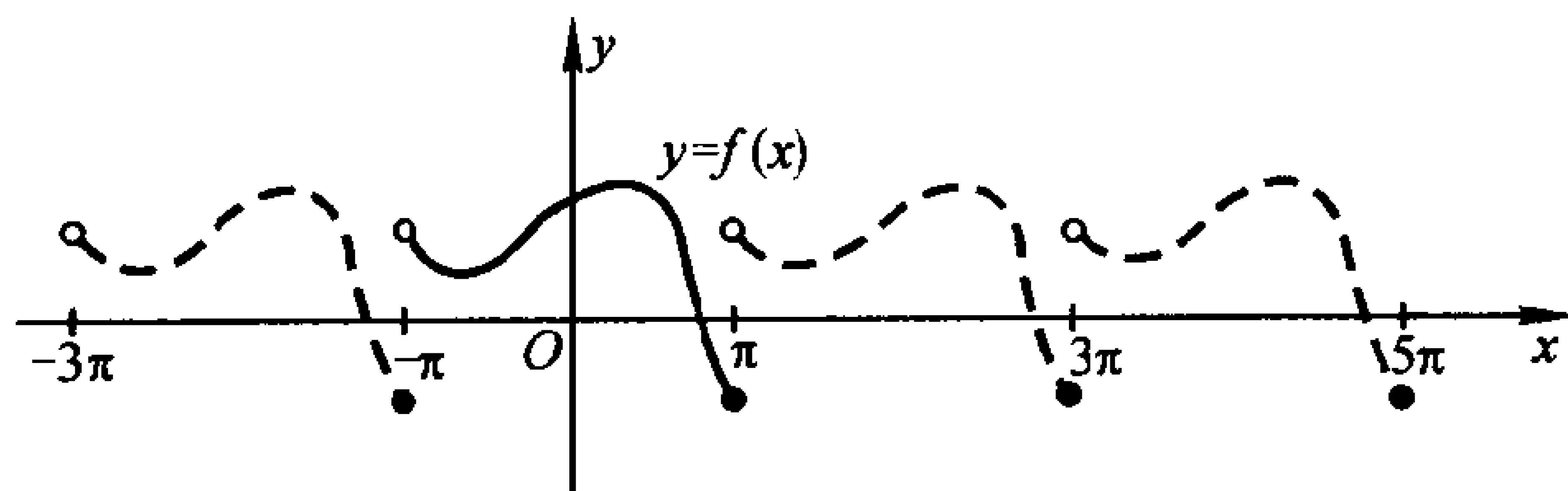


图 15-2 实线与虚线的全体表示 $y=\hat{f}(x)$

例1 设

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant \pi,\\ 0, & -\pi<x<0,\end{cases}$$

求 f 的傅里叶级数展开式.

解 函数 f 及其周期延拓后的图象如图 15-3 所示. 显然 f 是按段光滑

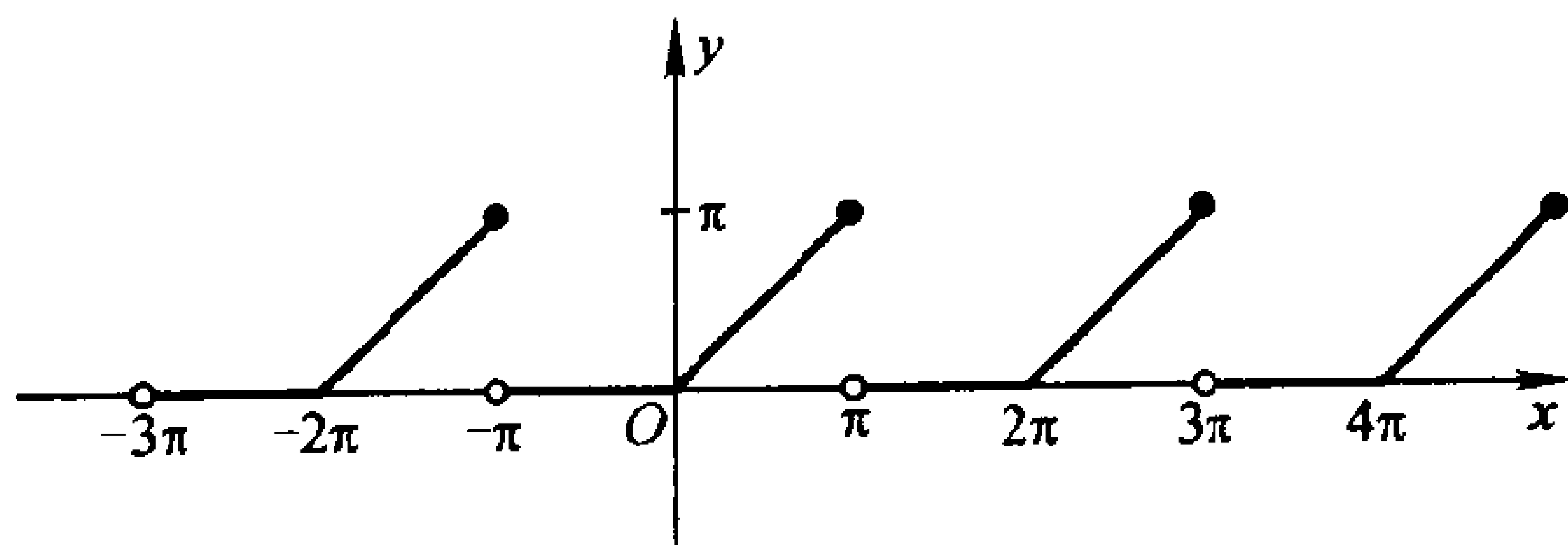


图 15-3

的,故由定理 15.3(收敛定理),它可以展开成傅里叶级数. 由于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

当 $n\geqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n\pi}x\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}\\&=\frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}-\dfrac{2}{n^2\pi}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时},\\ 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数时};\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{n\pi}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

所以在开区间$(-\pi,\pi)$上

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\left(\frac{2}{\pi}\cos x-\sin x\right)-\frac{1}{2}\sin 2x-\left(\frac{2}{9\pi}\cos 3x-\frac{1}{3}\sin 3x\right)\cdots.$$

在 $x=\pm\pi$ 时,上式右边收敛于

$$\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\frac{\pi+0}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

于是,在$[-\pi,\pi]$上 f 的傅里叶级数的图象如图 15－4 所示(注意它与图 15－3 的差别). □

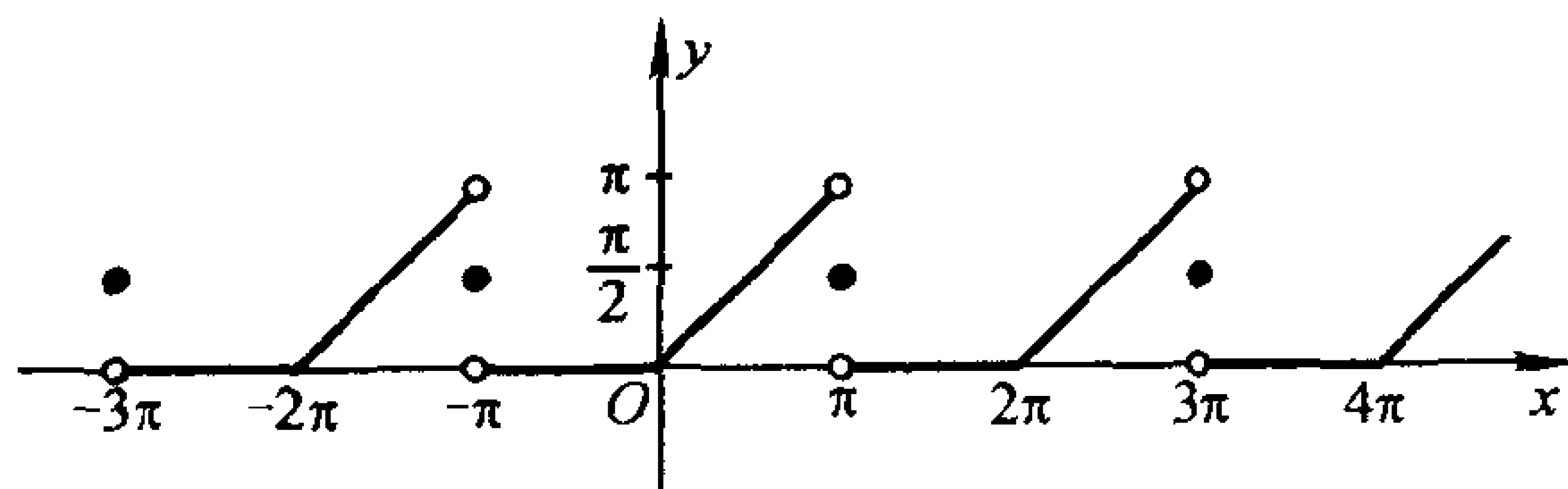


图 15－4

例 2 把下列函数展开成傅里叶级数:

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & 0<x<\pi,\\ 0, & x=\pi,\\ -x^2, & \pi<x\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

解 f 及其周期延拓的图形如图 15－5 所示.显然 f 是按段光滑的,因此它可以展开成傅里叶级数.

在(10′)中令 $c=0$ 来计算傅里系数如下:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi^2}{3}-\frac{7\pi^2}{3}=-2\pi^2,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-x^2)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{x^2}{n}-\frac{2}{n^3}\right)\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

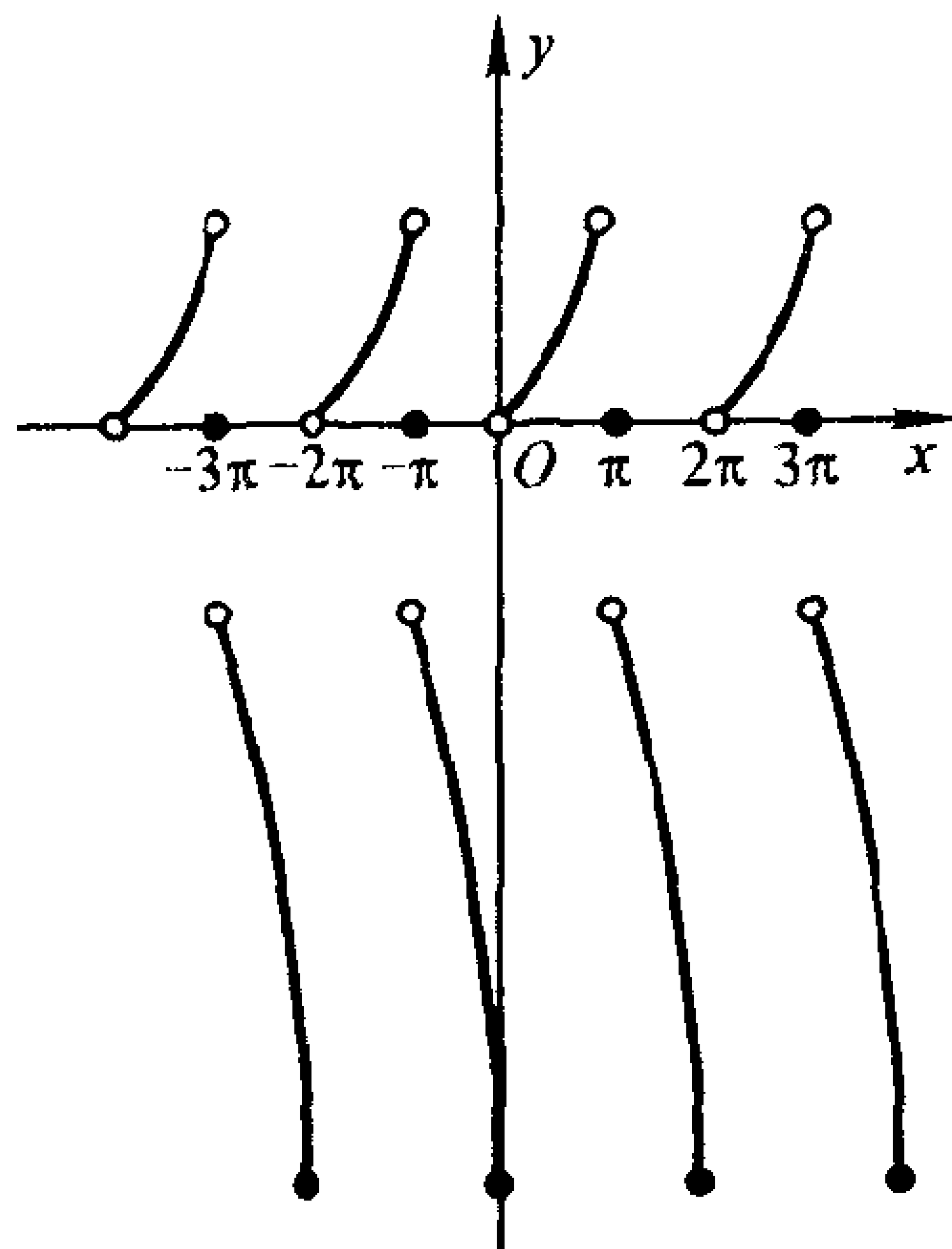


图 15－5

$$-\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{x^2}{n}-\frac{2}{n^3}\right)\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx\right]\Bigg|_{\pi}^{2\pi}$$

$$=\frac{4}{n^2}[(-1)^n-1],$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-x^2)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{x^2}{n}+\frac{2}{n^3}\right)\cos nx+\frac{2x}{n^2}\sin nx\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$-\frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{x^2}{n}+\frac{2}{n^3}\right)\cos nx+\frac{2x}{n^2}\sin nx\right]\Bigg|_{\pi}^{2\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi^2}{n}+\left(\frac{\pi^2}{n}-\frac{2}{n^3}\right)[1-(-1)^n]\right\}.$$

所以当 $x\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$ 时，

$$f(x)=-\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{n^2}[(-1)^n-1]\cos nx\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{n}+\left(\frac{\pi^2}{n}-\frac{2}{n^3}\right)(1-(-1)^n)\right]\sin nx\right\}$$

$$=-\pi^2-8\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$$

$$+\frac{2}{\pi}\left\{(3\pi^2-4)\sin x+\frac{\pi^2}{2}\sin 2x+\left(\frac{3\pi^2}{3}-\frac{4}{3^3}\right)\sin 3x+\frac{\pi^2}{4}\sin 4x+\cdots\right\}.$$

当 $x=\pi$ 时，由于

$$\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}=0,$$

所以

$$0=-\pi^2+8\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right). \tag{14}$$

当 $x=0$ 或 2π 时，由于

$$\frac{1}{2}(f(0-0)+f(0+0))=\frac{1}{2}(-4\pi^2+0)=-2\pi^2,$$

因此

$$-2\pi^2=-\pi^2-8\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right). \tag{15}$$

由(14)或(15)都可推得

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}.$$ □

习 题

1. 在指定区间内把下列函数展开成傅里叶级数:

(1) $f(x)=x$, (i) $-\pi<x<\pi$, (ii) $0<x<2\pi$;

(2) $f(x)=x^2$, (i) $-\pi<x<\pi$, (ii) $0<x<2\pi$;

(3) $f(x)=\begin{cases} ax, & -\pi<x\leqslant 0, \\ bx, & 0<x<\pi \end{cases}$ $(a\neq b, a\neq 0, b\neq 0)$.

2. 设 f 是以 2π 为周期的可积函数,证明对任何实数 c,有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x, n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x, n=1,2,\cdots.$$

3. 把函数

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}, & -\pi<x<0, \\ \dfrac{\pi}{4}, & 0\leqslant x<\pi \end{cases}$$

展开成傅里叶级数,并由它推出

(1) $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$;

(2) $\frac{\pi}{3}=1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\cdots$;

(3) $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\cdots$.

4. 设函数 $f(x)$满足条件:$f(x+\pi)=-f(x)$.问此函数在$(-\pi,\pi)$内的傅里叶级数具有什么特性.

5. 设函数 $f(x)$满足条件:$f(x+\pi)=f(x)$.问此函数在$(-\pi,\pi)$内的傅里叶级数具有什么特性.

6. 试证函数系 $\cos nx, n=0,1,2,\cdots$和 $\sin nx, n=1,2,\cdots$都是$[0,\pi]$上的正交函数系,但它们合起来的(5)式不是$[0,\pi]$上的正交函数系.

7. 求下列函数的傅里叶级数展开式:

(1) $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$;$0<x<2\pi$; (2) $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$;

(3) $f(x)=ax^2+bx+c$, (i) $0<x<2\pi$, (ii) $-\pi<x<\pi$;

(4) $f(x)=\operatorname{ch} x$, $-\pi<x<\pi$; (5) $f(x)=\operatorname{sh} x$, $-\pi<x<\pi$.

8. 求函数 $f(x)=\frac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2)$, $0<x<2\pi$ 的傅里叶级数展开式,并应用它推出

$\frac{\pi^2}{6}=\Sigma\frac{1}{n^2}$.

---

9. 设 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上光滑函数,且 $f(-\pi)=f(\pi)$. a_n,b_n 为 f 的傅里叶系数,a'_n,b'_n 为 f 的导函数 f' 的傅里叶系数.证明:

$$a'_0=0,a'_n=nb_n,b'_n=-na_n\quad(n=1,2,\cdots).$$

10. 证明:若三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

中的系数 a_n,b_n 满足关系

$$\sup_n\{|n^3a_n|,|n^3b_n|\}\leqslant M,$$

M 为常数,则上述三角级数收敛,且其和函数具有连续的导函数.

§2 以 $2l$ 为周期的函数的展开式

在上节提到的收敛定理中,我们假设函数 f 是以 2π 为周期的,或是定义在 $(-\pi,\pi]$ 上然后作以 2π 为周期延拓的函数.本节讨论以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数展开式及偶函数和奇函数的傅里叶级数展开式.

一 以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数

设 f 是以 $2l$ 为周期的函数,通过变量置换

$$\frac{\pi x}{l}=t\quad 或\quad x=\frac{lt}{\pi}$$

可以把 f 变换成以 2π 为周期的 t 的函数 $F(t)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$.若 f 在 $[-l,l]$ 上可积,则 F 在 $[-\pi,\pi]$ 上也可积,这时函数 F 的傅里叶级数展开式是:

$$F(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),\tag{1}$$

其中

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\cos nt\,dt,n=0,1,2,\cdots,\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\sin nt\,dt,n=1,2,\cdots.\end{aligned}\tag{2}$$

因为 $t=\frac{\pi x}{l}$,所以 $F(t)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right)=f(x)$.于是由(1)与(2)式分别得

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\tag{3}$$

与

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, n = 0,1,2,\cdots,$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, n = 1,2,\cdots. \tag{4}$$

这里(4)式是以 $2l$ 为周期的函数 f 的傅里叶系数,(3)式是 f 的傅里叶级数.

若函数 f 在 $[-l,l]$ 上按段光滑,则同样可由收敛定理知道

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{5}$$

例 1　把函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -5 \leqslant x < 0, \\ 3, & 0 \leqslant x < 5 \end{cases}$$

展开成傅里叶级数.

解　由于 f 在 $(-5,5)$ 上按段光滑,因此可以展开成傅里叶级数.根据(4)式,有

$$a_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{0} 0\cdot\cos\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int_{0}^{5} 3\cos\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\Big|_0^5 = 0, n = 1,2,\cdots,$$
$$a_0 = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int_0^5 3\mathrm{d}x = 3,$$
$$b_n = \frac{1}{5}\int_0^5 3\sin\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{3}{5}\left[-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\right]\Big|_0^5 = \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{6}{(2k-1)\pi}, & n = 2k-1, k = 1,2,\cdots, \\ 0, & n = 2k, k = 1,2,\cdots. \end{cases}$$

代入(5)式,得

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{(2k-1)\pi}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{5}$$
$$= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{5} + \cdots\right).$$

这里 $x \in (-5,0)\cup(0,5)$.当 $x=0$ 和 ± 5 时级数收敛于 $\frac{3}{2}$.　□

二　偶函数与奇函数的傅里叶级数

设 f 是以 $2l$ 为周期的偶函数,或是定义在 $[-l,l]$ 上的偶函数,则在 $[-l,l]$ 上,$f(x)\cos nx$ 是偶函数,$f(x)\sin nx$ 是奇函数.因此,f 的傅里叶系数(4)是

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, n = 0,1,2,\cdots, \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = 0, n = 1,2,\cdots. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

于是 f 的傅里叶级数只含有余弦函数的项，即

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{7}$$

其中 a_n 如(6)式所示.(7)式右边的级数称为**余弦级数**.

同理，若 f 是以 $2l$ 为周期的奇函数，或是定义在$[-l,l]$上的奇函数，则可推得

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = 0, n = 0,1,2,\cdots, \\ b_n &= \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, n = 1,2,\cdots. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

所以当 f 为奇函数时，它的傅里叶级数只含有正弦函数的项，即

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{9}$$

其中 b_n 如(8)式所示.(9)式右边的级数称为**正弦级数**.

若 $l=\pi$，则偶函数 f 所展开成的余弦级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx, \tag{10}$$

其中

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, n = 0,1,2,\cdots. \tag{11}$$

当 $l=\pi$ 且 f 为奇函数时，则它展开成的正弦级数为

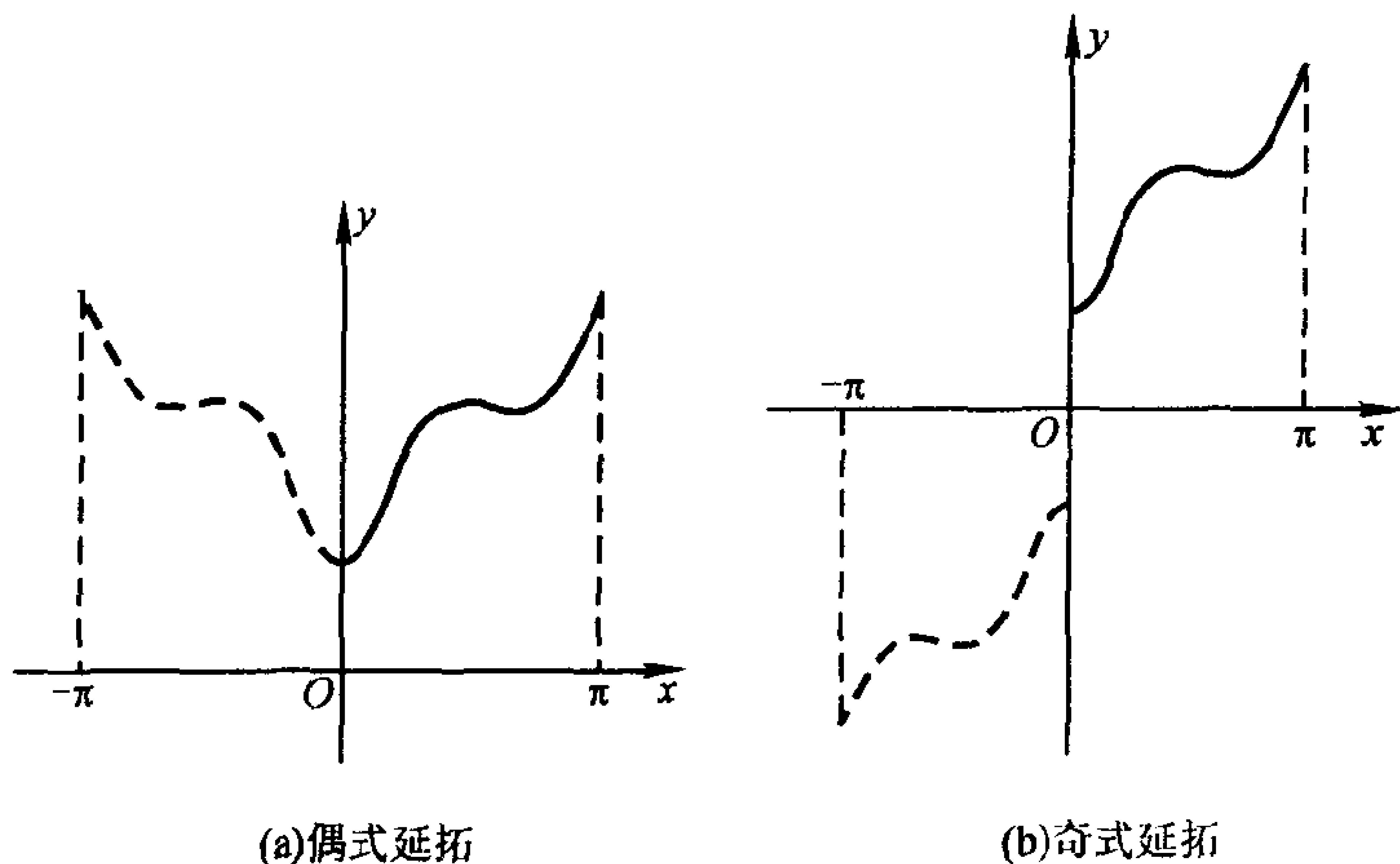
$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx, \tag{12}$$

其中

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x. \tag{13}$$

在实际应用中，有时需把定义在$[0,\pi]$上(或一般地$[0,l]$上)的函数展开成余弦级数或正弦级数.为此，先把定义在$[0,\pi]$上的函数作偶式延拓或作奇式延拓到$[-\pi,\pi]$上(如图 15－6(a)或(b)).然后求延拓后函数的傅里叶级数，即得(10)或(12)形式.但显然可见，对于定义在$[0,\pi]$上的函数，将它展开成余弦级数或正弦级数时，可以不必作延拓而直接由(11)式或(13)式计算出它的傅里叶

系数.



(a)偶式延拓 (b)奇式延拓

图 15-6

例 2 设函数

$$f(x) = |\sin x|, \ -\pi \leqslant x < \pi,$$

求 f 的傅里叶级数展开式.

解 f 是 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数,图 15-7 是这函数及其周期延拓的图形. 由于 f 是按段光滑函数,因此,可以展开成傅里叶级数,而且这个级数为余弦级

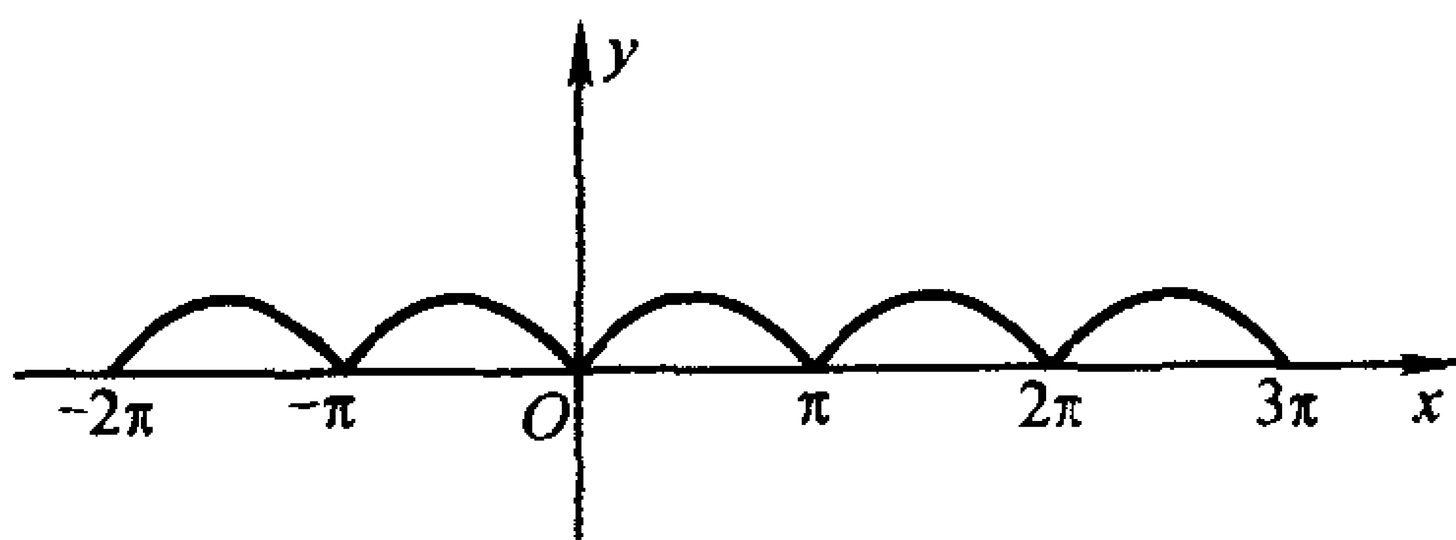


图 15-7

数. 由(10)式(这时可把其中"~"改为"=")知

$$|\sin x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

其中

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi},$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos x \mathrm{d}x = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin x| \cos nx \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx \mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}[\sin(1-n)x+\sin(1+n)x]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{2}{n^2-1}[\cos(n-1)\pi-1]\quad(n\neq 1)$$

$$=\begin{cases}0, & n=3,5,\cdots,\\ -\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{n^2-1}, & n=2,4,\cdots.\end{cases}$$

因此

$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{4m^2-1}\cos 2mx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[1-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2mx}{4m^2-1}\right],\ -\infty<x<+\infty.$$

当 $x=0$ 时,有

$$0=\frac{2}{\pi}\left(1-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4m^2-1}\right).$$

由此可得

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2m-1)(2m+1)}+\cdots.$$ □

例 3 把定义在 $[0,\pi]$ 上的函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<h,\\ \dfrac{1}{2}, & x=h,\\ 0, & h<x\leqslant\pi\end{cases}$$

(其中 $0<h<\pi$)展开成正弦级数.

解 函数 f 如图 15-8 所示,它是按段光滑函数,因而可以展开成正弦级数(12),其系数

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{h}\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^h=\frac{2}{n\pi}(1-\cos nh).$$

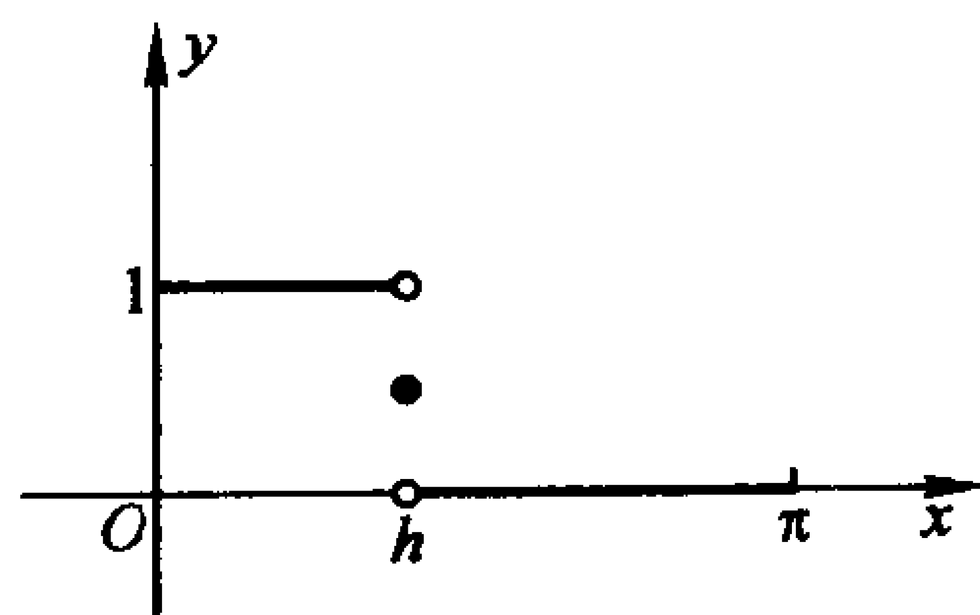


图 15-8

所以

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos nh)}{n}\sin nx,0<x<h,h<x<\pi.$$

当 $x=0$ 时,级数的和为 0;当 $x=h$ 时,有

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos nh)}{n}\sin nh=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}.$$

本题中若 $h=\pi$,则有

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx$$
$$=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\right),0<x<\pi,$$

而且当 $x=0,\pi$ 时,级数收敛于 0. □

例 4 把 $f(x)=x$ 在 $(0,2)$ 内展开成:

(i) 正弦级数;

(ii) 余弦级数.

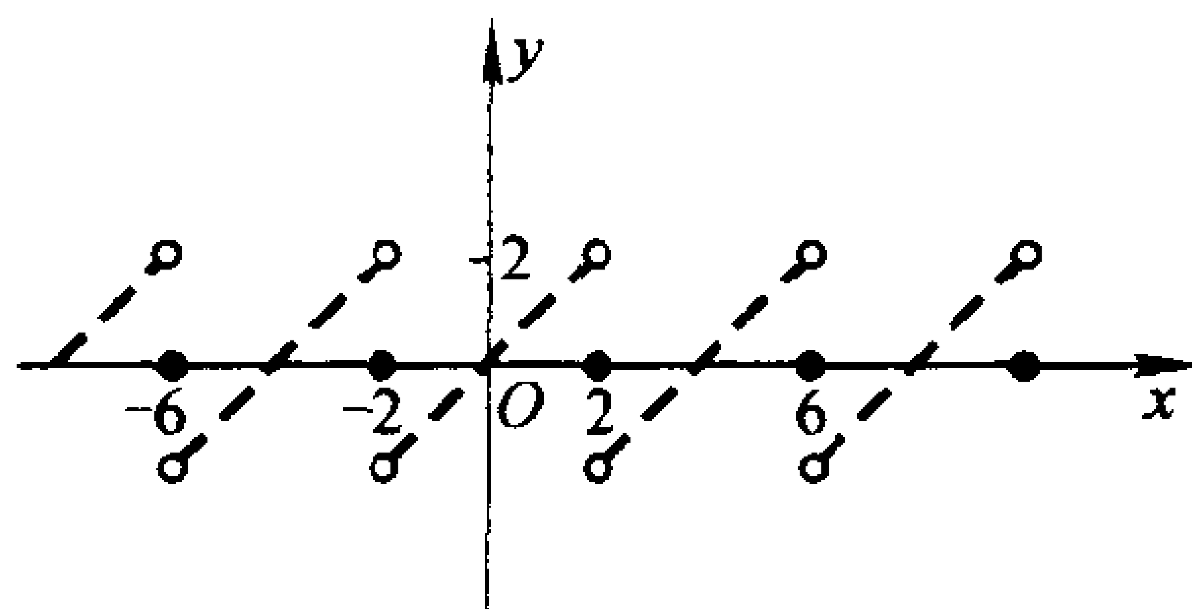


图 15-9

解 (i) 为了要把 f 展开为正弦级数,对 f 作奇式周期延拓(图 15-9),并由公式(8)有

$$a_n=0,n=0,1,2,\cdots,$$
$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi$$
$$=\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1},n=1,2,\cdots.$$

所以当 $x\in(0,2)$ 时,由(9)及收敛定理得到

$$f(x)=x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{2}$$
$$=\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\cdots\right).\tag{14}$$

但当 $x=0,2$ 时,右边级数收敛于 0.

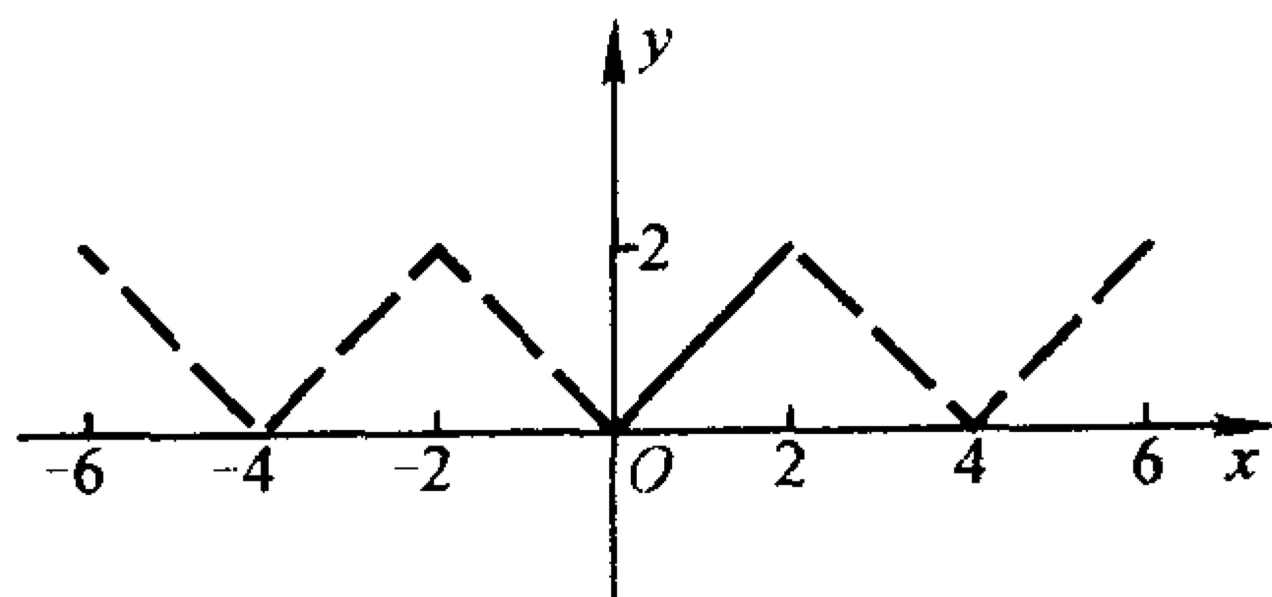


图 15-10

(ii) 为了要把 f 展开为余弦级数,对 f 作偶式周期延拓(图 15-10).由公式(6)得 f 的傅里叶系数为

$$b_n=0,n=1,2,\cdots,$$
$$a_0=\int_0^2 x\mathrm{d}x=2,$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)$$
$$=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1], n=1,2,\cdots$$

或

$$a_{2k-1}=\frac{-8}{(2k-1)^2\pi^2}, a_{2k}=0\quad(k=1,2,\cdots).$$

所以当 $x\in(0,2)$ 时,由(7)及收敛定理得到

$$f(x)=x=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8}{(2k-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}$$
$$=1-\frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2}+\cdots\right).\qquad(15)$$

□

读者由例 4 可以看到,同样一个函数在同样的区间上可以用正弦级数表示,也可以用余弦级数表示,甚至作适当延拓后,可以用更一般的形式(5)来表示.

习 题

1. 求下列周期函数的傅里叶级数展开式:

(1) $f(x)=|\cos x|$(周期 π); (2) $f(x)=x-[x]$(周期 1);

(3) $f(x)=\sin^4 x$(周期 π); (4) $f(x)=\mathrm{sgn}(\cos x)$(周期 2π).

2. 求函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & 1<x<2,\\ 3-x, & 2\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

的傅里叶级数并讨论其收敛性.

3. 将函数 $f(x)=\frac{\pi}{2}-x$ 在$[0,\pi]$上展开成余弦级数.

4. 将函数 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ 在$[0,\pi]$上展开成正弦级数.

5. 把函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & 0<x\leqslant 2,\\ x-3, & 2<x<4\end{cases}$$

在$(0,4)$上展开成余弦级数.

6. 把函数 $f(x)=(x-1)^2$ 在$(0,1)$上展开成余弦级数,并推出

$$\pi^2=6\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right).$$

7. 求下列函数的傅里叶级数展开式:

(1) $f(x)=\arcsin(\sin x)$; (2) $f(x)=\arcsin(\cos x)$.

8. 试问如何把定义在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的可积函数 f 延拓到区间$(-\pi,\pi)$内,使它们的傅里叶级数为如下的形式:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\cos(2n-1)x$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}\sin(2n-1)x$.

§3 收敛定理的证明

为了证明傅里叶级数的收敛定理,先证明下面两个预备定理.

预备定理 1(贝塞耳(Bessel)不等式) 若函数 f 在$[-\pi,\pi]$上可积,则

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x,\tag{1}$$

其中 a_n,b_n 为f 的傅里叶系数.(1)式称为**贝塞耳不等式**.

证 令

$$S_m(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

考察积分

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_m(x)]^2\mathrm{d}x\\&=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_m(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}S_m^2(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{2}$$

由于

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_m(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{m}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

根据傅里叶系数公式(§1(10))可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_m(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}a_0^2+\pi\sum_{n=1}^{m}(a_n^2+b_n^2).\tag{3}$$

对于 $S_m^2(x)$的积分,应用三角函数的正交性,有

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}S_m^2(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]^2\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{a_0}{2}\right)^2\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{m}\left[a_n^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\mathrm{d}x+b_n^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{n=1}^{m} (a_n^2 + b_n^2). \tag{4}$$

将(3),(4)代入(2),可得

$$0 \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_m(x)]^2 \mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \mathrm{d}x - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi \sum_{n=1}^{m} (a_n^2 + b_n^2).$$

因而

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \mathrm{d}x,$$

它对任何正整数 m 成立.而 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x$ 为有限值,所以正项级数

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

的部分和数列有界,因而它收敛且有不等式(1)成立. □

推论 1 若 f 为可积函数,则

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x = 0, \\ \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

因为(1)的左边级数收敛,所以当 $n\to\infty$ 时,通项 $a_n^2+b_n^2\to 0$,亦即有 $a_n\to 0$ 与 $b_n\to 0$,这就是(5)式.这个推论也称为**黎曼—勒贝格定理**.

推论 2 若 f 为可积函数,则

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x \mathrm{d}x = 0, \\ \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{0} f(x) \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x \mathrm{d}x = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

证 由于

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x = \cos\frac{x}{2}\sin nx + \sin\frac{x}{2}\cos nx,$$

所以

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\pi} \left[f(x)\cos\frac{x}{2}\right] \sin nx \mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \left[f(x)\sin\frac{x}{2}\right] \cos nx \mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} F_1(x) \sin nx \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} F_2(x) \cos nx \mathrm{d}x, \tag{7}$$

其中

$$F_1(x)=\begin{cases}f(x)\cos\dfrac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & -\pi\leqslant x<0,\end{cases}$$

$$F_2(x)=\begin{cases}f(x)\sin\dfrac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & -\pi\leqslant x<0.\end{cases}$$

显见 F_1 与 F_2 和 f 一样在$[-\pi,\pi]$上可积.由推论1,(7)式右端两积分的极限在 $n\to\infty$时都等于零,所以左边的极限为零.

同样可以证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\mathrm{d}x=0.$$ □

预备定理2 若 $f(x)$是以 2π 为周期的函数,且在$[-\pi,\pi]$上可积,则它的傅里叶级数部分和 $S_n(x)$可写成

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t, \tag{8}$$

当 $t=0$ 时,被积函数中的不定式由极限

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}=n+\frac{1}{2}$$

来确定.

证 在傅里叶级数部分和

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

中,用傅里叶系数公式代入,可得

$$\begin{aligned}S_n(x)=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\mathrm{d}u+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\cos ku\mathrm{d}u\right)\cos kx+\right.\\&\left.\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\sin ku\mathrm{d}u\right)\sin kx\right]\\=&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos ku\cos kx+\sin ku\sin kx)\right]\mathrm{d}u\\=&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(u-x)\right]\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

令 $u=x+t$,得

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]dt.$$

由上面这个积分看到，被积函数是周期为 2π 的函数，因此在$[-\pi-x,\pi-x]$上的积分等于$[-\pi,\pi]$上的积分，再由第十二章§3,(21)式，即

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}, \tag{9}$$

就得到

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt. \qquad \square$$

(8) 式也称为 f 的傅里叶级数部分和的积分表示式.

现在证明定理 15.3(收敛定理)，重述如下：

若以 2π 为周期的函数 f 在$[-\pi,\pi]$上按段光滑，则在每一点 $x\in[-\pi,\pi]$，f 的傅里叶级数(§1,(12))收敛于 f 在点 x 的左、右极限的算术平均值，即

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

其中 a_n, b_n 为 f 的傅里叶系数.

证 只要证明在每一点 x 处下述极限成立：

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} - S_n(x)\right] = 0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\right] = 0,$$

或证明同时有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x+0)}{2} - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\right] = 0, \tag{10}$$

与

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x-0)}{2} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\right] = 0. \tag{11}$$

现在先证明(10)式.对(9)式积分有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)\mathrm{d}x=1.$$

由于上式左边为偶函数,因此两边乘以 $f(x+0)$ 后得到

$$\frac{f(x+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x+0)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.$$

从而(10)式可改写为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+0)-f(x+t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=0. \tag{12}$$

令

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=-\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2\sin\frac{t}{2}}\\&=-\left[\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\right]\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}},\quad t\in(0,\pi].\end{aligned}$$

由§1(13)式得

$$\lim_{t\to0^{+}}\varphi(t)=-f'(x+0)\cdot1=-f'(x+0).$$

再令 $\varphi(0)=-f'(x+0)$,则函数 φ 在点 $t=0$ 右连续.因为 φ 在 $[0,\pi]$ 上至多只有有限个第一类间断点,所以 φ 在 $[0,\pi]$ 上可积.根据预备定理 1 的推论 2,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+0)-f(x+t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\varphi(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t=0.\end{aligned}$$

这就证得(12)式成立,从而(10)式成立.

用同样方法可证(11)也成立.　□

习　　题[①]

1. 设 f 以 2π 为周期且具有二阶连续的导函数,证明 f 的傅里叶级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 f.

2. 设 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上可积函数.证明:若 f 的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 f,则成立帕塞瓦尔(Parseval)等式:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),$$

这里 a_n,b_n 为 f 的傅里叶系数.

3. 由于帕塞瓦尔等式对于在 $[-\pi,\pi]$ 上满足收敛定理条件的函数也成立(证略).请应用这个结果证明下列各式:

(1) $\dfrac{\pi^2}{8}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ (提示:应用§1习题3的展开式导出);

(2) $\dfrac{\pi^2}{6}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ (提示:应用§1习题1(1)(i)的展开式导出);

(3) $\dfrac{\pi^4}{90}=\sum\dfrac{1}{n^4}$ (提示:应用§1习题1(2)(i)的展开式导出).

4. 证明:若 f,g 均为 $[-\pi,\pi]$ 上可积函数,且它们的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上分别一致收敛于 f 和 g,则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n),$$

其中 a_n,b_n 为 f 的傅里叶系数,α_n,β_n 为 g 的傅里叶系数.

5. 证明:若 f 及其导函数 f' 均在 $[-\pi,\pi]$ 上可积,$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$,$f(-\pi)=f(\pi)$,且成立帕塞瓦尔等式,则

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\mathrm{d}x\geqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x.$$

总 练 习 题

1. 试求三角多项式

$$T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$$

的傅里叶级数展开式.

2. 设 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上可积函数,$a_0,a_k,b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为 f 的傅里叶系数.试证明:当

$$A_0=a_0,A_k=a_k,B_k=b_k(k=1,2,\cdots,n)$$

① 本节习题均为选做题.

时,积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\mathrm{d}x$$

取最小值,且最小值为

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right].$$

上述 $T_n(x)$是第 1 题中的三角多项式,A_0,A_k,B_k 为它的傅里叶系数.

3. 设 f 为以 2π 为周期,且具有二阶连续可微的函数,

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,b_n''=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\sin nx\mathrm{d}x.$$

若级数 $\Sigma b_n''$ 绝对收敛,则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{|b_k|}\leqslant\frac{1}{2}\left(2+\sum_{k=1}^{\infty}|b_k''|\right).$$

4. 设周期为 2π 的可积函数 $\varphi(x)$与 $\psi(x)$满足以下关系式:

(1) $\varphi(-x)=\psi(x)$; (2) $\varphi(-x)=-\psi(x)$.

试问 φ 的傅里叶系数a_n,b_n 与ψ 的傅里叶系数α_n,β_n 有什么关系?

5. 设定义在$[a,b]$上的连续函数列$\{\varphi_n\}$满足关系

$$\int_a^b\varphi_n(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0,n\neq m,\\1,n=m.\end{cases}$$

对于在$[a,b]$上的可积函数 f,定义

$$a_n=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots.$$

证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛,且有不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\leqslant\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x.$$

第十六章　多元函数的极限与连续

§1　平面点集与多元函数

在前面各章中,我们所讨论的函数都只限于一个自变量的函数,简称一元函数.但是在更多的问题中所遇到的是多个自变量的函数.例如,矩形的面积 $S=xy$,描述了面积 S 和长 x、宽 y 这两个量之间的函数关系.又如,烧热的铁块中每一点的温度 T 与该点的位置之间有着确定的函数关系,即当铁块中点的位置用坐标 (x,y,z) 表示时,温度 T 由 x,y,z 这三个变量所确定.如果进一步考虑上述铁块的冷却过程,那末温度 T 还与时间 t 有关,即 T 的值由 x,y,z,t 这四个变量所确定.这种两个、三个或四个自变量的函数,分别称为二元、三元或四元函数,一般统称为多元函数.

多元函数是一元函数的推广,因此它保留着一元函数的许多性质,但也由于自变量由一个增加到多个,产生了某些新的内容,读者对这些内容尤其要加以注意.对于多元函数,我们将着重讨论二元函数.在掌握了二元函数的有关理论与研究方法之后,我们可以把它推广到一般的多元函数中去.

一元函数的定义域是实数轴上的点集;二元函数的定义域将是坐标平面上的点集.因此,在讨论二元函数之前,有必要先了解有关平面点集的一些基本概念.

一　平面点集

由平面解析几何知道,当在平面上确定了一个坐标系(今后如不特别指出,都假定是直角坐标系)之后,所有有序实数对①(x,y)与平面上所有的点之间建立了一一对应.因此,今后将把"数对"与"平面上的点"这两种说法看作是完全等同的.这种确定了坐标系的平面,称为**坐标平面**.

坐标平面上满足某种条件 P 的点的集合,称为**平面点集**,并记作

$$E=\{(x,y)\mid(x,y)\text{ 满足条件 }P\}.$$

例如全平面上的点所组成的点集是

$$\mathbf{R}^2=\{(x,y)\mid-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty\}.\tag{1}$$

① 或简称"数对".

平面上以原点为中心，r 为半径的圆内所有的点的集合是

$$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2<r^2\}. \tag{2}$$

而集合

$$S=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\} \tag{3}$$

则为一矩形及其内部所有点的全体，为书写上的方便，也常把它记作$[a,b]\times[c,d]$①.

平面点集

$$\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$$

与

$$\{(x,y)\mid |x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta\}$$

分别称为以点 $A(x_0,y_0)$为中心的 δ **圆邻域**与δ **方邻域**(图 16－1).

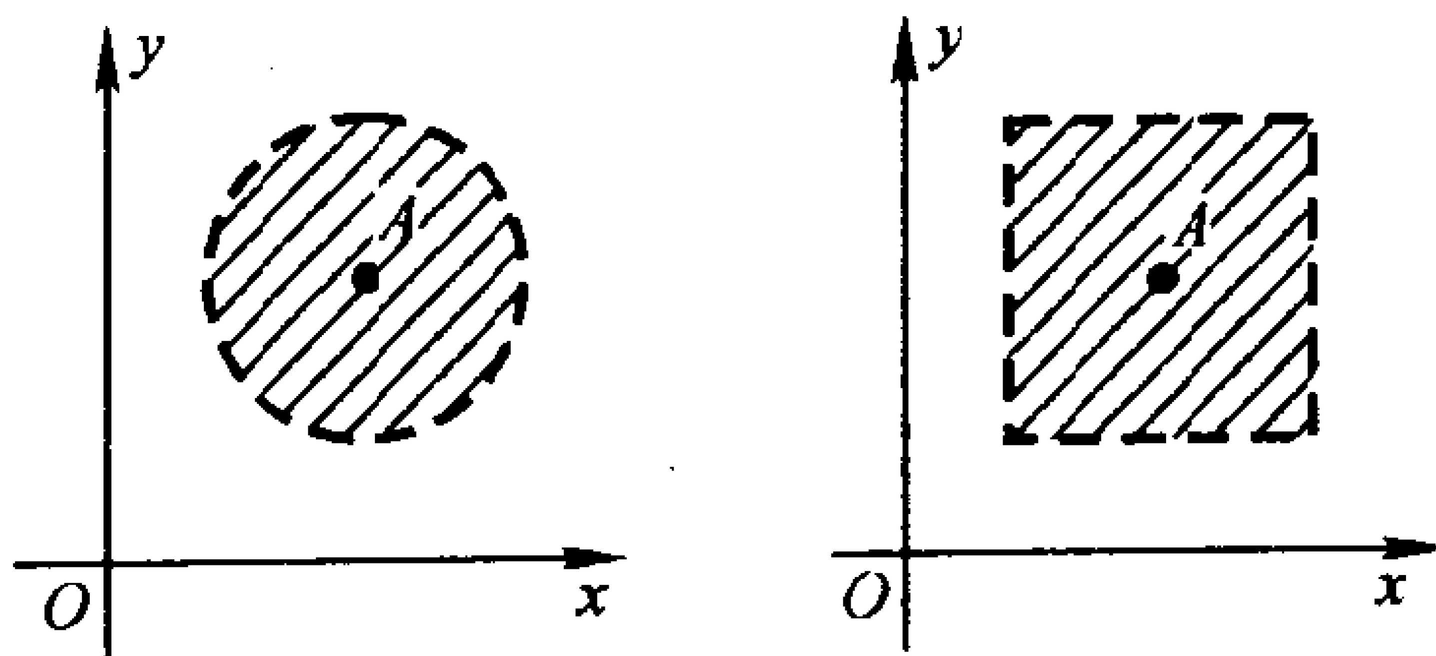


图 16－1

由于点 A 的任一圆邻域可以包含在点A 的某一方邻域之内(反之亦然)，因此通常用"**点 A 的δ 邻域**"或"**点 A 的邻域**"泛指这两种形状的邻域，并以记号 $U(A;\delta)$或 $U(A)$来表示.点 A 的**空心邻域**是指

$$\{(x,y)\mid 0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$$

或　　$$\{(x,y)\mid |x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta,(x,y)\neq(x_0,y_0)\}$$

并用记号 $U^{\circ}(A;\delta)$或 $U^{\circ}(A)$来表示.

下面利用邻域来描述点和点集之间的关系.

任意一点 $A\in\mathbf{R}^2$ 与任意一个点集 $E\subset\mathbf{R}^2$ 之间必有以下三种关系之一:

(i) 内点——若存在点 A 的某邻域$U(A)$，使得 $U(A)\subset E$，则称点 A 是点 E 的**内点**；E 的全体内点构成的集合称为E 的**内部**，记作 $\operatorname{int} E$.

(ii) 外点——若存在点 A 的某邻域 $U(A)$，使得 $U(A)\cap E=\varnothing$，则称 A 是点集E 的**外点**.

(iii) 界点——若在点 A 的任何邻域内既含有属于E 的点，又含有不属于 E

---

① 一般地，对于任意两个数集(或点集)A、B，记 $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$，称为 A 与B的**直积**.例如 $A=\{(u,v)\mid u^2+v^2\leqslant1\}$，$B=[0,1]$，则 $A\times B=\{(u,v,w)\mid u^2+v^2\leqslant1,0\leqslant w\leqslant1\}$.

的点,则称 A 是集合E 的**界点**.即对任何正数 δ,恒有

$$U(A;\delta)\cap E\neq\varnothing \text{且} U(A;\delta)\cap \complement E\neq\varnothing,$$

其中$\complement E=\mathbf{R}^2\setminus E$ 是 E 关于全平面的**余集**,E 的全体界点构成 E 的**边界**,记作∂E.

E 的内点必定属于E;E 的外点必定不属于E;E 的界点可能属于E,也可能不属于 E.

点 A 与点集E 的上述关系是按"点 A 在E 内或在E 外"来区分的.此外,还可按在点 A 的近旁是否密集着E 中无穷多个点而构成另一类关系:

(i) 聚点——若在点 A 的任何空心邻域$U^{\circ}(A)$内都含有 E 中的点,则称 A 是 E 的**聚点**,聚点本身可能属于 E,也可能不属于 E.

(ii) 孤立点——若点 $A\in E$,但不是 E 的聚点,即存在某一正数 δ,使得 $U^{\circ}(A;\delta)\cap E=\varnothing$,则称点 A 是E 的**孤立点**.

显然,孤立点一定是界点;内点和非孤立的界点一定是聚点;既不是聚点,又不是孤立点,则必为外点.

例 1 设平面点集

$$D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2<4\}. \tag{4}$$

满足 $1<x^2+y^2<4$ 的一切点都是 D 的内点;满足 $x^2+y^2=1$ 的一切点是 D 的界点,它们都属于 D;满足 $x^2+y^2=4$ 的一切点也是 D 的界点,但它们都不属于D;点集 D 连同它外圆边界上的一切点都是D 的聚点. □

根据点集中所属点的特征,我们再来定义一些重要的平面点集.

开集——若平面点集所属的每一点都是 E 的内点(即 $\operatorname{int} E=E$),则称 E 为**开集**.

闭集——若平面点集 E 的所有聚点都属于E,则称 E 为**闭集**.若点集 E 没有聚点,这时也称 E 为闭集.

在前面列举的平面点集中,(2)所表示的点集 C 是开集;(3)所表示的点集 S 是闭集;(4)所表示的点集 D 既非开集,又非闭集;而且(1)所表示的点集 $\mathbf{R}^2$ 既是开集又是闭集.此外,还约定空集$\varnothing$既是开集又是闭集.可以证明,在一切平面点集中,只有 $\mathbf{R}^2$ 与$\varnothing$是既开又闭的点集.

开域——若非空开集 E 具有**连通性**,即 E 中任意两点之间都可用一条完全含于E 的有限折线(由有限条直线段连接而成的折线)相连接,则称 E 为**开域**(或称**连通开集**).

闭域——开域连同其边界所成的点集称为**闭域**.

区域——开域、闭域,或者开域连同其一部分界点所成的点集,统称为**区域**.

在上述诸例中,(2)是开域,(3)是闭域,(1)既是开域又是**闭域**.

又如

$$E=\{(x,y)\mid xy>0\} \tag{5}$$

虽然是开集,但因Ⅰ、Ⅲ象限之间不具有连通性,所以它不是开域,也不是区域.

有界点集——对于平面点集 E,若存在某一正数 r,使得

$$E \subset U(O;r),$$

其中 O 是坐标原点(也可以是其他固定点),则称 E 是**有界点集**.否则就是**无界点集**.上述(2)、(3)、(4)都是有界点集,(1)、(5)则是无界点集.

E 为有界点集的另一等价说法是:存在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]\supset E$.

点集的有界性还可用点集的直径来反映,所谓点集 E 的**直径**,就是

$$d(E)=\sup_{P_1,P_2\in E}\rho(P_1,P_2),$$

其中 $\rho(P_1,P_2)$ 表示 P_1 与 P_2 两点之间的距离,当 P_1、P_2 的坐标分别为 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 时,则

$$\rho(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

于是,当且仅当 $d(E)$ 为有限值时 E 是有界点集.

根据距离概念,读者不难证明如下**三角形不等式**,即对 $\mathbf{R}^2$ 上任何三点 P_1,P_2 和 P_3,皆有

$$\rho(P_1,P_2)\leqslant\rho(P_1,P_3)+\rho(P_2,P_3).$$

二 $\mathbf{R}^2$ 上的完备性定理

反映实数系完备性的几个等价定理,构成了一元函数极限理论的基础.现在把这些定理推广到 $\mathbf{R}^2$,它们同样是二元函数极限理论的基础.为此,先给出**平面点列的收敛性概念**.

定义1 设 $\{P_n\}\subset\mathbf{R}^2$ 为平面点列,$P_0\in\mathbf{R}^2$ 为一固定点.若对任给的正数 ε,存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,有 $P_n\in U(P_0;\varepsilon)$,则称点列 $\{P_n\}$ **收敛**于点 P_0,记作

$$\lim_{n\to\infty}P_n=P_0 \quad 或 \quad P_n\to P_0,n\to\infty.$$

在坐标平面中,以 (x_n,y_n) 与 (x_0,y_0) 分别表示 P_n 与 P_0 时,$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$ 显然等价于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$.同样地,当以 $\rho_n=\rho(P_n,P_0)$ 表示点 P_n 与 P_0 之距离时,$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$ 也就等价于 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=0$.由于点列极限这两种等价形式都是数列极限,因此立即得到下述关于平面点列的收敛原理.

定理16.1(柯西准则) 平面点列 $\{P_n\}$ 收敛的充要条件是:任给正数 ε,存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,对一切正整数 p,都有

$$\rho(P_n,P_{n+p})<\varepsilon \tag{6}$$

证 [必要性] 设 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$,则由三角不等式

$$\rho(P_n,P_{n+p})\leqslant\rho(P_n,P_0)+\rho(P_{n+p},P_0)$$

及点列收敛定义,对所给 ε,存在正整数 N,当 $n>N$(也有 $n+p>N$)时,恒有

$$\rho(P_n,P_0)<\frac{\varepsilon}{2},\quad \rho(P_{n+p},P_0)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

应用三角形不等式,立刻得到(6)式.

[充分性] 当(6)式成立时,则同时有

$$|x_{n+p}-x_n|\leqslant\rho(P_n,P_{n+p})<\varepsilon,$$
$$|y_{n+p}-y_n|\leqslant\rho(P_n,P_{n+p})<\varepsilon.$$

这说明数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都满足柯西收敛准则(定理 2.10),所以它们都收敛.设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$.从而由点列收敛概念推得$\{P_n\}$收敛于点 $P_0(x_0,y_0)$(本节习题 5). □

定理 16.2(闭域套定理) 设$\{D_n\}$是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭域列,它满足:

(i) $D_n\supset D_{n+1}$, $n=1,2,\cdots$;

(ii) $d_n=d(D_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=0$,

则存在惟一的点 $P_0\in D_n$, $n=1,2,\cdots$.

证 任取点列 $P_n\in D_n$, $n=1,2,\cdots$.由于 $D_{n+p}\subset D_n$,因此 $P_n,P_{n+p}\in D_n$,从而有(图 16-2)

$$\rho(P_n,P_{n+p})\leqslant d_n\to0,\ n\to\infty.$$

由定理 16.1 知道存在 $P_0\in\mathbf{R}^2$.使得

$$\lim_{n\to\infty}P_n=P_0.$$

任意取定 n,对任何正整数 p 有

$$P_{n+p}\in D_{n+p}\subset D_n.$$

再令 $p\to\infty$,由于 D_n 是闭域,从而必定是闭集(本节习题 4).因此 P_0 作为 D_n 的聚点必定属于 D_n,即

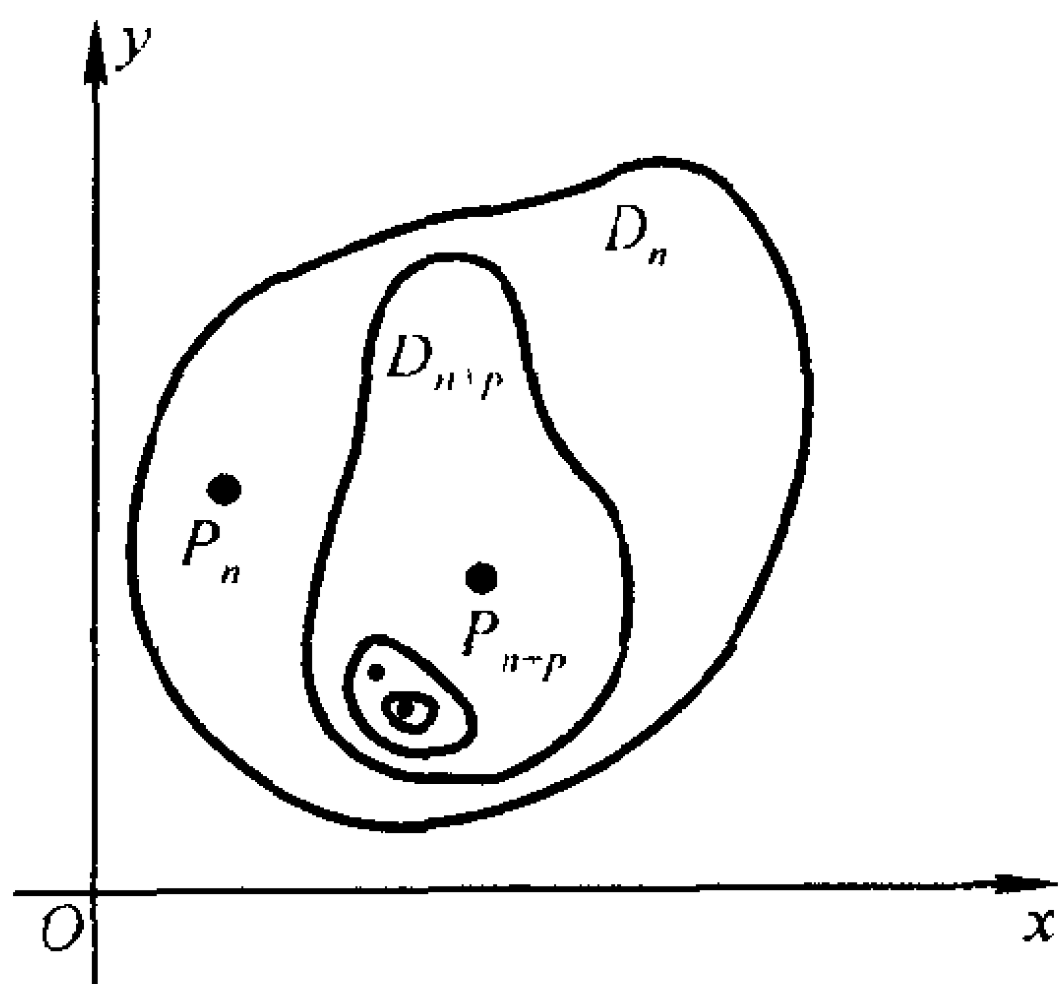


图 16-2

$$P_0=\lim_{p\to\infty}P_{n+p}\in D_n,\ n=1,2,\cdots.$$

最后证明 P_0 的惟一性.若还有 $P_0'\in D_n$, $n=1,2,\cdots$,则由

$$\rho(P_0,P_0')\leqslant\rho(P_0,P_n)+\rho(P_0',P_n)\leqslant2d_n\to0,\ n\to\infty$$

得到 $\rho(P_0,P_0')=0$,即 $P_0=P_0'$. □

闭域套定理显然是 $\mathbf{R}$ 中闭区间套定理(定理 7.1)的直接推广.

定理 16.3(聚点定理) 设 $E\subset\mathbf{R}^2$ 为有界无限点集,则 E 在 $\mathbf{R}^2$ 中至少有一个聚点.

证 现用闭域套定理来证明.由于 E 是平面有界集合,因此存在一个闭正方形 D_1 包含它.连接正方形对边中点,把 D_1 分成四个小的闭正方形,则在这四

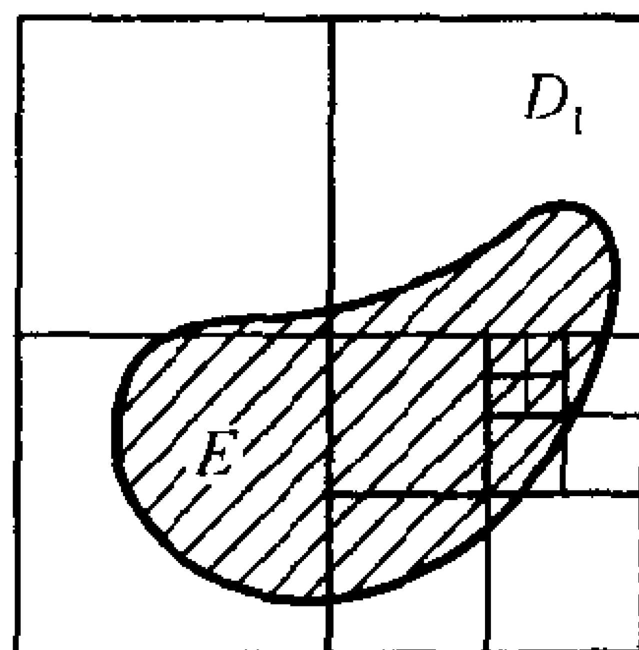


图 16－3

个小闭正方形中,至少有一个小闭正方形含有 E 中无限多个点.记这个小闭正方形为 D_2.再对正方形 D_2 如上法分成四个更小的闭正方形,其中又至少有一个小闭正方形含有 E 的无限多个点.如此下去得到一个闭正方形序列(图 16－3):

$$D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset \cdots.$$

容易看到这个闭正方形序列$\{D_n\}$的边长随着 n 趋向于无限而趋向于零.于是由闭域套定理,存在一点 $M_0 \in D_n, n=1,2,\cdots$.

现在证明 M_0 就是 E 的聚点.任取 M_0 的 ε 邻域 $U(M_0;\varepsilon)$,当 n 充分大之后,正方形的边长可小于 $\varepsilon/2$,即有 $D_n \subset U(M_0;\varepsilon)$.又由 D_n 的取法知道 $U(M_0;\varepsilon)$中含有 E 的无限多个点,这就表明 M_0 是 E 的聚点.

推论　有界无限点列$\{P_n\}\subset\mathbf{R}^2$ 必存在收敛子列$\{P_{n_k}\}$.

证明可仿照 $\mathbf{R}$ 中的相应命题(定理 7.2 推论)

定理 16.4(有限覆盖定理)　设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 为一有界闭域,$\{\Delta_\alpha\}$为一开域族,它覆盖了 D(即 $D\subset\bigcup\limits_\alpha\Delta_\alpha$),则在$\{\Delta_\alpha\}$中必存在有限个开域 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n$,它们同样覆盖了 $D$$\left(\text{即 } D\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Delta_i\right)$.

本定理的证明与 $\mathbf{R}$ 中的有限覆盖定理(定理 7.3)相仿,在此从略.

在更一般的情况下,可将定理 16.4 中的 D 改设为有界闭集,而 $\Delta_\alpha\subset\mathbf{R}^2$ 为一族开集,此时定理结论依然成立.

三　二元函数

函数(或映射)是两个集合之间的一种确定的对应关系.实数集到实数集的映射是一元函数,现在定义二元函数.

定义 2　设平面点集 $D\subset\mathbf{R}^2$,若按照某对应法则 f,D 中每一点 $P(x,y)$都有惟一确定的实数 z 与之对应,则称 f 为定义在 D 上的**二元函数**(或称 f 为 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个**映射**),记作

$$\begin{aligned} f:D &\to \mathbf{R},\\ P &\mapsto z, \end{aligned} \tag{7}$$

且称 D 为 f 的**定义域**;$P\in D$ 所对应的 z 为 f 在点 P 的**函数值**,记作 $z=f(P)$ 或 $z=f(x,y)$;全体函数值的集合为 f 的**值域**,记作 $f(D)\subset\mathbf{R}$.通常还把 P 的坐标 x 与 y 称为 f 的**自变量**,而把 z 称为**因变量**.

在映射意义下,上述 $z=f(P)$称为 P 的**象**,P 称为 z 的**原象**.当把$(x,y)\in D$ 和它所对应的象 $z=f(x,y)$一起组成三维数组(x,y,z)时,三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 中的点集

$$S = \{(x,y,z) \mid z = f(x,y),(x,y) \in D\} \subset \mathbf{R}^3$$

便是二元函数 f 的**图象**.通常 $z=f(x,y)$ 的图象是一空间曲面,f 的定义域 D 便是该曲面在 xOy 平面上的投影.

为方便起见,由(7)式所确定的二元函数也记作

$$z = f(x,y), \quad (x,y) \in D$$

或
$$z = f(P), \quad P \in D,$$

且当它的定义域 D 不会被误解的情况下,也简单地说"函数 $z=f(x,y)$"或"函数 f".

例 2 函数 $z=2x+5y$ 的图象是 $\mathbf{R}^3$ 中一个平面,其定义域是 $\mathbf{R}^2$,值域是 $\mathbf{R}$. □

例 3 函数 $z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$ 的定义域是 xOy 平面上的单位圆域 $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$,值域为区间 $[0,1]$,它的图象是以原点为中心的单位球面的上半部分(图 16-4). □

例 4 $z=xy$ 是定义在整个 xOy 平面上的函数,它的图象是过原点的**双曲抛物面**(图 16-5). □

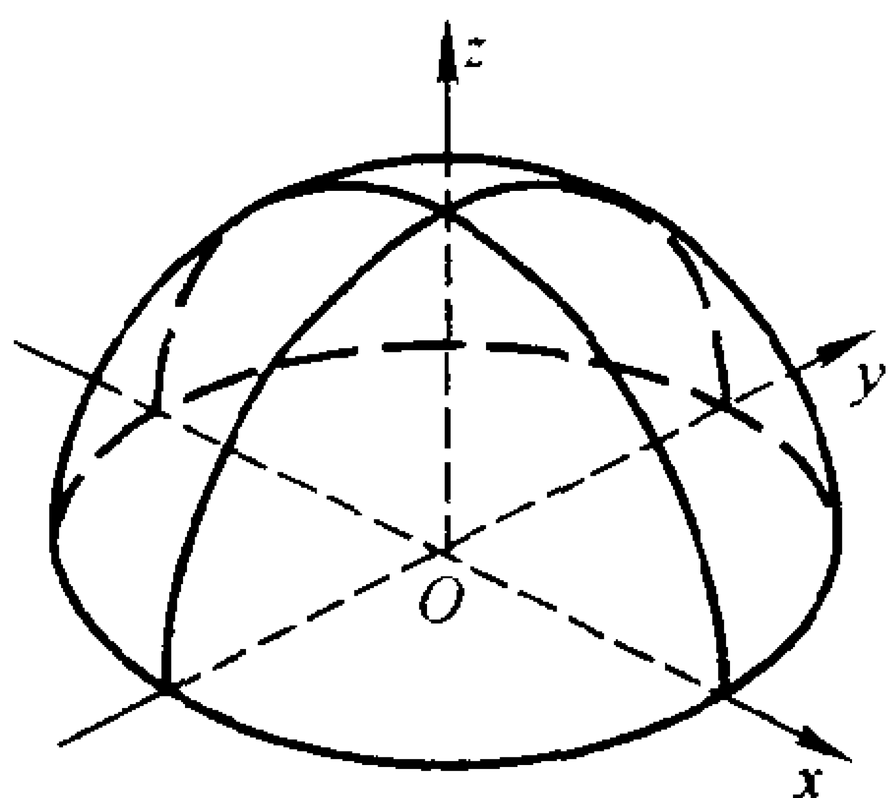


图 16-4

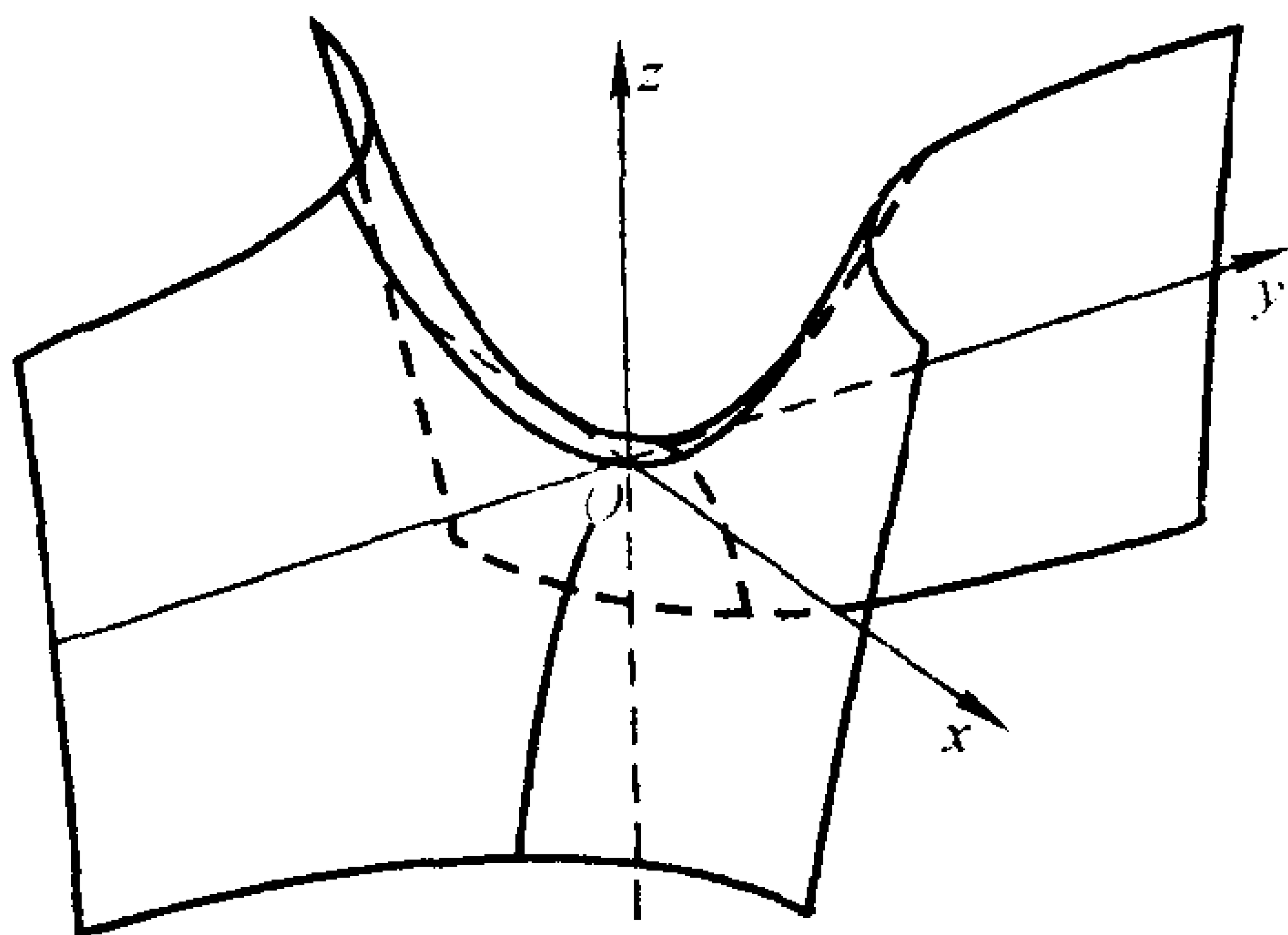


图 16-5

例 5 $z=[\sqrt{x^2+y^2}]$ 是定义在 $\mathbf{R}^2$ 上的函数,值域是全体非负整数,它的图形如图 16-6 所示. □

若二元函数的值域是有界数集,则称该函数为**有界函数**,如例 3 中的函数;若值域是无界数集,则称该函数为**无界函数**,如例 2、4、5 中的函数.

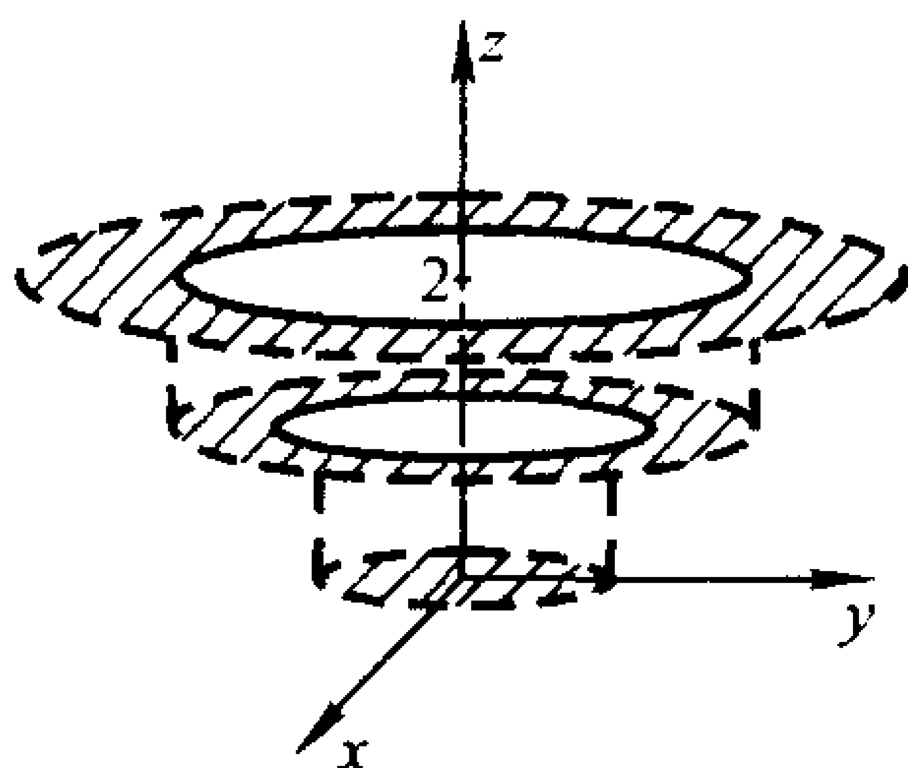


图 16-6

四 n 元函数

所有 n 个有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体称为 **n 维向量空间**,简称 **n 维空间**,记作 $\mathbf{R}^n$.其中每个有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个

点;n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是这个点的坐标.

设 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的点集,若有某个对应法则 f,使 E 中每一点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,都有惟一的一个实数 y 与之对应,则称 f 为定义在 E 上的 **n 元函数**(或称 f 为 $E\subset\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射),记作

$$f:E\to\mathbf{R},$$
$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto y. \tag{8}$$

也常把 n 元函数简写成

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E$$

或

$$y=f(P),P\in E. \tag{9}$$

对于后一种被称为"点函数"的写法,它可使多元函数与一元函数在形式上尽量保持一致,以便仿照一元函数的办法来处理多元函数中的许多问题;同时还可把二元函数的某些论断推广到 $n(\geqslant 3)$元函数.

习　　题

1. 判断下列平面点集中哪些是开集、闭集、有界集、区域?并分别指出它们的聚点与界点:

(1) $[a,b)\times[c,d)$;　　(2) $\{(x,y)\mid xy\neq 0\}$;

(3) $\{(x,y)\mid xy=0\}$;　　(4) $\{(x,y)\mid y>x^2\}$;

(5) $\{(x,y)\mid x<2,y<2,x+y>2\}$;

(6) $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1$ 或 $y=0,0\leqslant x\leqslant 1\}$;

(7) $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1$ 或 $y=0,1\leqslant x\leqslant 2\}$;

(8) $\{(x,y)\mid x,y$ 均为整数$\}$;　　(9) $\{(x,y)\mid y=\sin\dfrac{1}{x},x>0\}$.

2. 试问集合 $\{(x,y)\mid 0<|x-a|<\delta,0<|y-b|<\delta\}$ 与集合 $\{(x,y)\mid |x-a|<\delta,|y-b|<\delta,(x,y)\neq(a,b)\}$ 是否相同?

3. 证明:当且仅当存在各点互不相同的点列 $\{P_n\}\subset E,P_n\neq P_0,\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$ 时,P_0 是 E 的聚点.

4. 证明:闭域必为闭集.举例说明反之不真.

5. 证明:点列 $\{P_n(x_n,y_n)\}$ 收敛于 $P_0(x_0,y_0)$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$.

6. 求下列各函数的函数值:

(1) $f(x,y)=\left[\dfrac{\arctan(x+y)}{\arctan(x-y)}\right]^2$,求 $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$;

(2) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$,求 $f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$;

(3) $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$,求 $f(tx,ty)$.

7. 设 $F(x,y)=\ln x\ln y$,证明:若 $u>0,v>0$,则

$$F(xy,uv) = F(x,u) + F(x,v) + F(y,u) + F(y,v).$$

8. 求下列各函数的定义域,画出定义域的图形,并说明这是何种点集:

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$;

(2) $f(x,y)=\dfrac{1}{2x^2+3y^2}$;

(3) $f(x,y)=\sqrt{xy}$;

(4) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$;

(5) $f(x,y)=\ln x+\ln y$;

(6) $f(x,y)=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$;

(7) $f(x,y)=\ln(y-x)$;

(8) $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$;

(9) $f(x,y,z)=\dfrac{z}{x^2+y^2+1}$;

(10) $f(x,y,z)=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}\quad(R>r)$.

---

9. 证明:开集与闭集具有对偶性——若 E 为开集,则 $\complement E$ 为闭集;若 E 为闭集,则 $\complement E$ 为开集.

10. 证明:

(1) 若 F_1,F_2 为闭集,则 $F_1\cup F_2$ 与 $F_1\cap F_2$ 都为闭集;

(2) 若 E_1,E_2 为开集,则 $E_1\cup E_2$ 与 $E_1\cap E_2$ 都为开集;

(3) 若 F 为闭集,E 为开集,则 $F\setminus E$ 为闭集,$E\setminus F$ 为开集.

11. 试把闭域套定理推广为闭集套定理,并证明之.

12. 证明定理 16.4(有限覆盖定理).

§ 2 二元函数的极限

一 二元函数的极限

定义 1 设 f 为定义在 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上的二元函数,P_0 为 D 的一个聚点,A 是一个确定的实数.若对任给正数 ε,总存在某正数 δ,使得当 $P\in U^{\circ}(P_0;\delta)\cap D$ 时,都有

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

则称 f 在 D 上当 $P\to P_0$ 时,以 A 为**极限**,记作

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(P)=A. \tag{1}$$

在对于 $P\in D$ 不致产生误解时,也可简单地写作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A. \tag{1'}$$

当 P,P_0 分别用坐标(x,y),(x_0,y_0)表示时,(1′)式也常写作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A. \tag{1''}$$

例 1 依定义验证 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}(x^2+xy+y^2)=7$.

证 因为

$$
\begin{aligned}
&|x^2+xy+y^2-7| \\
&\quad=|(x^2-4)+xy-2+(y^2-1)| \\
&\quad=|(x+2)(x-2)+(x-2)y+2(y-1)+(y+1)(y-1)| \\
&\quad\leqslant|x-2||x+y+2|+|y-1||y+3|.
\end{aligned}
$$

先限制在点(2,1)的 $\delta=1$ 的方邻域

$$\{(x,y)\,|\,|x-2|<1,|y-1|<1\}$$

内讨论,于是有

$$
\begin{aligned}
|y+3|&=|y-1+4|\leqslant|y-1|+4<5, \\
|x+y+2|&=|(x-2)+(y-1)+5| \\
&\leqslant|x-2|+|y-1|+5<7.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
|x^2+xy+y^2-7|&\leqslant 7|x-2|+5|y-1| \\
&<7(|x-2|+|y-1|).
\end{aligned}
$$

设 ε 为任给的正数,取 $\delta=\min\left(1,\frac{\varepsilon}{14}\right)$,则当 $|x-2|<\delta,|y-1|<\delta,(x,y)\neq(2,1)$时,就有

$$|x^2+xy+y^2-7|<7\cdot2\delta=14\delta<\varepsilon. \qquad \square$$

例 2 设

$$
f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0), \end{cases}
$$

证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

证 对函数的自变量作极坐标变换 $x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi$. 这时$(x,y)\to(0,0)$等价于对任何 φ 都有 $r\to0$. 由于

$$
\begin{aligned}
|f(x,y)-0|&=\left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| \\
&=\frac{1}{4}r^2|\sin 4\varphi|\leqslant\frac{1}{4}r^2,
\end{aligned}
$$

因此,对任何 $\varepsilon>0$,只须取 $\delta=2\sqrt{\varepsilon}$,当 $0<r=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,不管 φ 取什么值都有 $|f(x,y)-0|<\varepsilon$ 即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$. $\square$

下述定理及其推论相当于数列极限的子列定理与一元函数极限的海涅归结原则(而且证明方法也相似). 读者可通过它们进一步认识定义 1 中“$P\to P_0$”所包含的意义.

定理 16.5 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)=A$ 的充要条件是：对于 D 的任一子集 E，只要 P_0 是 E 的聚点，就有

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in E}}f(P)=A.$$

推论 1 设 $E_1\subset D$，P_0 是 E_1 的聚点．若 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in E_1}}f(P)$ 不存在，则 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)$ 也不存在．

推论 2 设 $E_1,E_2\subset D$，P_0 是它们的聚点，若存在极限

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in E_1}}f(P)=A_1,\quad \lim_{\substack{P\to P_0\\P\in E_2}}f(P)=A_2,$$

但 $A_1\neq A_2$，则 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)$ 不存在．

推论 3 极限 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)$ 存在的充要条件是：对于 D 中任一满足条件 $P_n\neq P_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$ 的点列 $\{P_n\}$，它所对应的函数列 $\{f(P_n)\}$ 都收敛．

下面两个例子是它们的应用．

例 3 讨论 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时是否存在极限．

解 当动点 (x,y) 沿着直线 $y=mx$ 而趋于定点 $(0,0)$ 时，由于此时 $f(x,y)=f(x,mx)=\dfrac{m}{1+m^2}$，因而有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=mx}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}f(x,mx)=\frac{m}{1+m^2}.$$

这一结果说明动点沿不同斜率 m 的直线趋于原点时，对应的极限值也不同，因此所讨论的极限不存在． □

例 4 二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0<y<x^2,\\ & -\infty<x<+\infty \text{ 时},\\ 0, & \text{其余部分}.\end{cases}$$

如图 16－7 所示，当 (x,y) 沿任何直线趋于原点时，相应的 $f(x,y)$ 都趋于零，但这并不表明此函数在 $(x,y)\to(0,0)$ 时极限存在．因为当点 (x,y) 沿抛物线 $y=kx^2\,(0<k<1)$ 趋于 O 点时，$f(x,y)$ 将趋于 1．所以极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在． □

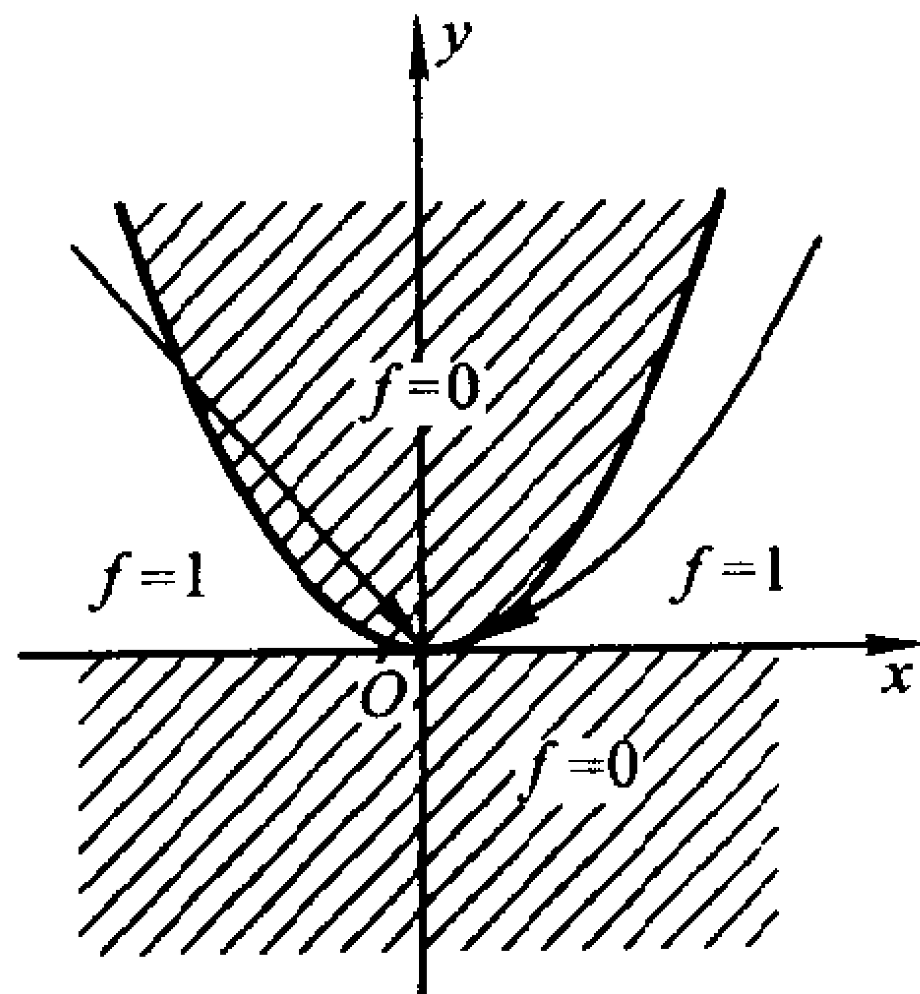


图 16－7

下面我们再给出当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 趋于 $+\infty$（非正常极限）的定义.

定义 2 设 D 为二元函数 f 的定义域，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的一个聚点. 若对任给正数 M，总存在点 P_0 的一个 δ 邻域，使得当 $P(x,y)\in U^\circ(P_0;\delta)\cap D$ 时，都有 $f(P)>M$，则称 f 在 D 上当 $P\to P_0$ 时，存在**非正常极限** $+\infty$，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=+\infty$$

或

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=+\infty.$$

仿此可类似地定义：

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=-\infty \quad 与 \quad \lim_{P\to P_0} f(P)=\infty.$$

例 5 设 $f(x,y)=\dfrac{1}{2x^2+3y^2}$. 证明

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=+\infty.$$

证 因为 $2x^2+3y^2<4(x^2+y^2)$，对任给正数 M，取

$$\delta=\frac{1}{2\sqrt{M}},$$

就有

$$\sqrt{x^2+y^2}<\frac{1}{2\sqrt{M}}.$$

由此推得

$$2x^2+3y^2<\frac{1}{M},$$

即

$$\frac{1}{2x^2+3y^2}>M.$$

这就证得结果（该函数在原点附近的图象参见图 16-8）. □

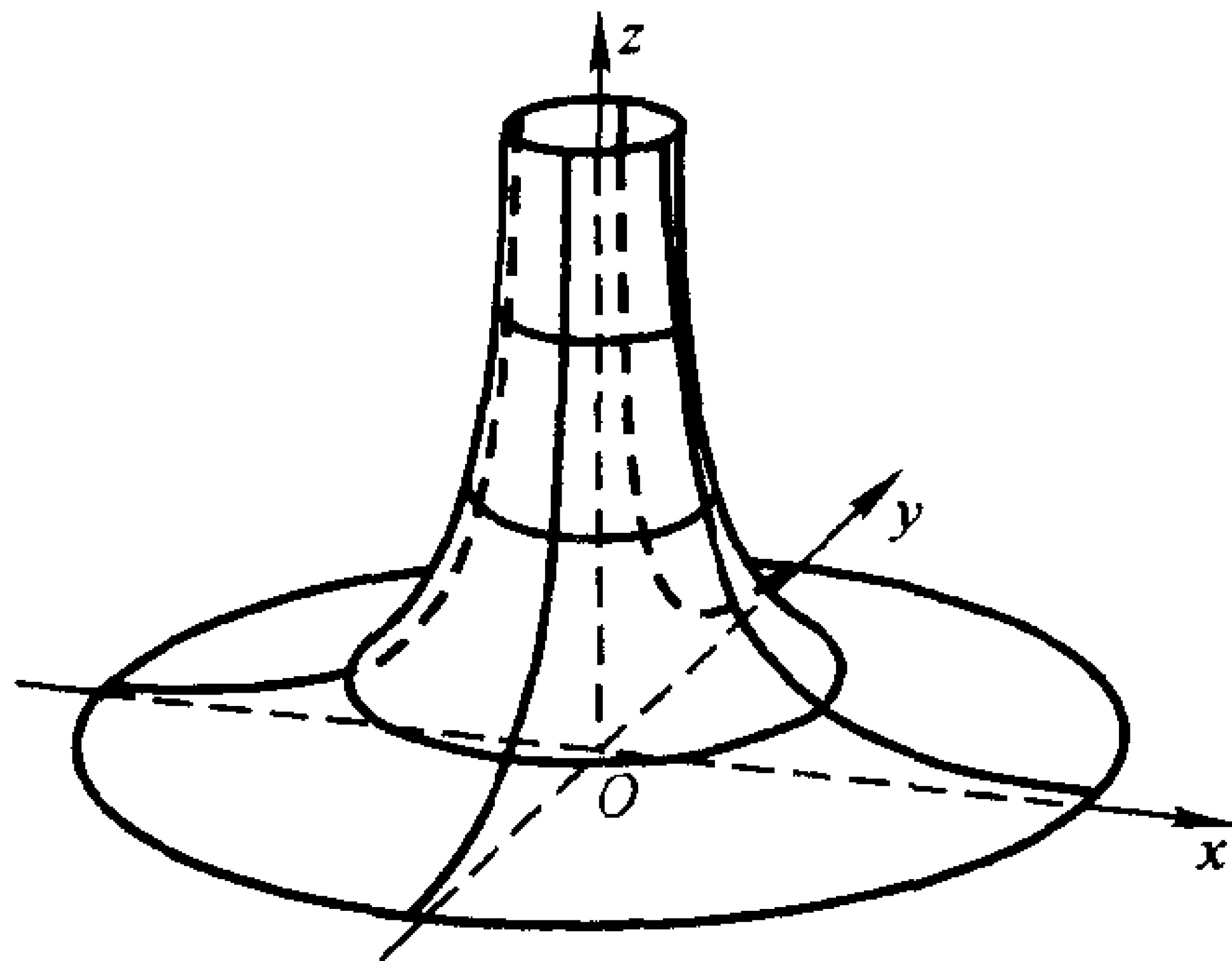


图 16-8

二元函数极限的四则运算法则与一元函数极限四则运算法则相仿，特别把 $f(x,y)$ 看作点函数 $f(P)$ 时，相应定理的证法也完全相同，这里就不再一一列

出.

二 累次极限

在上一段所研究的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 中,两个自变量 x,y 同时以任何方式趋于 x_0,y_0. 这种极限也称为**重极限**. 在这一段里,我们要考察 x 与 y 依一定的先后顺序相继趋于 x_0 与 y_0 时 f 的极限,这种极限称为累次极限.

定义 3 设 $E_x, E_y \subset \mathbf{R}$, x_0 是 E_x 的聚点, y_0 是 E_y 的聚点,二元函数 f 在集合 $D=E_x\times E_y$ ①上有定义. 若对每一个 $y\in E_y, y\neq y_0$, 存在极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E_x}} f(x,y)$, 由于此极限一般与 y 有关,因此记作

$$\varphi(y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E_x}} f(x,y),$$

而且进一步存在极限

$$L=\lim_{\substack{y\to y_0\\ y\in E_y}}\varphi(y),$$

则称此极限为二元函数 f 先对 $x(\to x_0)$ 后对 $y(\to y_0)$ 的**累次极限**,并记作

$$L=\lim_{\substack{y\to y_0\\ y\in E_y}}\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E_x}} f(x,y)$$

或简记作

$$L=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

类似地可以定义先对 y 后对 x 的累次极限

$$K=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

累次极限与重极限是两个不同的概念,它们的存在性没有必然的蕴含关系. 下面三个例子将说明这一点.

例 6 设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. 由例 3 已经知道 $(x,y)\to(0,0)$ 时 f 的重极限不存在. 但当 $y\neq 0$ 时有

$$\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0.$$

从而有

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0.$$

同理可得

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0.$$

---

① 为理解上简单起见,可认为 E_x, E_y 均为区间.

即 f 的两个累次极限都存在而且相等. □

例 7 设 $f(x,y)=\dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$,它关于原点的两个累次极限分别为

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}=\lim_{y\to0}\frac{y^2-y}{y}=\lim_{y\to0}(y-1)=-1$$

与

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2}{x}=\lim_{x\to0}(1+x)=1.$$

当沿斜率不同的直线 $y=mx$,$(x,y)\to(0,0)$时,容易验证所得极限也不同.因此该函数的重极限不存在(下面的定理 16.6 将告诉我们,这是一个必然的结果). □

例 8 设 $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$,它关于原点的两个累次极限都不存在.这是因为对任何 $y\neq0$,当 $x\to0$ 时 f 的第二项不存在极限.同理,对任何 $x\neq0$,当 $y\to0$ 时 f 的第一项也不存在极限.但是由于

$$\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|+|y|,$$

故按定义 1 知道 f 的重极限存在,且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$. □

下述定理告诉我们:重极限与累次极限在一定条件下也是有联系的.

定理 16.6 若 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)存在重极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$$

与累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y),$$

则它们必相等.

证 设

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A,$$

则对任给的正数 ε,总存在正数 δ,使得当 $P(x,y)\in U^{\circ}(P_0;\delta)$时,有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon. \tag{2}$$

另由存在累次极限之假设,对任一满足不等式

$$0<|x-x_0|<\delta \tag{3}$$

的 x,存在极限

$$\lim_{y\to y_0}f(x,y)=\varphi(x). \tag{4}$$

回到不等式(2),让其中 $y\to y_0$,由(4)可得

$$|\varphi(x)-A|\leqslant\varepsilon. \tag{5}$$

故由(3),(5)证得 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$,即

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A. \qquad \square$$

由这个定理可导出如下两个便于应用的推论.

推论 1 若累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y),\ \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)$$

和重极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$$

都存在,则三者相等.

推论 2 若累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y)\quad 与\quad \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)$$

存在但不相等,则重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 必不存在.

请注意,定理 16.6 保证了在重极限与一个累次极限都存在时,它们必相等.(本节习题 3 则给出较定理 16.6 弱一些的充分条件.)但它们对另一个累次极限的存在性却得不出什么结论,对此只需考察本节习题 2(5).

推论 1 给出了累次极限次序可交换的一个充分条件;推论 2 可被用来否定重极限的存在性(如例 7).

习　题

1. 试求下列极限(包括非正常极限):

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$;　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$;　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy+1}{x^4+y^4}$;

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{1}{2x-y}$;　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

(7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

2. 讨论下列函数在点(0,0)的重极限与累次极限:

(1) $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$;　(2) $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$;

(3) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$;　(4) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$;

(5) $f(x,y)=y\sin\dfrac{1}{x}$;　(6) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$;

(7) $f(x,y)=\dfrac{e^x-e^y}{\sin xy}$.

3. 证明：若 1° $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$存在且等于 A；2° y 在 b 的某邻域内，存在有$\lim\limits_{x\to a} f(x,y)=\varphi(y)$，则$\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)=A$.

4. 试应用 $\varepsilon-\delta$ 定义证明

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}=0.$$

5. 叙述并证明：二元函数的惟一性定理，局部有界性定理与局部保号性定理.

---

6. 试写出下列类型极限的精确定义：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,-\infty)} f(x,y)=A$； (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,+\infty)} f(x,y)=A$.

7. 试求下列极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$； (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{x\sin y}$； (4) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,0)} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

8. 试作一函数 $f(x,y)$使当 $x\to+\infty$，$y\to+\infty$时，

(1) 两个累次极限存在而重极限不存在；

(2) 两个累次极限不存在而重极限存在；

(3) 重极限与累次极限都不存在；

(4) 重极限与一个累次极限存在，另一个累次极限不存在.

9. 证明定理 16.5 及其推论 3.

§3 二元函数的连续性

一 二元函数的连续性概念

定义 设 f 为定义在点集 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上的二元函数，$P_0\in D$（它或者是 D 的聚点，或者是 D 的孤立点）. 对于任给的正数 ε，总存在相应的正数 δ，只要 $P\in U(P_0;\delta)\cap D$，就有

$$|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon, \tag{1}$$

则称 f 关于集合 D在点 P_0 **连续**. 在不致误解的情况下，也称 f 在点P_0 连续.

若 f 在D 上任何点都关于集合D 连续，则称 f 为D 上的**连续函数**.

由上述定义知道：若 P_0 是 D 的孤立点，则 P_0 必定是 f 关于D 的连续点；若 P_0 是 D 的聚点，则 f 关于D 在P_0 连续等价于

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(P)=f(P_0). \tag{2}$$

如果 P_0 是 D 的聚点，而(2)式不成立(其含义与一元函数的对应情形相同)，则称 P_0 是 f 的**不连续点**(或称**间断点**). 特别当(2)式左边极限存在但不等

于 $f(P_0)$时，P_0 是 f 的**可去间断点**.

如上节例1、2给出的函数在原点连续；例4给出的函数在原点不连续，又若把例3的函数改为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\in\{(x,y)\mid y=mx,x\neq 0\},\\ \dfrac{m}{1+m^2},(x,y)=(0,0),\end{cases}$$

其中 m 为固定实数，亦即函数 f 只定义在直线 $y=mx$ 上. 这时由于

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y)=\frac{m}{1+m^2}=f(0,0),$$

因此 f 在原点沿着直线 $y=mx$ 是连续的.

设 $P_0(x_0,y_0)$、$P(x,y)\in D$，$\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=y-y_0$，则称

$$\begin{aligned}\Delta z&=\Delta f(x_0,y_0)=f(x,y)-f(x_0,y_0)\\&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\end{aligned}$$

为函数 f 在点 P_0 的**全增量**. 和一元函数一样，可用增量形式来描述连续性，即当

$$\lim_{\substack{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)\\ (x,y)\in D}}\Delta z=0$$

时，f 在点 P_0 连续.

如果在全增量中取 $\Delta x=0$ 或 $\Delta y=0$，则相应的函数增量称为**偏增量**，记作

$$\Delta_x f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

$$\Delta_y f(x_0,y_0)=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

一般说来，函数的全增量并不等于相应的两个偏增量之和.

若一个偏增量的极限为零，例如 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta_x f(x_0,y_0)=0$，它表示在 f 的两个自变量中，当固定 $y=y_0$ 时，$f(x,y_0)$ 作为 x 的一元函数在 x_0 连续. 同理，若 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta_y f(x_0,y_0)=0$，则表示 $f(x_0,y)$ 在 y_0 连续. 容易证明：当 f 在其定义域的内点 $(x_0,\ y_0)$ 连续时，$f(x,y_0)$ 在 x_0 和 $f(x_0,y)$ 在 y_0 都连续. 但是反过来，二元函数对单个自变量都连续并不能保证该函数的连续性(除非再增加条件，如本节习题4、6、10). 例如二元函数(参见图16－9)

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0\end{cases}$$

在原点处显然不连续. 但由于

$$f(0,y)=f(x,0)\equiv 0,$$

因此在原点处 f 对 x 和对 y 分别都连续.

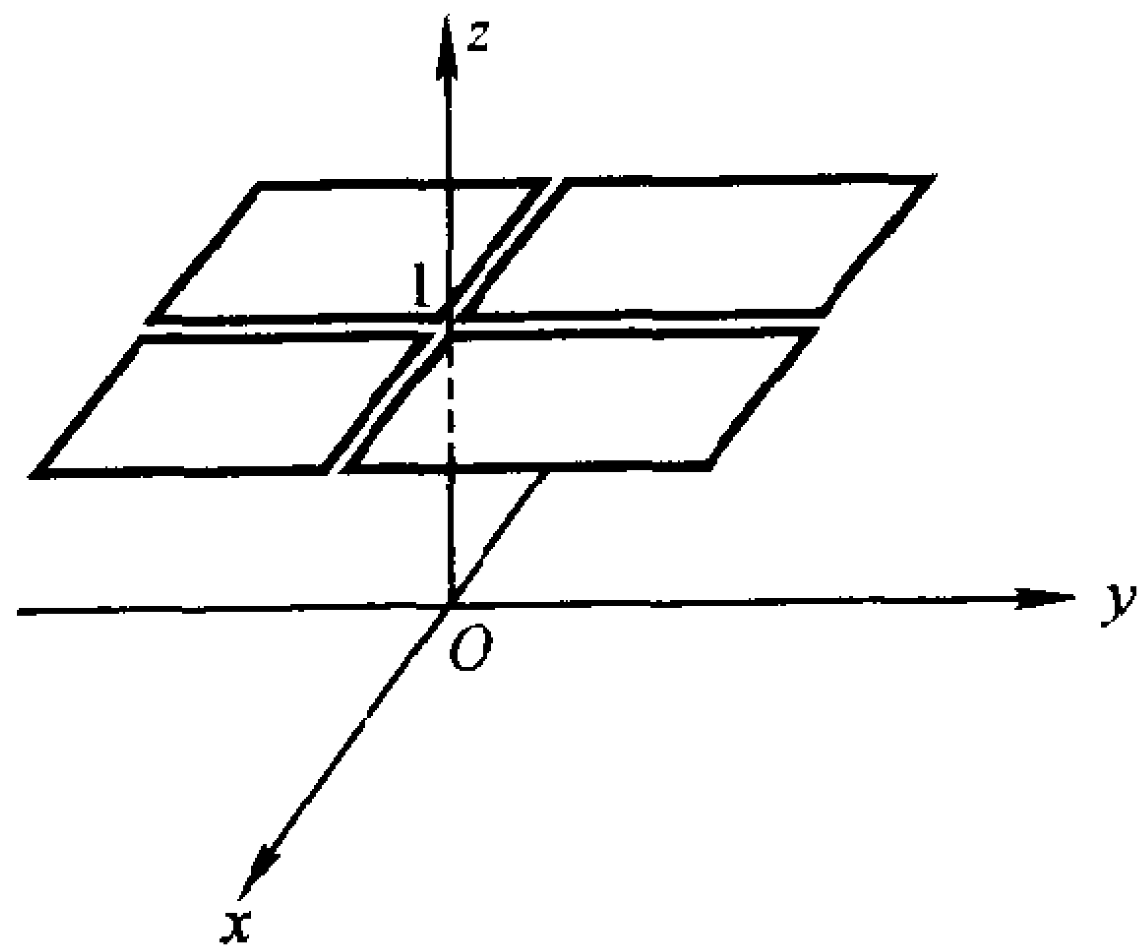


图16－9

若二元函数在某一点连续,则与一元函数一样,可以证明它在这一点近旁具有局部有界性、局部保号性以及相应的有理运算的各个法则.下面证明二元复合函数的连续性定理,其余留给读者自己去证明.

定理 16.7(复合函数的连续性) 设函数 $u=\varphi(x,y)$ 和 $v=\psi(x,y)$ 在 xy 平面上点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义,并在点 P_0 连续;函数 $f(u,v)$ 在 uv 平面上点 $Q_0(u_0,v_0)$ 的某邻域内有定义,并在点 Q_0 连续,其中 $u_0=\varphi(x_0,y_0)$, $v_0=\psi(x_0,y_0)$. 则复合函数 $g(x,y)=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 P_0 也连续.

证 由 f 在点 Q_0 连续可知:任给正数 ε,存在相应正数 η,使得当 $|u-u_0|<\eta$, $|v-v_0|<\eta$ 时,有

$$|f(u,v)-f(u_0,v_0)|<\varepsilon.$$

又由 φ、ψ 在点 P_0 连续可知:对上述正数 η,总存在正数 δ,使得当 $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$ 时,都有

$$|u-u_0|=|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)|<\eta,$$
$$|v-v_0|=|\psi(x,y)-\psi(x_0,y_0)|<\eta.$$

综合起来,当 $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$ 时,便有

$$|g(x,y)-g(x_0,y_0)|=|f(u,v)-f(u_0,v_0)|<\varepsilon.$$

所以说复合函数 $f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续. □

二 有界闭域上连续函数的性质

本段讨论有界闭域上多元连续函数的性质.它们可以看作是闭区间上一元连续函数性质的推广.

定理 16.8(有界性与最大、最小值定理) 若函数 f 在有界闭域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上连续,则 f 在 D 上有界,且能取得最大值与最小值.

证 先证明 f 在 D 上有界.倘若不然,则对每个正整数 n,必存在点 $P_n\in D$,使得

$$|f(P_n)|>n,n=1,2,\cdots. \tag{3}$$

于是得到一个有界点列 $\{P_n\}\subset D$,且总能使 $\{P_n\}$ 中有无穷多个不同的点.由 §1 定理 16.3(聚点定理)的推论,$\{P_n\}$ 存在收敛子列 $\{P_{n_k}\}$,设 $\lim\limits_{k\to\infty}P_{n_k}=P_0$. 且因 D 是闭域,从而 $P_0\in D$.

由于 f 在 D 上连续,当然在点 P_0 也连续,因此有

$$\lim_{k\to\infty}f(P_{n_k})=f(P_0).$$

这与不等式(3)相矛盾.所以 f 是 D 上的有界函数.

下面证明 f 在 D 上能取到最大、最小值.为此设

$$m=\inf f(D),\qquad M=\sup f(D).$$

可证必有一点 $Q\in D$,使 $f(Q)=M$(同理可证存在 $Q'\in D$,使 $f(Q')=m$).如

若不然，对任意 $P\in D$，都有 $M-f(P)>0$. 考察 D 上的连续正值函数

$$F(P)=\frac{1}{M-f(P)},$$

由前面的证明知道，F 在 D 上有界. 又因 f 不能在 D 上达到上确界 M，所以存在收敛点列 $\{P_n\}\subset D$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}f(P_n)=M$. 于是有 $\lim\limits_{n\to\infty}F(P_n)=+\infty$，这导致与 F 在 D 上有界的结论相矛盾. 从而证得 f 在 D 上能取得最大值. □

定理 16.9（一致连续性定理）　若函数 f 在有界闭域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上连续，则 f 在 D 上一致连续. 即对任何 $\varepsilon>0$，总存在只依赖于 ε 的正数 δ，使得对一切点 P、Q，只要 $\rho(P,Q)<\delta$，就有 $|f(P)-f(Q)|<\varepsilon$.

证　本定理可参照第七章中证明一致连续性定理的办法，运用有限覆盖定理来证明，也可以运用聚点定理来证明. 这里我们采用后一种证法.

倘若 f 在 D 上连续而不一致连续，则存在某 $\varepsilon_0>0$，对于任意小的 $\delta>0$，例如 $\delta=\frac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$，总有相应的 P_n、$Q_n\in D$，虽然 $\rho(P_n,Q_n)<\frac{1}{n}$，但是 $|f(P_n)-f(Q_n)|\geqslant\varepsilon_0$.

由于 D 为有界闭域，因此存在收敛子列 $\{P_{n_k}\}\subset\{P_n\}$，并设 $\lim\limits_{k\to\infty}P_{n_k}=P_0\in D$. 为记号方便起见，再在 $\{Q_n\}$ 中取出与 P_{n_k} 下标相同的子列 $\{Q_{n_k}\}$，则因

$$0\leqslant\rho(P_{n_k},Q_{n_k})<\frac{1}{n_k}\to 0,\ k\to\infty,$$

而有 $\lim\limits_{k\to\infty}Q_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty}P_{n_k}=P_0$. 最后，由 f 在 P_0 连续，得到

$$\lim_{k\to\infty}|f(P_{n_k})-f(Q_{n_k})|=|f(P_0)-f(P_0)|=0.$$

这与 $|f(P_{n_k})-f(Q_{n_k})|\geqslant\varepsilon_0>0$ 相矛盾. 所以 f 在 D 上一致连续. □

定理 16.10（介值性定理）　设函数 f 在区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上连续，若 P_1,P_2 为 D 中任意两点，且 $f(P_1)<f(P_2)$，则对任何满足不等式

$$f(P_1)<\mu<f(P_2)\tag{4}$$

的实数 μ，必存在点 $P_0\in D$，使得 $f(P_0)=\mu$.

证　作辅助函数

$$F(P)=f(P)-\mu,\quad P\in D.$$

易见 F 仍在 D 上连续，且由不等式(4)知道 $F(P_1)<0$，$F(P_2)>0$. 这里不妨假设 P_1,P_2 是 D 的内点（为什么?）. 下面证明必存在 $P_0\in D$，使 $F(P_0)=0$.

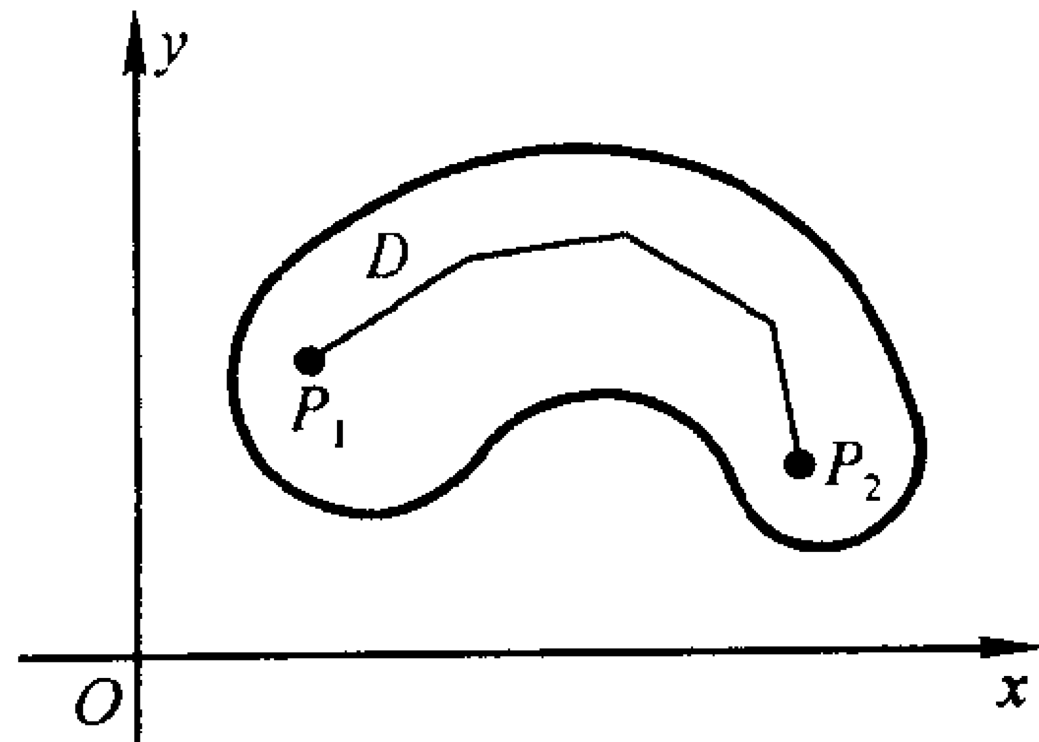


图 16－10

由于 D 为区域，我们可以用有限段都在 D 中的折线连结 P_1 和 P_2（图 16－10）. 若有某一

个连结点所对应的函数值为 0,则定理已得证.否则从一端开始逐个检查直线段,必定存在某直线段,F 在它两端的函数值异号,不失一般性,设连结 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$的直线段含于 D,其方程为

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

在此直线段上,F 表示为关于 t 的复合函数

$$G(t) = F(x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1)), 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

它是$[0,1]$上的一元连续函数,且 $F(P_1)=G(0)<0<G(1)=F(P_2)$.由一元函数根的存在定理,在$(0,1)$内存在一点 t_0,使得 $G(t_0)=0$.记

$$x_0 = x_1 + t_0(x_2 - x_1), y_0 = y_1 + t_0(y_2 - y_1),$$

则有 $P_0(x_0,y_0)\in D$,使得

$$F(P_0) = G(t_0) = 0 \text{ 即 } f(P_0) = \mu.$$ □

实际上,定理 16.8 与 16.9 中的有界闭域 D 可以改为有界闭集(证明过程无原则性变化).但是,介值性定理中所考察的点集 D 只能假设是一区域,这是为了保证它具有连通性,而一般的开集或闭集不一定具有这一特性.此外,由定理 16.10 可知,若 f 为区域D 上连续函数,则 $f(D)$必定是一个区间(有限或无限).

习　　题

1. 讨论下列函数的连续性①:

(1) $f(x,y)=\tan(x^2+y^2)$;　　(2) $f(x,y)=[x+y]$;

(3) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin xy}{y}, & y\neq 0, \\ 0, & y=0; \end{cases}$

(4) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0; \end{cases}$

(5) $f(x,y)=\begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数}, \\ y, & x \text{ 为有理数}; \end{cases}$

*(6) $f(x,y)=\begin{cases} y^2\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0; \end{cases}$

*(7) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$;　　*(8) $f(x,y)=e^{-\frac{x}{y}}$.

2. 叙述并证明二元连续函数的局部保号性.

① 本习题中有 * 号者为横线下习题.

3. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{(x^2+y^2)^p}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}\qquad (p>0),$$

试讨论它在(0,0)点处的连续性.

4. 设 $f(x,y)$定义在闭矩形域 $S=[a,b]\times[c,d]$.若 f 对 y 在$[c,d]$上处处连续,对 x 在$[a,b]$(且关于 y)为一致连续,证明 f 在 S 上处处连续.

5. 证明:若 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是有界闭域,f 为 D 上连续函数,则 $f(D)$不仅有界(定理 16.8),而且是闭区间.

---

6. 设 $f(x,y)$在集合 $G\subset\mathbf{R}^2$ 上对 x 连续,对 y 满足利普希茨条件:

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant L|y'-y''|,$$

其中$(x,y'),(x,y'')\in G$,L 为常数.试证明 f 在 G 上处处连续.

7. 若一元函数 $\varphi(x)$在$[a,b]$上连续,令

$$f(x,y)=\varphi(x),(x,y)\in D=[a,b]\times(-\infty,+\infty).$$

试讨论 f 在 D 上是否连续? 是否一致连续?

8. 设

$$f(x,y)=\frac{1}{1-xy},(x,y)\in D=[0,1)\times[0,1),$$

证明:f 在 D 上连续,但不一致连续.

9. 设 f 在 $\mathbf{R}^2$ 上分别对每一自变量 x 和 y 是连续的,并且每当固定 x 时 f 对 y 是单调的,证明 f 是 $\mathbf{R}^2$ 上的二元连续函数.

总练习题

1. 设 $E\subset\mathbf{R}^2$ 是有界闭集,$d(E)$为 E 的直径.证明:存在 $P_1,P_2\in E$,使得 $\rho(P_1,P_2)=d(E)$.

2. 设 $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}$,$r=\sqrt{x^2+y^2}$,$k>1$,

$$D_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{1}{k}x\leqslant y\leqslant kx\right\},$$

$$D_2=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}.$$

试分别讨论 $i=1,2$ 时极限 $\lim\limits_{\substack{r\to+\infty\\(x,y)\in D_i}}f(x,y)$是否存在? 为什么?

3. 设 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=0$,且在$(x_0,y_0)$附近有$|f(x,y)-\varphi(y)|\leqslant\psi(x)$.证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$.

4. 设 f 为定义在 $\mathbf{R}^2$ 上的连续函数,α 是任一实数,

$$E=\{(x,y)\mid f(x,y)>\alpha,(x,y)\in\mathbf{R}^2\},$$

$$F=\{(x,y)\mid f(x,y)\geqslant\alpha,(x,y)\in\mathbf{R}^2\}.$$

证明 E 是开集,F 是闭集.

5. 设 f 在有界开集 E 上一致连续.证明:

(1) 可将 f 连续延拓到 E 的边界;

(2) f 在 E 上有界.

6. 设 $u=\varphi(x,y)$ 与 $v=\psi(x,y)$ 在 xy 平面中的点集 E 上一致连续;φ 与 ψ 把点集 E 映射为 uv 平面中的点集 D,$f(u,v)$ 在 D 上一致连续.证明复合函数 $f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在 E 上一致连续.

7. 设 $f(t)$ 在区间 (a,b) 内连续可导,函数

$$F(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\quad(x\neq y),F(x,x)=f'(x)$$

定义在区域 $D=(a,b)\times(a,b)$ 内.证明:对任何 $c\in(a,b)$,有

$$\lim_{(x,y)\to(c,c)}F(x,y)=f'(c).$$

第十七章　多元函数微分学

§1　可　微　性

一　可微性与全微分

与一元函数一样，在多元函数微分学中，主要讨论多元函数的可微性及其应用．本章首先建立二元函数可微性概念，至于一般 n 元函数的可微性不难据此相应地给出(对此，在第二十三章有更详细的论述)．

定义 1　设函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的某邻域 $U(P_0)$内有定义，对于 $U(P_0)$中的点 $P(x,y)=(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，若函数 f 在点P_0 处的全增量 Δz 可表示为：

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x,y)\\ &= A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\end{aligned}\tag{1}$$

其中 A,B 是仅与点P_0 有关的常数，$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，$o(\rho)$是较 ρ 高阶的无穷小量，则称函数 f 在点P_0 **可微**．并称(1)式中关于 $\Delta x,\Delta y$ 的线性函数$A\Delta x+B\Delta y$ 为函数f 在点P_0 的**全微分**，记作

$$\mathrm{d}z\big|_{P_0}=\mathrm{d}f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y\tag{2}$$

由(1)、(2)可见 $\mathrm{d}z$ 是 Δz 的线性主部，特别当$|\Delta x|,|\Delta y|$充分小时，全微分 $\mathrm{d}z$ 可作为全增量 Δz 的近似值，即

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0).\tag{3}$$

在使用上，有时也把(1)式写成如下形式

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y,\tag{4}$$

这里

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\alpha=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\beta=0.$$

例 1　考察函数 $f(x,y)=xy$ 在点(x_0,y_0)处的可微性．

解　在点(x_0,y_0)处函数 f 的全增量为

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0,y_0)&=(x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y)-x_0y_0\\ &=y_0\Delta x+x_0\Delta y+\Delta x\Delta y.\end{aligned}$$

由于

$$\frac{|\Delta x\Delta y|}{\rho}=\rho\frac{|\Delta x|}{\rho}\frac{|\Delta y|}{\rho}\leqslant\rho\to 0\quad(\rho\to 0),$$

因此　$\Delta x\Delta y=o(\rho)$. 从而函数 f 在 (x_0,y_0) 可微，且

$$\mathrm{d}f=y_0\Delta x+x_0\Delta y.$$

□

二　偏导数

由一元函数微分学知道：若 $f(x)$ 在点 x_0 可微，则函数增量 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$，其中 $A=f'(x_0)$. 同样，由上一段已知，若二元函数 f 在点 (x_0,y_0) 可微，则 f 在 (x_0,y_0) 处的全增量可由(1)式表示. 现在讨论其中 A、B 的值与函数 f 的关系. 为此，在(4)式中令 $\Delta y=0(\Delta x\neq 0)$，这时得到 Δz 关于 x 的偏增量 $\Delta_x z$，且有

$$\Delta_x z=A\Delta x+\alpha\Delta x\text{ 或 }\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A+\alpha.$$

现让 $\Delta x\to 0$，由上式便得 A 的一个极限表示式

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.\tag{5}$$

容易看出，(5)式右边的极限正是关于 x 的一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处的导数. 类似地，令 $\Delta x=0(\Delta y\neq 0)$，由(4)式又可得到

$$B=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.\tag{6}$$

它是关于 y 的一元函数 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数.

二元函数当固定其中一个自变量时，它对另一个自变量的导数称为偏导数，定义如下：

定义 2　设函数 $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$. 若 $(x_0,y_0)\in D$，且 $f(x,y_0)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义，则当极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\tag{7}$$

存在时，称这个极限为函数 f 在点 (x_0,y_0) 关于 x 的**偏导数**，记作

$$f_x(x_0,y_0)\quad\text{或}\quad\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

注意 1　这里符号 $\frac{\partial}{\partial x}$，$\frac{\partial}{\partial y}$ 专用于偏导数算符，与一元函数的导数符号 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 相仿，但又有差别.

注意 2　在上述定义中，f 在点 (x_0,y_0) 存在关于 x（或 y）的偏导数，f 至少在 $\{(x,y)\mid y=y_0,|x-x_0|<\delta\}$（或 $\{(x,y)\mid x=x_0,|y-y_0|<\delta\}$）上必须有定义.

若函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上每一点 (x,y) 都存在对 x（或对 y）的偏导

数，则得到函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上对 x（或对 y）的**偏导函数**（也简称**偏导数**），记作

$$f_x(x,y) \text{ 或 } \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\left(f_y(x,y) \quad \text{或} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right),$$

也可简单地写作 f_x, z_x 或 $\frac{\partial f}{\partial x}\left(f_y, z_y \text{ 或 } \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

在上一章中已指出，二元函数 $z=f(x,y)$ 的几何图象通常是三维空间中的曲面. 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为这曲面上一点，其中 $z_0=f(x_0,y_0)$，过 P_0 作平面 $y=y_0$，它与曲面的交线

$$C:\begin{cases} y = y_0, \\ z = f(x,y) \end{cases}$$

是平面 $y=y_0$ 上的一条曲线. 于是，二元函数偏导数的几何意义（如图 17－1）是：$f_x(x_0,y_0)$ 作为一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 的导数，就是曲线 C 在点 P_0 处的切线 T_x 对于 x 轴的斜率，即 T_x 与 x 轴正向所成倾角的正切 $\tan\alpha$. 同样，$f_y(x_0,y_0)$ 是平面 $x=x_0$ 与曲面 $z=f(x,y)$ 的交线

$$\begin{cases} x = x_0, \\ z = f(x,y) \end{cases}$$

在点 P_0 处的切线 T_y 关于 y 轴的斜率 $\tan\beta$.

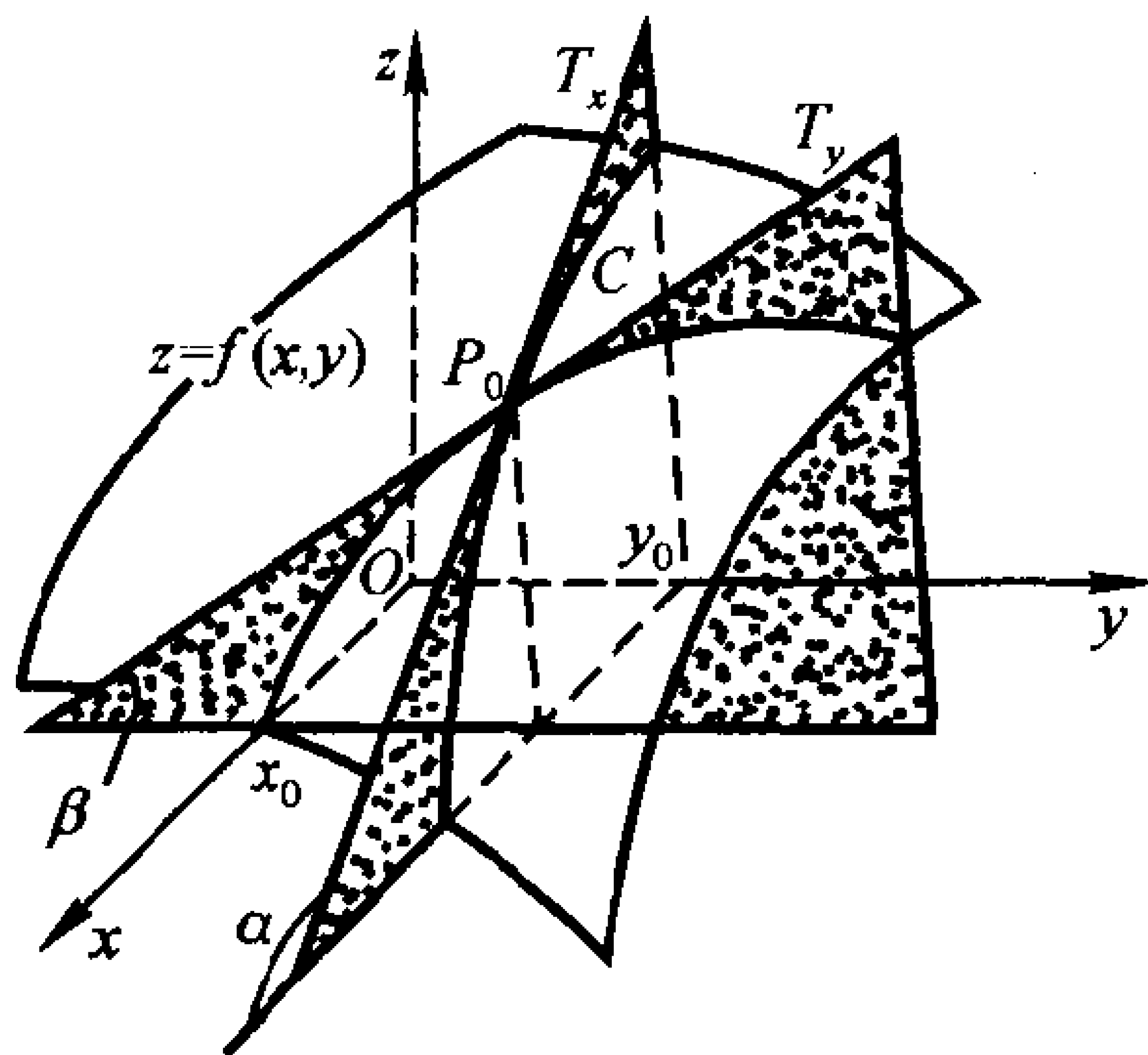


图 17－1

由偏导数的定义还知道，函数 f 对哪一个自变量求偏导数，是先把其他自变量看作常数，从而变成一元函数的求导问题. 因此第五章中有关求导的一些基本法则，对多元函数求偏导数仍然适用.

例 2 求函数 $f(x,y)=x^3+2x^2y-y^3$ 在点 $(1,3)$ 关于 x 和关于 y 的偏导数.

解 先求 f 在点 $(1,3)$ 关于 x 的偏导数，为此，令 $y=3$，得到以 x 为自变量的函数 $f(x,3)=x^3+6x^2-27$，求它在 $x=1$ 的导数，即

$$f_x(1,3) = \left.\frac{\mathrm{d}f(x,3)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} = 3x^2+12x\,|_{x=1} = 15.$$

再求 f 在 (1.3) 关于 y 的偏导数. 先令 $x=1$，得到以 y 为自变量的函数 $f(1,y)=1+2y-y^3$，求它在 $y=3$ 的导数，得

$$f_y(1,3) = \left.\frac{\mathrm{d}f(1,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=3} = 2-3y^2\,|_{y=3} = -25.$$

通常也可分别先求出 f 关于 x 和 y 的偏导函数：

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 4xy,$$
$$f_y(x,y) = 2x^2 - 3y^2.$$

然后以$(x,y)=(1,3)$代入，也能得到同样结果. □

例 3 求函数 $z=x^y(x>0)$的偏导数.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$ □

例 4 求三元函数 $u=\sin(x+y^2-\mathrm{e}^z)$的偏导数.

解 把 y 和 z 看作常数，得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x + y^2 - \mathrm{e}^z).$$

把 x,z 看作常数，得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y\cos(x + y^2 - \mathrm{e}^z).$$

把 x,y 看作常数，得

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\mathrm{e}^z\cos(x + y^2 - \mathrm{e}^z).$$ □

三 可微性条件

由偏导数定义及(5),(6)两式可得如下定理：

定理 17.1(可微的必要条件) 若二元函数 f 在其定义域内一点(x_0,y_0)处可微，则 f 在该点关于每个自变量的偏导数都存在，且(1)式中的

$$A = f_x(x_0,y_0), \quad B = f_y(x_0,y_0).$$

依此函数 f 在点(x_0,y_0)的全微分(2)可惟一地表示为

$$\mathrm{d}f|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0,y_0) \cdot \Delta y.$$

与一元函数的情况一样，由于自变量的增量等于自变量的微分，即

$$\Delta x = \mathrm{d}x, \Delta y = \mathrm{d}y,$$

所以全微分又可写为

$$\mathrm{d}z = f_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x + f_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y.$$

若函数 f 在区域D 上每一点(x,y)都可微，则称函数 f 在区域D 上可微，且 f 在D 上全微分为

$$\mathrm{d}f(x,y) = f_x(x,y)\mathrm{d}x + f_y(x,y)\mathrm{d}y. \tag{8}$$

例 5 考察函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

在原点的可微性.

解 按偏导数定义

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0.$$

同理可得 $f_y(0,0)=0$.若函数 f 在原点可微,则

$$\begin{aligned}\Delta z-\mathrm{d}z&=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y\\&=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\end{aligned}$$

应是较 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 高阶的无穷小量.为此,考察极限

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-\mathrm{d}z}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

由第十六章§2例3知道,上述极限存在,因而函数 f 在原点不可微. □

这个例子说明,偏导数即使存在,函数也不一定可微(但对于一元函数来说,函数可微与导数存在是等价的).

定理 17.2(可微的充分条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数在点 (x_0,y_0) 的某邻域内存在,且 f_x 与 f_y 在点 (x_0,y_0) 处连续,则函数 f 在点 (x_0,y_0) 可微.

证 我们把全增量 Δz 写作

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]\\&\quad+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)].\end{aligned}$$

在第一个括号里,它是函数 $f(x,y_0+\Delta y)$ 关于 x 的偏增量;在第二个括号里,则是函数 $f(x_0,y)$ 关于 y 的偏增量.对它们分别应用一元函数的拉格朗日中值定理,得

$$\Delta z=f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x+f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,\quad 0<\theta_1,\theta_2<1.\tag{9}$$

由于 f_x 与 f_y 在点 (x_0,y_0) 连续,因此有

$$f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)=f_x(x_0,y_0)+\alpha,\tag{10}$$

$$f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)=f_y(x_0,y_0)+\beta,\tag{11}$$

其中当 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 时,$\alpha\to 0,\beta\to 0$.将(10)、(11)代入(9)式,则得

$$\Delta z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y.$$

由(4)式便知函数 f 在点 (x_0,y_0) 可微. □

根据这个定理,例2中的函数 $f(x,y)=x^3+2x^2y-y^3$ 在点(1,3)可微,且

$$\mathrm{d}f|_{(1,3)}=15\mathrm{d}x-25\mathrm{d}y.$$

例3中的函数 $z=x^y$ 在 $D=\{(x,y)\mid x>0,-\infty<y<+\infty\}$ 上可微,且

$$dz = yx^{y-1}dx + x^y\ln x dy.$$

注意 偏导数连续并不是函数可微的必要条件,如函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点(0,0)处可微,但 f_x 与 f_y 却在(0,0)处不连续(见本节习题7).若 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)偏导数 f_x,f_y 连续,则称 f 在点(x_0,y_0)**连续可微**.

在定理17.2证明过程中所出现的(9)式,实际上是二元函数的一个**中值公式**,即有如下定理:

定理17.3 设函数 f 在点(x_0,y_0)的某邻域内存在偏导数,若(x,y)属于该邻域,则存在 $\xi=x_0+\theta_1(x-x_0)$和 $\eta=y_0+\theta_2(y-y_0)$,$0<\theta_1,\theta_2<1$,使得

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f_x(\xi,y)(x-x_0)+f_y(x_0,\eta)(y-y_0). \quad (12)$$

读者还可以从可微性概念看到,函数在可微点处必连续,但在函数的连续点处不一定存在偏导数,当然它更不能保证函数在该点可微.例如,函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$(圆锥)在原点连续,但在该点不存在偏导数.更值得注意的是,即使函数在某一点存在对所有自变量的偏导数,也不能保证函数在该点连续.例如,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点不连续,但却存在偏导数

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0, f_y(0,0)=0.$$

这是因为偏导数只是刻画了函数沿 x 轴或 y 轴方向的变化特征.所以这个例子只能说明 f 在原点分别对 x 和对 y 必定连续,但由此并不能保证 f 作为二元函数在原点连续.与定理17.2相仿,只有对偏导数附加适当的条件后,才能保证函数的连续性(有关内容可从本节习题中去找).

四 可微性几何意义及应用

一元函数可微,在几何上反映为曲线存在不平行于 y 轴的切线.对于二元函数来说,可微性则反映为曲面与其切平面之间的类似关系.为此,我们需要先给出曲面的切平面的定义,这可以从曲线的切线定义中获得启发.

在第五章§1中,我们曾把平面曲线 S 在某一点 $P(x_0,y_0)$的切线 PT 定义为过 P 点的割线 PQ 当 Q 沿 S 趋近 P 时的极限位置(如果存在的话).这时,PQ 与 PT 的夹角 φ 也将随 $Q\to P$ 而趋于零(图17-2).由于

$$\sin\varphi=\frac{h}{d},$$

其中 h 和 d 分别表示点 Q 到直线 PT 的距离和 Q 到 P 的距离，因此当 Q 沿 S 趋于 P 时，$\varphi\to 0$ 等同于 $\frac{h}{d}\to 0$.

仿照这个想法，我们引入曲面 S 在点 P 的切平面定义：

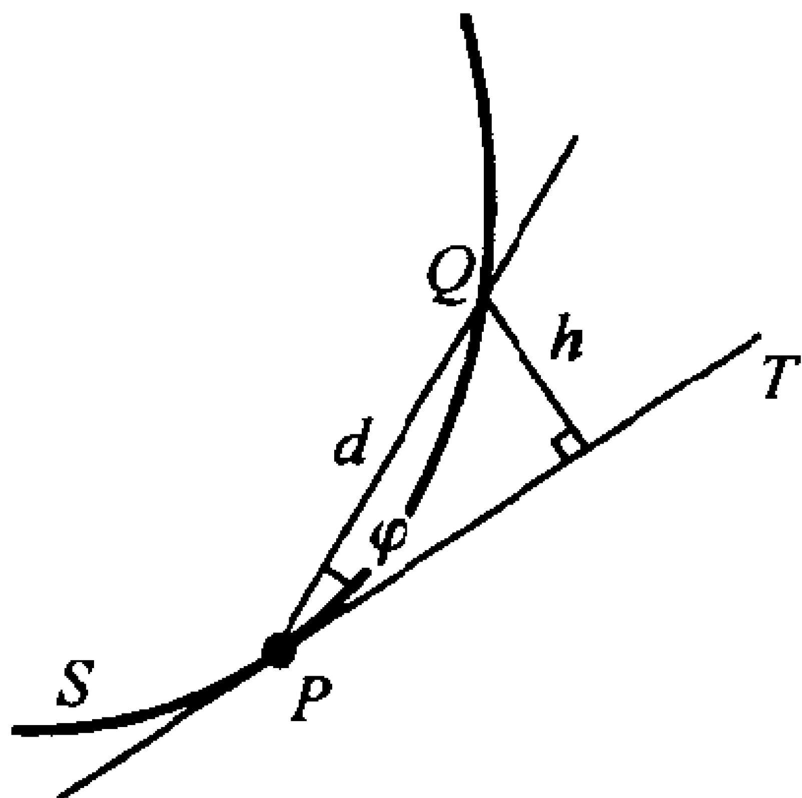


图 17－2

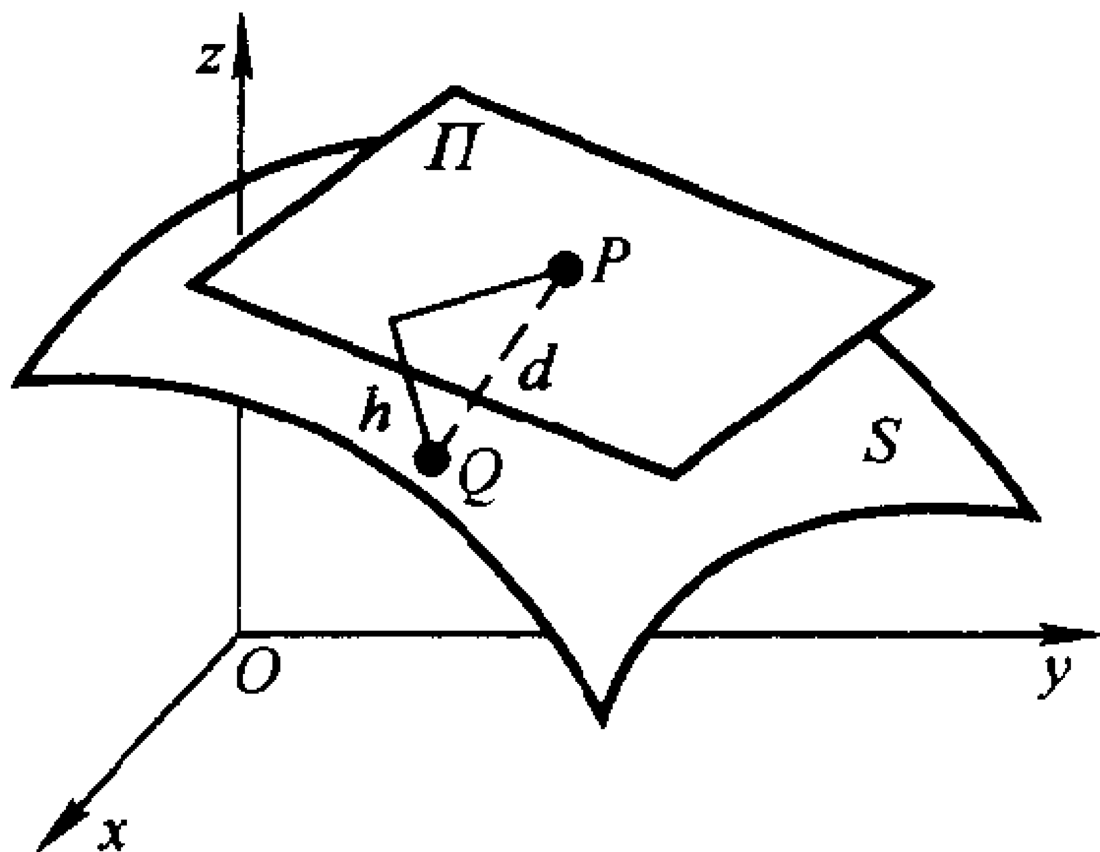


图 17－3

定义 3 设 P 是曲面 S 上一点，Π 为通过点 P 的一个平面，曲面 S 上的动点 Q 到定点 P 和到平面 Π 的距离分别为 d 与 h(图 17－3). 若当 Q 在 S 上以任何方式趋近于 P 时，恒有 $\frac{h}{d}\to 0$，则称平面 Π 为曲面 S 在点 P 处的**切平面**，P 为**切点**.

定理 17.4 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 存在不平行于 z 轴的切平面 Π 的充要条件是函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微.

证 ［充分性］ 若函数 f 在 P_0 可微，由定义知

$$\Delta z = z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + o(\rho),$$

其中 $z_0=f(x_0,y_0)$，$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. 现在讨论过点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的平面

$$Z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(X-x_0) + f_y(x_0,y_0)(Y-y_0),$$

其中 X,Y,Z 是平面上点的流动坐标. 我们证明它就是曲面 $z=f(x,y)$ 在点 P 的切平面 Π. 事实上，由解析几何学知道，曲面上任意一点 $Q(x,y,z)$ 到这个平面的距离为

$$h = \frac{|z-z_0-f_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)(y-y_0)|}{\sqrt{1+f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)}}$$

$$= \frac{|o(\rho)|}{\sqrt{1+f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)}},$$

另一方面，P 到 Q 的距离为

$$d = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = \sqrt{\rho^2+(z-z_0)^2} > \rho.$$

于是由$\frac{h}{d}\geqslant 0$及

$$\frac{h}{d}<\frac{h}{\rho}=\frac{|o(\rho)|}{\rho}\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)}}\to 0,\quad (\rho\to 0),$$

根据定义3,平面Π为曲面$z=f(x,y)$在点P的切平面.

[必要性] 若曲面$z=f(x,y)$在$P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$存在不平行于z轴的切平面

$$Z-z_0=A(X-x_0)+B(Y-y_0).$$

设$Q(x,y,z)$是曲面上任意一点,由Q到这个平面的距离为

$$h=\frac{|z-z_0-A(x-x_0)-B(y-y_0)|}{\sqrt{1+A^2+B^2}}.$$

令$x-x_0=\Delta x,y-y_0=\Delta y,z-z_0=\Delta z,\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.由切平面定义知,当$Q$充分接近$P$时,有$\frac{h}{d}\to 0$.因此对于充分接近$P$的$Q$,有

$$\frac{h}{d}=\frac{|\Delta z-A\Delta x-B\Delta y|}{d\sqrt{1+A^2+B^2}}<\frac{1}{2\sqrt{1+A^2+B^2}},$$

即

$$|\Delta z-A\Delta x-B\Delta y|<\frac{d}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\rho^2+\Delta z^2}.$$

由不等式$|a|-|b|\leqslant|a-b|$得

$$|\Delta z|-|A||\Delta x|-|B||\Delta y|<\frac{1}{2}\sqrt{\rho^2+\Delta z^2}<\frac{1}{2}(\rho+|\Delta z|),$$

故有

$$\frac{1}{2}|\Delta z|<|A||\Delta x|+|B||\Delta y|+\frac{1}{2}\rho,$$

而且

$$\frac{|\Delta z|}{\rho}<2\left(|A|\frac{|\Delta x|}{\rho}+|B|\frac{|\Delta y|}{\rho}\right)+1<2(|A|+|B|)+1.$$

因此$\frac{|\Delta z|}{\rho}$是有界量.从而由

$$\frac{d}{\rho}=\frac{\sqrt{\rho^2+\Delta z^2}}{\rho}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta z}{\rho}\right)^2}<1+\frac{|\Delta z|}{\rho}<2(|A|+|B|+1)$$

知$\frac{d}{\rho}$也是有界量.于是当$\rho\to 0$时,有

$$\begin{aligned}\frac{|\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)|}{\rho}&=\frac{|\Delta z-A\Delta x-B\Delta y|}{\sqrt{1+A^2+B^2}d}\left(\frac{d}{\rho}\right)\sqrt{1+A^2+B^2}\\&=\left(\frac{h}{d}\right)\left(\frac{d}{\rho}\right)\sqrt{1+A^2+B^2}\to 0(\rho\to 0),\end{aligned}$$

即

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho).$$

这就证明了函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)是可微的. □

定理17.4说明:若函数f在(x_0,y_0)可微,则曲面$z=f(x,y)$在点$P(x_0,$

$y_0,z_0)$处的切平面方程为

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0). \tag{13}$$

过切点 P 与切平面垂直的直线称为曲面在点 P 的**法线**. 由切平面方程知道,法线的方向数是

$$\pm (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1),$$

所以过切点 P 的法线方程是

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0,y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0,y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{14}$$

二元函数全微分的几何意义如图 17-4 所示,当自变量增量为 $\Delta x, \Delta y$ 时,函数 $z=f(x,y)$的增量 Δz 是竖坐标上的一段 NQ,而二元函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的全微分

$$dz = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y$$

的值是过 P 的切平面 PM_1MM_2 上,当自变量 x,y 分别由 x_0,y_0 增加到 $x_0+\Delta x, y_0+\Delta y$ 时的增量,即 MN 那一段. 于是 Δz 与 dz 之差是 MQ,它的值随着 $\rho\to 0$ 而趋于零,而且是较 ρ 高阶的无穷小量.

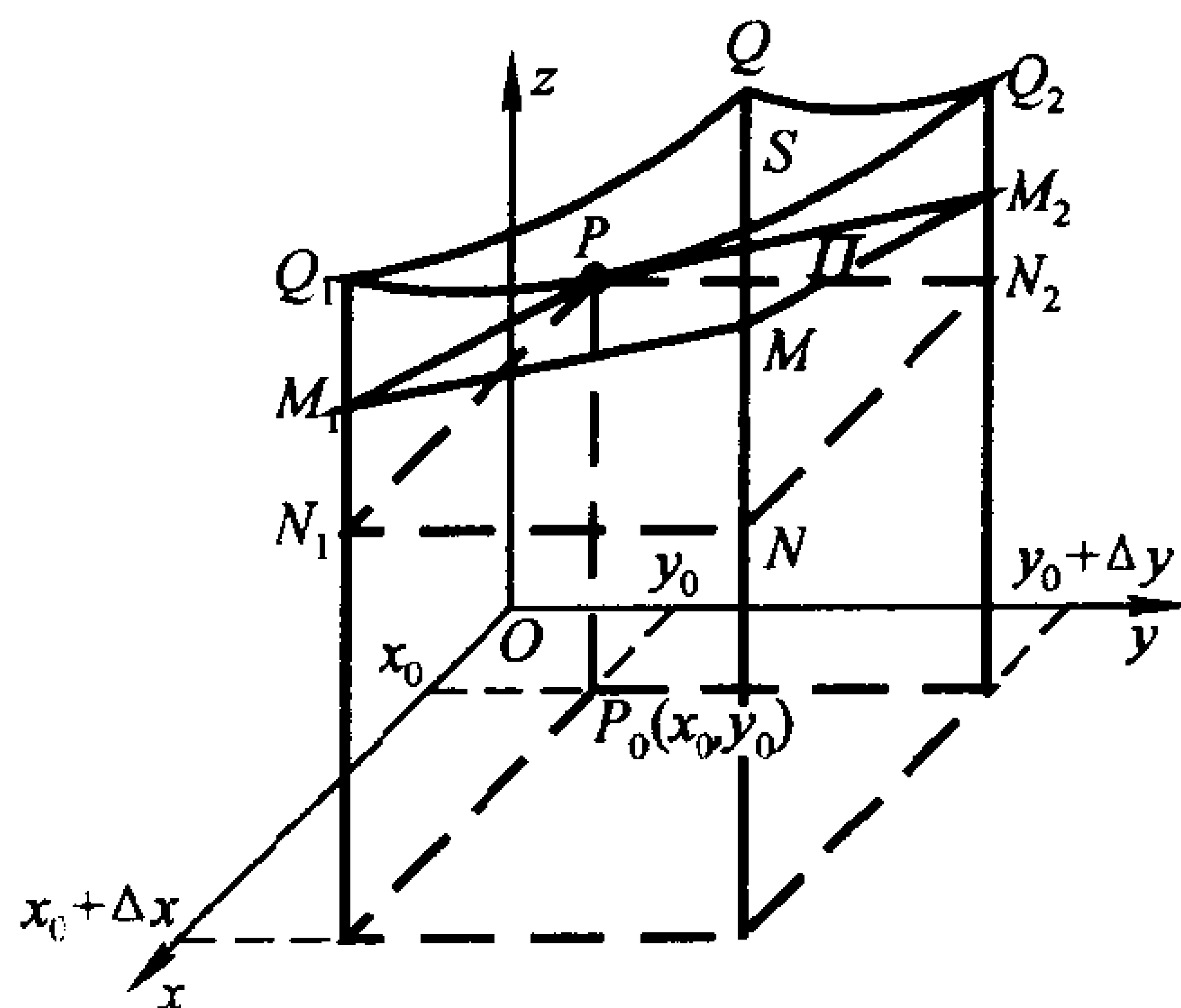


图 17-4

例 6 试求抛物面 $z = ax^2 + by^2$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$处的切平面方程与法线方程.

解 因为

$$f_x(x_0,y_0) = 2ax_0, \quad f_y(x_0,y_0) = 2by_0,$$

由公式(13),过 M 的切平面方程为

$$z - z_0 = 2ax_0(x - x_0) + 2by_0(y - y_0).$$

因为 $z_0=ax_0^2+by_0^2$,所以它可简化为

$$2ax_0x + 2by_0y - z - z_0 = 0.$$

由公式(14),过点 M 的法线方程是

$$\frac{x - x_0}{2ax_0} = \frac{y - y_0}{2by_0} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

□

下面的例 7 和例 8 是利用线性逼近公式(3)所作的近似计算和误差估计.

例 7 求 $1.08^{3.96}$ 的近似值.

解 设 $f(x,y)=x^y$,令 $x_0=1, y_0=4, \Delta x=0.08, \Delta y=-0.04$. 由公式(3)有

$$\begin{aligned} 1.08^{3.96} &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \\ &\approx f(1,4)+f_x(1,4)\Delta x+f_y(1,4)\Delta y \\ &= 1+4\cdot 0.08+1^4\cdot \ln 1\cdot(-0.04) \\ &= 1+0.32=1.32. \end{aligned}$$ □

例 8 应用公式 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 计算某三角形面积，现测得 $a=12.50$，$b=8.30$，$C=30°$. 若测量 a，b 的误差为 ± 0.01，C 的误差为 $\pm 0.1°$，求用此公式计算三角形面积时的绝对误差限与相对误差限.

解 依题意，测量中 a，b，C 的绝对误差限分别为

$$|\Delta a|=0.01, |\Delta b|=0.01, |\Delta C|=0.1°=\frac{\pi}{1\,800}.$$

由于

$$\begin{aligned} |\Delta S| \approx |\mathrm{d}S| &= \left|\frac{\partial S}{\partial a}\Delta a+\frac{\partial S}{\partial b}\Delta b+\frac{\partial S}{\partial C}\Delta C\right| \\ &\leqslant \left|\frac{\partial S}{\partial a}\right||\Delta a|+\left|\frac{\partial S}{\partial b}\right|\cdot|\Delta b|+\left|\frac{\partial S}{\partial C}\right||\Delta C| \\ &= \frac{1}{2}|b\sin C||\Delta a|+\frac{1}{2}|a\sin C||\Delta b| \\ &\quad +\frac{1}{2}|ab\cos C||\Delta C|, \end{aligned}$$

将各数据代入上式，得到 S 的绝对误差限为

$$|\Delta S| \approx 0.13.$$

因为

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot 12.50\cdot 8.30\cdot\frac{1}{2}\approx 25.94.$$

所以 S 的相对误差限为

$$\left|\frac{\Delta S}{S}\right| \approx \frac{0.13}{25.94}\approx 0.5\%.$$ □

习 题

1. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=x^2y$； (2) $z=y\cos x$； (3) $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(4) $z=\ln(x^2+y^2)$； (5) $z=\mathrm{e}^{xy}$； (6) $z=\arctan\frac{y}{x}$；

(7) $z=xy\mathrm{e}^{\sin(xy)}$； (8) $u=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}-\frac{x}{z}$； (9) $u=(xy)^z$；

(10) $u=x^{y^z}$.

2. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$;求 $f_x(x,1)$.

3. 设 $f(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$

考察函数 f 在原点$(0,0)$的偏导数.

4. 证明函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$在点$(0,0)$连续但偏导数不存在.

5. 考察函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在点$(0,0)$处的可微性.

6. 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在点$(0,0)$连续且偏导数存在,但在此点不可微.

7. 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在点$(0,0)$连续且偏导数存在,但偏导数在$(0,0)$不连续,而 f 在原点$(0,0)$可微.

8. 求下列函数在给定点的全微分:

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$ 在点$(0,0)$,$(1,1)$;

(2) $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$在点$(1,0)$,$(0,1)$.

9. 求下列函数的全微分:

(1) $z=y\sin(x+y)$;　　(2) $u=xe^{yz}+e^{-z}+y$.

10. 求曲面 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$在点$\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$处的切平面方程和法线方程.

11. 求曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 在点$(3,1,1)$处的切平面与法线方程.

12. 在曲面 $z=xy$ 上求一点,使这点的切平面平行于平面 $x+3y+z+9=0$;并写出这切平面方程和法线方程.

13. 计算近似值:

(1) $1.002\times 2.003^2\times 3.004^3$;　　(2) $\sin 29°\times\tan 46°$.

14. 设圆台上下底的半径分别为 $R=30$ cm,$r=20$ cm,高 $h=40$ cm.若 R,r,h 分别增加 3 mm,4 mm,2 mm,求此圆台体积变化的近似值.

---

15. 证明:若二元函数 f 在点$P(x_0,y_0)$的某邻域 $U(P)$内的偏导函数 f_x 与f_y 有界,则 f 在 $U(P)$内连续.

16. 设二元函数 f 在区域$D=[a,b]\times[c,d]$上连续.

(1) 若在 int D 内有 $f_x\equiv 0$,试问 f 在D 上有何特性?

(2) 若在 int D 内有 $f_x=f_y\equiv 0$,f 又怎样?

(3) 在(1)的讨论中,关于 f 在 D 上的连续性假设可否省略? 长方形区域可否改为任意区域?

17. 试证在原点(0,0)的充分小邻域内,有

$$\arctan\frac{x+y}{1+xy}\approx x+y.$$

18. 求曲面 $z=\frac{x^2+y^2}{4}$ 与平面 $y=4$ 的交线在 $x=2$ 处的切线与 Ox 轴的交角.

19. 试证:(1) 乘积的相对误差限近似于各因子相对误差限之和.

(2) 商的相对误差限近似于分子和分母相对误差限之差.

20. 测得一物体的体积 $V=4.45\ \mathrm{cm}^2$,其绝对误差限为 $0.01\ \mathrm{cm}^2$;又测得重量 $W=30.80$ g,其绝对误差限为 0.01 g.求由公式 $d=\frac{W}{V}$ 算出的比重 d 的相对误差限和绝对误差限.

§2　复合函数微分法

设函数

$$x=\varphi(s,t)\quad 与\quad y=\psi(s,t) \tag{1}$$

定义在 st 平面的区域 D 上,函数

$$z=f(x,y) \tag{2}$$

定义在 xy 平面的区域 D_1 上,且

$$\{(x,y)\mid x=\varphi(s,t),y=\psi(s,t),(s,t)\in D\}\subset D_1,$$

则函数

$$z=F(s,t)=f(\varphi(s,t),\psi(s,t)),(s,t)\in D \tag{3}$$

是以(2)为**外函数**,(1)为**内函数**的**复合函数**.其中 x,y 称为函数 F 的中间变量,s,t 为函数的自变量.

本节将讨论复合函数 F 的可微性、偏导数与全微分.

一　复合函数的求导法则

定理 17.5　若函数 $x=\varphi(s,t),y=\psi(s,t)$ 在点 $(s,t)\in D$ 可微,$z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)=(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 可微,则复合函数

$$z=f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$$

在点 (s,t) 可微,且它关于 s 与 t 的偏导数分别为

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_{(s,t)}&=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)}\left.\frac{\partial x}{\partial s}\right|_{(s,t)}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)}\left.\frac{\partial y}{\partial s}\right|_{(s,t)},\\ \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{(s,t)}&=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)}\left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{(s,t)}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)}\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{(s,t)}.\end{aligned} \tag{4}$$

证　由假设 $x=\varphi(s,t),y=\psi(s,t)$ 在点 (s,t) 可微,于是

$$\Delta x = \frac{\partial x}{\partial s}\Delta s + \frac{\partial x}{\partial t}\Delta t + \alpha_1 \Delta s + \beta_1 \Delta t, \tag{5}$$

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial s}\Delta s + \frac{\partial y}{\partial t}\Delta t + \alpha_2 \Delta s + \beta_2 \Delta t, \tag{6}$$

其中当 $\Delta s, \Delta t$ 趋于零时，$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 都趋向于零. 又由 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微，所以

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y, \tag{7}$$

其中当 $\Delta x, \Delta y \to 0$ 时，$\alpha, \beta \to 0$（我们补充 α, β 之定义使当 $\Delta x = 0, \Delta y = 0$ 时，$\alpha = \beta = 0$），将(5)，(6)代入(7)，得

$$\Delta z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \alpha\right)\left(\frac{\partial x}{\partial s}\Delta s + \frac{\partial x}{\partial t}\Delta t + \alpha_1 \Delta s + \beta_1 \Delta t\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \beta\right)\left(\frac{\partial y}{\partial s}\Delta s + \frac{\partial y}{\partial t}\Delta t + \alpha_2 \Delta s + \beta_2 \Delta t\right).$$

整理后

$$\Delta z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\Delta s + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\Delta t + \bar{\alpha}\Delta s + \bar{\beta}\Delta t, \tag{8}$$

其中

$$\bar{\alpha} = \frac{\partial z}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial z}{\partial y}\alpha_2 + \frac{\partial x}{\partial s}\alpha + \frac{\partial y}{\partial s}\beta + \alpha\alpha_1 + \beta\alpha_2, \tag{9}$$

$$\bar{\beta} = \frac{\partial z}{\partial x}\beta_1 + \frac{\partial z}{\partial y}\beta_2 + \frac{\partial x}{\partial t}\alpha + \frac{\partial y}{\partial t}\beta + \alpha\beta_1 + \beta_1\beta_2. \tag{10}$$

由于 $\varphi(s,t), \psi(s,t)$ 在点 (s,t) 可微，因此它们在点 (s,t) 都连续，即当 $\Delta s, \Delta t \to 0$ 时，有 $\Delta x, \Delta y \to 0$. 从而也有 $\alpha \to 0, \beta \to 0$，以及 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \to 0$. 于是在(9)、(10)式中，当 $\Delta s, \Delta t \to 0$，，有 $\bar{\alpha} \to 0, \bar{\beta} \to 0$. 故由(8)式推得复合函数(3)可微并求得 z 关于 s 和 t 的偏导数(4).

这里公式(4)也称为**链式法则**.

注意 如果只是求复合函数 $f(\varphi(s,t), \psi(s,t))$ 关于 s 或 t 的偏导数，则定理 17.5 中 $x = \varphi(s,t)$ 和 $y = \psi(s,t)$ 只须具有关于 s 或 t 的偏导数就够了. 因为以 Δs 或 Δt 除(7)式两边，然后让 $\Delta s \to 0$ 或 $\Delta t \to 0$，也能得到相应的结果. 但是对外函数 f 的可微性假设是不能省略的，否则上述复合函数求导公式不一定成立. 如函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

由§1习题6知 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，但 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微．若以 $f(x,y)$ 为外函数，$x=t,y=t$ 为内函数，则得以 t 为自变量的复合函数

$$z = F(t) = f(t,t) = \frac{t}{2},$$

所以 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}$．这时若用链式法则，将得出错误结果：

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$$

$$=0\cdot 1+0\cdot 1 = 0.$$

这个例子说明在使用复合函数求导公式时，必须注意外函数 f 可微这一重要条件．

一般地，若 $f(u_1,\cdots,u_m)$ 在点 $(u_1,\cdots,u_m)$ 可微，$u_k=g_k(x_1,\cdots,x_n)(k=1,2,\cdots,m)$，在点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 具有关于 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的偏导数，则复合函数

$$f(g_1(x_1,\cdots,x_n),g_2(x_1,\cdots,x_n),\cdots,g_m(x_1,\cdots,x_n))$$

关于自变量 x_i 的偏导数是

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (i = 1,2,\cdots,n).$$

多元函数的复合函数求导一般比较复杂，读者必须特别注意复合函数中哪些是自变量，哪些是中间变量．只有这样才能正确使用链式法则(4)求出结果．

例1　设 $z=\ln(u^2+v)$，而 $u=\mathrm{e}^{x+y^2},v=x^2+y$，求

$$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}.$$

解　所讨论的复合函数以 x,y 为自变量，u,v 为中间变量．由于

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2+v},\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2+v},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^{x+y^2},\frac{\partial u}{\partial y} = 2y\mathrm{e}^{x+y^2},\frac{\partial v}{\partial x} = 2x,\frac{\partial v}{\partial y} = 1,$$

根据公式(4)得到

$$\frac{\partial z}{\partial x} =\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=\frac{2u}{u^2+v}\mathrm{e}^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v}2x = \frac{2}{u^2+v}(u\mathrm{e}^{x+y^2} + x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} =\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=\frac{2u}{u^2+v}2y\mathrm{e}^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v} = \frac{1}{u^2+v}(4uy\mathrm{e}^{x+y^2} + 1).$$ □

例2　设 $u=u(x,y)$ 可微，在极坐标变换 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$ 下，证明

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

证 u 可以看作 r,θ 的复合函数 $u=u(r\cos\theta,r\sin\theta)$,因此

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}r\cdot\cos\theta.$$

于是

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta\right)^2\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.\end{aligned}$$

例 3 设 $z=uv+\sin t$,其中 $u=e^t,v=\cos t$,求 $\frac{dz}{dt}$.

解 这里把 u,v,t 看作中间变量,复合后仅是自变量 t 的一元函数.于是

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dt}\\&=ve^t+u(-\sin t)+\cos t\\&=e^t(\cos t-\sin t)+\cos t.\end{aligned}$$ □

注意 上面第一个等式中,左边的 $\frac{dz}{dt}$ 是作为一元函数的复合函数对 t 求导数,右边最后一项里的 $\frac{\partial z}{\partial t}$ 是外函数(作为 u,v,t 的三元函数)对 t 求偏导,二者所用符号各自有别.

例 4 用多元复合微分法计算下列一元函数的导数:

(1) $y=x^x$; (2) $y=\frac{(1+x^2)\ln x}{\sin x+\cos x}$.

解 (1) 令 $y=u^v,u=x,v=x$,则有

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=y_u\cdot\frac{du}{dx}+y_v\cdot\frac{dv}{dx}=vu^{v-1}+u^v\ln v\\&=x\cdot x^{x-1}+x^x\ln x=x^x(1+\ln x).\end{aligned}$$

(2) 令 $y=\frac{vw}{u}$, $u=\sin x+\cos x,v=1+x^2,w=\ln x$,则有

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx}+\frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{dx}\\&=\frac{-vw}{u^2}(\cos x-\sin x)+\frac{w}{u}(2x)+\frac{v}{u}\frac{1}{x}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}\left[(\sin x+\cos x)\left(2x\ln x+\frac{1+x^2}{x}\right)\right.$$

$$\left.-(\cos x-\sin x)(1+x^2)\ln x\right].\qquad\square$$

由此可见,以前用“对数求导法”求一元函数的导数问题,如今也可用多元复合函数链式法则来计算.

二 复合函数的全微分

若以 x 和 y 为自变量的函数 $z=f(x,y)$ 可微,则其全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.\tag{11}$$

如果 x,y 作为中间变量又是自变量 s,t 的可微函数

$$x=\varphi(s,t),\quad y=\psi(s,t),$$

则由定理 17.5 知道,复合函数 $z=f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 是可微的,其全微分为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=\frac{\partial z}{\partial s}\mathrm{d}s+\frac{\partial z}{\partial t}\mathrm{d}t\\&=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\mathrm{d}s+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\mathrm{d}s+\frac{\partial x}{\partial t}\mathrm{d}t\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\mathrm{d}s+\frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}t\right).\end{aligned}\tag{12}$$

由于 x,y 又是 (s,t) 的可微函数,因此同时有

$$\mathrm{d}x=\frac{\partial x}{\partial s}\mathrm{d}s+\frac{\partial x}{\partial t}\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}y=\frac{\partial y}{\partial s}\mathrm{d}s+\frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}t.\tag{13}$$

将(13)式代入(12)式,得到与(11)式完全相同的结果.这就是关于多元函数的**一阶(全)微分形式不变性**.

必须指出,在(11)式中当 x,y 作为自变量时,$\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 各自独立取值;当 x,y 作为中间变量时,$\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 如(13)式所示,它们的值由 $s,t,\mathrm{d}s,\mathrm{d}t$ 所确定.

利用微分形式不变性,能更有条理地计算复杂函数的全微分.

例 5 设 $z=\mathrm{e}^{xy}\sin(x+y)$,利用微分形式不变性求 $\mathrm{d}z$,并由此导出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 令 $z=\mathrm{e}^u\sin v,u=xy,v=x+y$.由于

$$\mathrm{d}z=z_u\mathrm{d}u+z_v\mathrm{d}v=\mathrm{e}^u\sin v\mathrm{d}u+\mathrm{e}^u\cos v\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}u=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}v=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y,$$

因此

$$\mathrm{d}z=\mathrm{e}^u\sin v(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)+\mathrm{e}^u\cos v(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)]dx \\
&\quad + e^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)]dy,
\end{aligned}
$$

并由此得到

$$
\begin{aligned}
z_x &= e^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)], \\
z_y &= e^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)].
\end{aligned}
$$

□

习　　题

1. 求下列复合函数的偏导数或导数：

(1) 设 $z=\arctan(xy)$, $y=e^x$, 求 $\dfrac{dz}{dx}$;

(2) 设 $z=\dfrac{x^2+y^2}{xy}e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(3) 设 $z=x^2+xy+y^2$, $x=t^2$, $y=t$, 求 $\dfrac{dz}{dt}$;

(4) 设 $z=x^2\ln y$, $x=\dfrac{u}{v}$, $y=3u-2v$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial u},\dfrac{\partial z}{\partial v}$;

(5) 设 $u=f(x+y,xy)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$;

(6) 设 $u=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

2. 设 $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$, 其中 f 为可微函数, 验证

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$$

3. 设 $z=\sin y+f(\sin x-\sin y)$, 其中 f 为可微函数, 证明:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\sec x+\frac{\partial z}{\partial y}\sec y=1.$$

4. 设 $f(x,y)$ 可微, 证明: 在坐标旋转变换

$$x=u\cos\theta-v\sin\theta,\ y=u\sin\theta+v\cos\theta$$

之下, $(f_x)^2+(f_y)^2$ 是一个形式不变量. 即若

$$g(u,v)=f(u\cos\theta-v\sin\theta,u\sin\theta+v\cos\theta),$$

则必有 $(f_x)^2+(f_y)^2=(g_u)^2+(g_v)^2$ (其中旋转角 θ 是常数).

5. 设 $f(u)$ 是可微函数, $F(x,t)=f(x+2t)+f(3x-2t)$. 试求:

$$F_x(0,0) \text{ 与 } F_t(0,0).$$

---

6. 若函数 $u=F(x,y,z)$ 满足恒等式 $F(tx,ty,tz)=t^kF(x,y,z)$ $(k>0)$, 则称 $F(x,y,z)$ 为 **k 次齐次函数**. 试证下述关于齐次函数的欧拉定理: 可微函数 $F(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数的充要条件是:

$$xF_x(x,y,z)+yF_y(x,y,z)+zF_z(x,y,z)=kF(x,y,z).$$

并证明：$z=\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-xy$ 为 2 次齐次函数.

7. 设 $f(x,y,z)$ 具有性质 $f(tx,t^ky,t^mz)=t^nf(x,y,z)(t>0)$，证明：

(1) $f(x,y,z)=x^nf\left(1,\frac{y}{x^k},\frac{z}{x^m}\right)$；

(2) $xf_x(x,y,z)+kyf_y(x,y,z)+mzf_z(x,y,z)=nf(x,y,z)$.

8. 设由行列式表示的函数

$$D(t)=\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix},$$

其中 $a_{ij}(t)(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的导数都存在，证明

$$\frac{\mathrm{d}D(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{k1}(t) & \cdots & a'_{kn}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

§3 方向导数与梯度

在许多问题中，不仅要知道函数在坐标轴方向上的变化率（即偏导数），而且还要设法求得函数在其他特定方向上的变化率. 这就是本节所要讨论的方向导数.

定义 1 设三元函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域 $U(P_0)\subset\mathbf{R}^3$ 内有定义，$\boldsymbol{l}$ 为从点 P_0 出发的射线，$P(x,y,z)$ 为 $\boldsymbol{l}$ 上且含于 $U(P_0)$ 内的任一点，以 ρ 表示 P 与 P_0 两点间的距离. 若极限

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\Delta_l f}{\rho}$$

存在，则称此极限为函数 f 在点 P_0 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的**方向导数**，记作

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0},\ f_l(P_0)\ 或\ f_l(x_0,y_0,z_0).$$

容易看到，若 f 在点 P_0 存在关于 x 的偏导数，则 f 在点 P_0 沿 x 轴正向的方向导数恰为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}.$$

当 $\boldsymbol{l}$ 的方向为 x 轴的负方向时，则有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=-\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}.$$

沿任一方向的方向导数与偏导数的关系由下述定理给出.

定理 17.6 若函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 可微,则 f 在点 P_0 处沿任一方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数都存在,且

$$f_l(P_0)=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta+f_z(P_0)\cos\gamma, \tag{1}$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦.

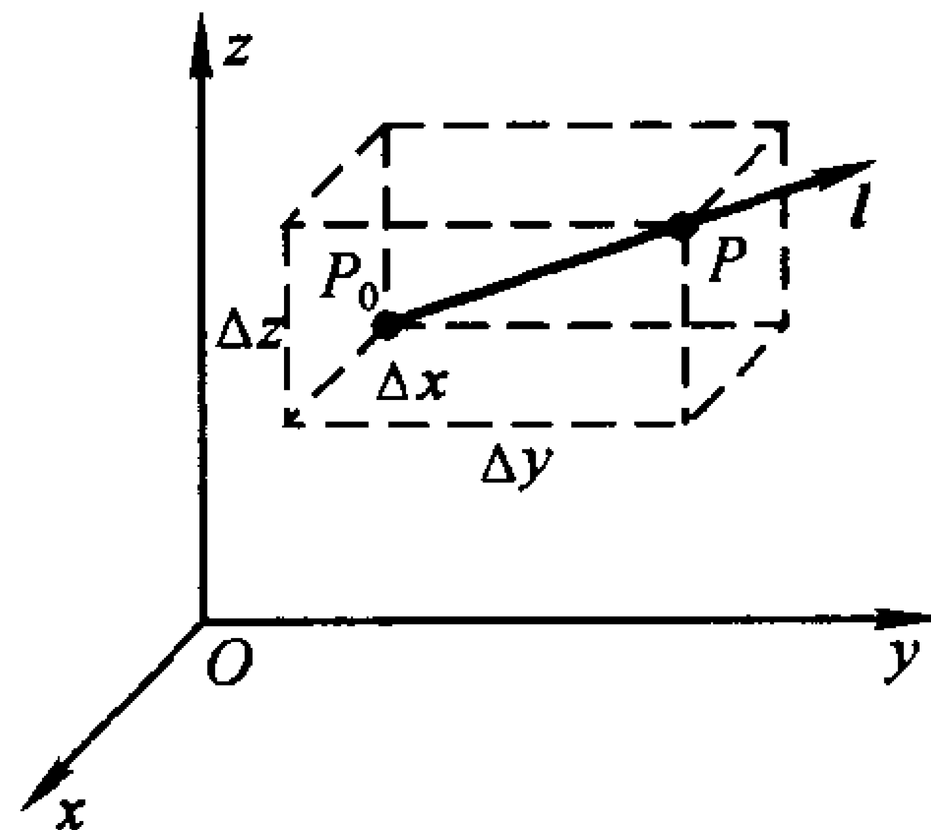


图 17-5

证 设 $P(x,y,z)$ 为 $\boldsymbol{l}$ 上任一点,于是(见图 17-5)

$$\left.\begin{aligned} x-x_0&=\Delta x=\rho\cos\alpha,\\ y-y_0&=\Delta y=\rho\cos\beta,\\ z-z_0&=\Delta z=\rho\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

由假设 f 在点 P_0 可微,则有

$$f(P)-f(P_0)=f_x(P_0)\Delta x+f_y(P_0)\Delta y+f_z(P_0)\Delta z+o(\rho).$$

上式左、右两边皆除以 ρ,并根据(2)式可得

$$\begin{aligned}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}&=f_x(P_0)\frac{\Delta x}{\rho}+f_y(P_0)\frac{\Delta y}{\rho}+f_z(P_0)\frac{\Delta z}{\rho}+\frac{o(\rho)}{\rho}\\&=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta+f_z(P_0)\cos\gamma+\frac{o(\rho)}{\rho}.\end{aligned}$$

因为当 $\rho\to 0$ 时,上式右边末项 $\dfrac{o(\rho)}{\rho}\to 0$,于是左边极限存在且有

$$\begin{aligned}f_l(P_0)&=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}\\&=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta+f_z(P_0)\cos\gamma.\end{aligned}$$

□

对于二元函数 $f(x,y)$ 来说,相应于(1)的结果是

$$f_l(P_0)=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta,$$

其中 α,β 是平面向量 $\boldsymbol{l}$ 的方向角.

例 1 设 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$,求 f 在点 $P_0(1,1,1)$ 沿方向 $\boldsymbol{l}:(2,-2,1)$ 的方向导数.

解 易见 f 在点 P_0 可微.故由 $f_x(P_0)=1,f_y(P_0)=2,f_z(P_0)=3$ 及方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{2}{3},$$

$$\cos\beta=\frac{-2}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{-2}{3},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{1}{3},$$

可按公式(1)求得 f 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数为

$$f_l(P_0)=1\cdot\frac{2}{3}+2\left(-\frac{2}{3}\right)+3\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}. \qquad \square$$

例 2 设

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0<y<x^2,\ -\infty<x<+\infty \text{ 时},\\ 0, & \text{其余部分},\end{cases}$$

如图 16－7 所示.这个函数在原点不连续(当然也不可微),但在始于原点的任何射线上,都存在包含原点的充分小的一段,在这一段上 f 的函数值恒为零.于是由方向导数定义,在原点处沿任何方向 $\boldsymbol{l}$ 都有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(0,0)}=0. \qquad \square$$

这个例子说明:(i)函数在一点可微是方向导数存在的充分条件而不是必要条件;(ii)函数在一点连续同样不是方向导数存在的必要条件,当然也不是充分条件(对此读者容易举出反例).

定义 2 若 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 存在对所有自变量的偏导数,则称向量 $(f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0))$ 为函数 f 在点 P_0 的**梯度**,记作[①]

$$\operatorname{grad} f=(f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0)).$$

向量 grad f 的长度(或模)为

$$|\operatorname{grad} f|=\sqrt{f_x(P_0)^2+f_y(P_0)^2+f_z(P_0)^2}.$$

在定理 17.6 的条件下,若记 $\boldsymbol{l}$ 方向上的单位向量为

$$\boldsymbol{l}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

于是方向导数公式又可写成

$$f_l(P_0)=\operatorname{grad} f(P_0)\cdot\boldsymbol{l}_0=|\operatorname{grad} f(P_0)|\cos\theta$$

这里 θ 是梯度向量 grad $f(P_0)$ 与 $\boldsymbol{l}_0$ 的夹角.因此当 $\theta=0$ 时,$f_l(P_0)$ 取得最大值 $|\operatorname{grad} f(P_0)|$.这就是说,当 f 在 P_0 可微时,f 在 P_0 的梯度方向是 f 的值增长最快的方向,且沿这一方向的变化率就是梯度的模;而当 $\boldsymbol{l}$ 与梯度向量反方向 $(\theta=\pi)$ 时,方向导数取得最小值 $-|\operatorname{grad} f(P_0)|$.

例 3 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^3$,求 f 在点 $P_0(2,-1,1)$ 处的梯度及它的模.

解 由于 $f_x(P_0)=1,f_y(P_0)=-3,f_z(P_0)=-3$,所以

---

① grad 是英文 gradient(梯度)一词的缩写.

$$\operatorname{grad} f(P_0) = (1, -3, -3),$$
$$|\operatorname{grad} f(P_0)| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{19}. \qquad \square$$

习 题

1. 求函数 $u = xy^2 + z^3 - xyz$ 在点(1,1,2)处沿方向 l(其方向角分别为 60°,45°,60°)的方向导数.

2. 求函数 $u = xyz$ 在点 $A(5,1,2)$处沿到点 $B(9,4,14)$的方向$\overrightarrow{AB}$上的方向导数.

3. 求函数 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - 4x + 2y - 4z$ 在点 $A = (0,0,0)$及点 $B = \left(5, -3, \frac{2}{3}\right)$处的梯度以及它们的模.

4. 设函数 $u = \ln\left(\frac{1}{r}\right)$,其中,$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$,求 u 的梯度;并指出在空间哪些点上成立等式$|\operatorname{grad} u| = 1$.

5. 设函数 $u = \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$,求它在点$(a,b,c)$的梯度.

6. 证明:

(1) $\operatorname{grad}(u+c) = \operatorname{grad} u$ (c 为常数);

(2) $\operatorname{grad}(\alpha u + \beta v) = \alpha \operatorname{grad} u + \beta \operatorname{grad} v$ (α, β 为常数);

(3) $\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$;

(4) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$.

7. 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,试求:

(1) $\operatorname{grad} r$; (2) $\operatorname{grad} \frac{1}{r}$.

---

8. 设 $u = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz$,试问在怎样的点集上 grad u 分别满足:(1)垂直于 x 轴;(2)平行于 x 轴;(3)恒为零向量.

9. 设 $f(x,y)$可微,l 是 $\mathbf{R}^2$ 上的一个确定向量.倘若处处有 $f_l(x,y) \equiv 0$,试问此函数 f 有何特征?

10. 设 $f(x,y)$可微,l_1 与 l_2 是 $\mathbf{R}^2$ 上一组线性无关向量.试证明:若 $f_{l_i}(x,y) \equiv 0(i=1,2)$,则 $f(x,y) \equiv$常数.

§4 泰勒公式与极值问题

一 高阶偏导数

由于 $z = f(x,y)$的偏导函数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$仍然是自变量 x 与 y 的函数,如果它们关于 x 与 y 的偏导数也存在,则说函数 f 具有二阶偏导数,二元函数的二阶偏导数有如下四种情形:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

类似地可定义更高阶的偏导数，$z=f(x,y)$的三阶偏导数共有八种情形，如

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=f_{x^3}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=f_{x^2y}(x,y)$$

$$\cdots\cdots$$

例 1　求函数 $z=e^{x+2y}$的所有二阶偏导数和$\dfrac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}$.

解　由于函数的一阶偏导数是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+2y},\frac{\partial z}{\partial y}=2e^{x+2y}.$$

因此有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(e^{x+2y})=e^{x+2y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(e^{x+2y})=2e^{x+2y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(2e^{x+2y})=2e^{x+2y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(2e^{x+2y})=4e^{x+2y}$$

和

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(2e^{x+2y})=2e^{x+2y}.$$ □

例 2　求函数 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$的所有二阶偏导数.

解　因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-y}{x^2+y^2},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，所以二阶偏导数为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$ □

注意 从上面两个例子看到，这些函数关于 x 和 y 的不同顺序的两个二阶偏导数都相等(这种既有关于 x 又有关于 y 的高阶偏导数称为**混合偏导数**)，即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

但这个结论并不对任何函数都成立，例如函数

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

它的一阶偏导数为

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

进而求 f 在(0,0)处关于 x 和 y 的两个不同顺序的混合偏导数，得

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(0,\Delta y) - f_x(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y}{\Delta y} = -1,$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_y(\Delta x,0) - f_y(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

由此看到，这里的 $f(x,y)$在原点处的两个二阶混合偏导数与求导顺序有关. 那么，在什么条件下混合偏导数与求导顺序无关呢？为此，我们按定义先把 $f_{xy}(x_0,y_0)$与 $f_{yx}(x_0,y_0)$表示成极限形式. 由于

$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y) - f(x,y)}{\Delta x},$$

因此有

$$f_{xy}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(x_0,y_0+\Delta y) - f_x(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0, y_0)}{\Delta x \Delta y}. \tag{1}$$

类似地有

$$f_{yx}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)}{\Delta x \Delta y}. \tag{2}$$

为使 $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$成立，必须使(1)，(2)这两个累次极限相等，即可以交换累次极限的极限次序. 下述定理给出了使极限(1)，(2)相等的一个充分条件.

定理 17.7　若 $f_{xy}(x, y)$和 $f_{yx}(x, y)$都在点(x_0, y_0)连续，则

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \tag{3}$$

证　令

$$F(\Delta x, \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0),$$

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0).$$

于是有

$$F(\Delta x, \Delta y) = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0). \tag{4}$$

由于函数 f 存在关于 x 的偏导数，所以函数 φ 可导. 应用一元函数的中值定理，有

$$\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \theta_1 \Delta x) \Delta x$$
$$= [f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0)] \Delta x \quad (0 < \theta_1 < 1).$$

又由 f_x 存在关于 y 的偏导数，故对以 y 为自变量的函数 $f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y)$应用一元函数中值定理，又使上式化为

$$\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = f_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta x \Delta y \quad (0 < \theta_1, \theta_2 < 1).$$

由(4)则有

$$F(\Delta x, \Delta y) = f_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta x \Delta y \quad (0 < \theta_1, \theta_2 < 1). \tag{5}$$

如果令 $\psi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y)$,
则有

$$F(\Delta x, \Delta y) = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0).$$

用前面相同的方法,又可得到

$$F(\Delta x, \Delta y) = f_{yx}(x_0 + \theta_3\Delta x, y_0 + \theta_4\Delta y)\Delta x\Delta y \quad (0 < \theta_3, \theta_4 < 1). \tag{6}$$

当 $\Delta x, \Delta y$ 不为零时,由(5)、(6)两式得到

$$f_{xy}(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \theta_2\Delta y) = f_{yx}(x_0 + \theta_3\Delta x, y_0 + \theta_4\Delta y) \quad (0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 < 1). \tag{7}$$

由定理假设 $f_{xy}(x,y)$ 与 $f_{yx}(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续,故当 $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ 时,(7)式两边极限都存在而且相等,这就得到所要证明的(3)式. □

这个定理的结论对 n 元函数的混合偏导数也成立. 如三元函数 $u = f(x, y, z)$,若下述六个三阶混合偏导数

$$f_{xyz}(x,y,z), f_{yzx}(x,y,z), f_{zxy}(x,y,z),$$
$$f_{xzy}(x,y,z), f_{yxz}(x,y,z), f_{zyx}(x,y,z)$$

在某一点都连续,则在这一点六个混合偏导数都相等;同样,若二元函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 存在直到 n 阶的连续混合偏导数,则在这一点 $m(\leqslant n)$ 阶混合偏导数都与顺序无关.

今后除特别指出外,都假设相应阶数的混合偏导数连续,从而混合偏导数与求导顺序无关.

下面讨论复合函数的高阶偏导数. 设 z 是通过中间变量 x,y 而成为 s,t 的函数,即

$$z = f(x,y),$$

其中 $x = \varphi(s,t), y = \psi(s,t)$. 若函数 f, φ, ψ 都具有连续的二阶偏导数,则作为复合函数的 z 对 s,t 同样存在二阶连续偏导数. 具体计算如下:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

显然 $\frac{\partial z}{\partial s}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial t}$ 仍是 s,t 的复合函数,其中 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 是 x,y 的函数,$\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial t}$ 是 s,t 的函数. 继续求 z 关于 s,t 的二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) +$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}.$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t}+$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}\right)+$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial t}$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial s}.$$

例 3 设 $z=f\left(x,\frac{x}{y}\right)$,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 这里 z 是以 x 和 y 为自变量的复合函数,它也可改写成如下形式:

$$z=f(u,v),u=x,v=\frac{x}{y}.$$

由复合函数求导公式有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial u}.$$

注意,这里$\frac{\partial f}{\partial u},\frac{\partial f}{\partial v}$仍是以 u,v 为中间变量 x,y 为自变量的复合函数.所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{2}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= -\frac{x}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{x}{y^3}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial f}{\partial v}.$$ □

二 中值定理和泰勒公式

二元函数的中值公式和泰勒公式,与一元函数的拉格朗日公式和泰勒公式相仿,对于 n 元函数($n>2$)也有同样的公式,只是形式上更复杂一些.

在叙述有关定理之前,先介绍凸区域的概念.

若区域 D 上任意两点的连线都含于 D,则称 D 为**凸区域**(图 17-6).这就是说,若 D 为凸区域,则对任意两点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)\in D$ 和一切 $\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,恒有

$$P(x_1+\lambda(x_2-x_1),y_1+\lambda(y_2-y_1))\in D.$$

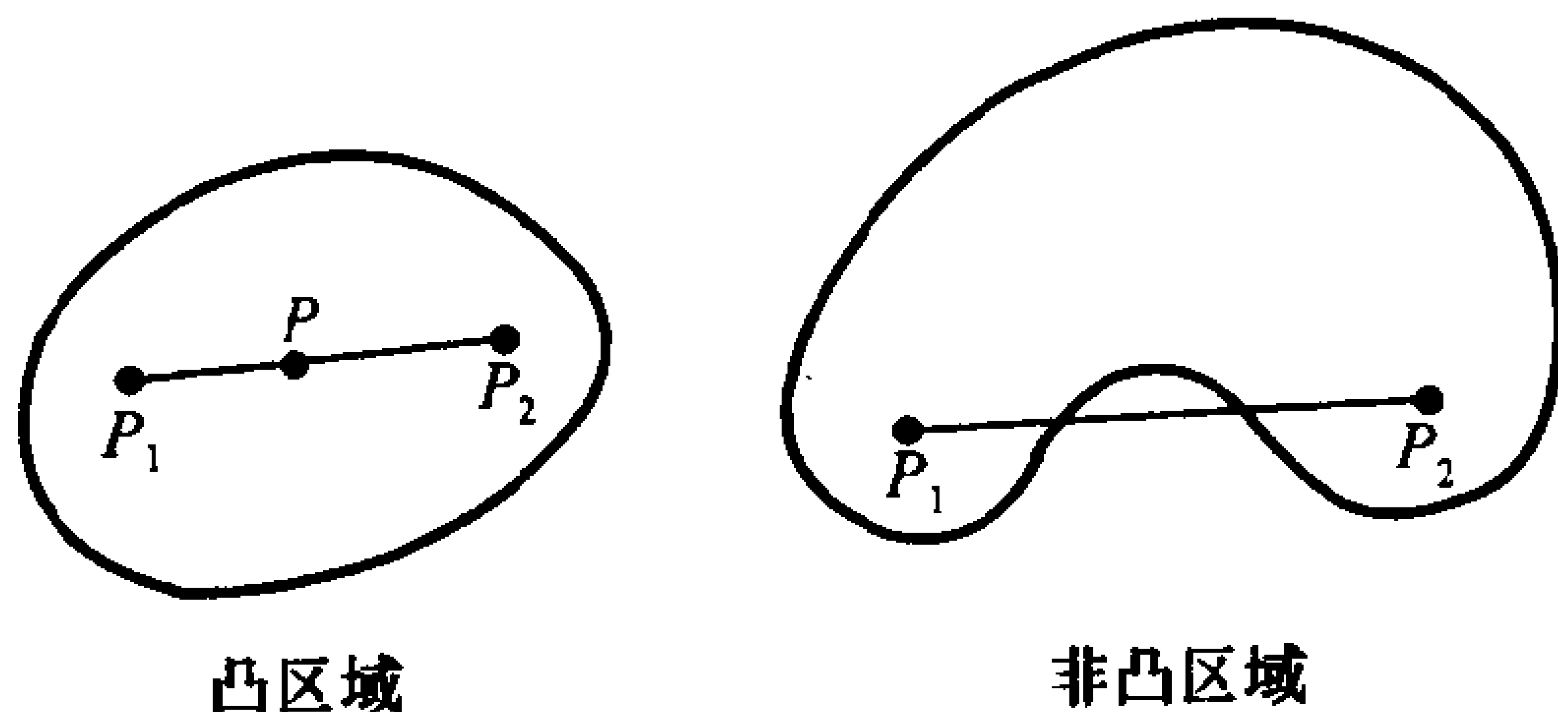


图 17-6

定理17.8(中值定理) 设二元函数 f 在凸开域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上连续,在 D 的所有内点都可微,则对 D 内任意两点 $P(a,b),Q(a+h,b+k)\in \operatorname{int} D$,存在某 $\theta(0<\theta<1)$,使得

$$f(a+h,b+k)-f(a,b) = f_x(a+\theta h,b+\theta k)h + f_y(a+\theta h,b+\theta k)k. \tag{8}$$

证 令

$$\Phi(t)=f(a+th,b+tk).$$

它是定义在[0,1]上的一元函数,由定理中的条件知 $\Phi(t)$在[0,1]上连续,在(0,1)内可微.于是根据一元函数中值定理,存在 $\theta(0<\theta<1)$使得

$$\Phi(1)-\Phi(0)=\Phi'(\theta). \tag{9}$$

由复合函数的求导法则

$$\Phi'(\theta)=f_x(a+\theta h,b+\theta k)h+f_y(a+\theta h,b+\theta k)k. \tag{10}$$

由于 D 为凸区域,所以 $(a+\theta h,b+\theta k)\in D$,故由(9),(10)即得所要证明的(8)式. □

注意　若 D 是闭凸域,且对 D 上任意两点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 及任意 $\lambda(0<\lambda<1)$,都有

$$P(x_1+\lambda(x_2-x_1),y_1+\lambda(y_2-y_1))\in \operatorname{int} D,$$

则对 D 上连续,$\operatorname{int} D$ 内可微的函数 f,只要 $P,Q\in D$,也存在 $\theta\in(0,1)$ 使(8)式成立.

例如 D 是圆域 $\{(x,y)\mid(x-\xi)^2+(y-y)^2\leqslant r^2\}$,$f$ 在 D 上连续,在 $\operatorname{int} D$ 内可微,则必有(8)式成立.倘若 D 是矩形区域 $[a,b]\times[c,d]$,那就不能保证对 D 上任意两点 P,Q 都有(8)式成立(为什么?).

公式(8)也称为二元函数(在凸域上)的**中值公式**.它与定理 17.3 的中值公式(12)相比较,差别在于这里的中值点 $(a+\theta h,b+\theta k)$ 是在 P,Q 的连线上,而在定理 17.3 中 θ_1 与 θ_2 可以不相等.

推论　若函数 f 在区域 D 上存在偏导数,且

$$f_x=f_y\equiv 0,$$

则 f 在区域 D 上为常量函数.

请读者作为练习自行证明(注意本推论与§1 习题 16(2)两者证明的差别).

定理 17.9(泰勒定理)　若函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有直到 $n+1$ 阶的连续偏导数,则对 $U(P_0)$ 内任一点 (x_0+h,y_0+k),存在相应的 $\theta\in(0,1)$,使得

$$\begin{aligned}f(x_0+h,y_0+k)=&f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\\&\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots+\\&\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+\\&\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k).\end{aligned} \tag{11}$$

(11)式称为二元函数 f 在点 P_0 的 n 阶**泰勒公式**,其中

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)=\sum_{i=0}^{m}\mathrm{C}_m^i\frac{\partial^m}{\partial x^i\partial y^{m-i}}f(x_0,y_0)h^ik^{m-i}.$$

证　与定理 17.8 的证明一样.作函数

$$\Phi(t)=f(x_0+th,y_0+tk).$$

由定理的假设,一元函数 $\Phi(t)$在$[0,1]$上满足一元函数泰勒定理条件,于是有

$$\Phi(1)=\Phi(0)+\frac{\Phi'(0)}{1!}+\frac{\Phi''(0)}{2!}+\cdots+\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}+\frac{\Phi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\quad(0<\theta<1).\tag{12}$$

应用复合函数求导法则,可求得 $\Phi(t)$的各阶导数:

$$\Phi^{(m)}(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0+th,y_0+tk)\quad(m=1,2,\cdots,n+1).$$

当 $t=0$ 时,则有

$$\Phi^{(m)}(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)\quad(m=1,2,\cdots,n)\tag{13}$$

及

$$\Phi^{(n+1)}(\theta)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k).\tag{14}$$

将(13),(14)式代入(12)式就得到所求之泰勒公式(11). □

易见,中值公式(8)正是泰勒公式(11)在 $n=0$ 时的特殊情形.

若在公式(11)中只要求余项 $R_n=o(\rho^n)$ $(\rho=\sqrt{h^2+k^2})$,则仅需 f 在 $U(P_0)$内存在直到 n 阶连续偏导数,便有

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\sum_{P=1}^{n}\frac{1}{p!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^P f(x_0,y_0)+o(\rho^n).\tag{15}$$

例 4 求 $f(x,y)=x^y$ 在点(1,4)的泰勒公式(到二阶为止),并用它计算 $(1.08)^{3.96}$.

解 由于 $x_0=1,y_0=4,n=2$,因此有

$$\begin{aligned}
&f(x,y)=x^y,f(1,4)=1,\\
&f_x(x,y)=yx^{y-1},f_x(1,4)=4,\\
&f_y(x,y)=x^y\ln x,f_y(1,4)=0,\\
&f_{x^2}(x,y)=y(y-1)x^{y-2},f_{x^2}(1,4)=12,\\
&f_{xy}(x,y)=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x,f_{xy}(1,4)=1.\\
&f_{y^2}(x,y)=x^y(\ln x)^2,f_{y^2}(1,4)=0.
\end{aligned}$$

将它们代入泰勒公式(15),即得

$$x^y=1+4(x-1)+6(y-1)+6(x-1)^2+(x-1)(y-4)+o(\rho^2).$$

若略去余项,并让 $x=1.08,y=3.96$,则有

$$(1.08)^{3.96} \approx 1 + 4 \times 0.08 + 6 \times 0.08^2 - 0.08 \times 0.04 = 1.355\,2.$$ □

与§1 例 7 的结果相比较,这是更接近于真值(1.356 307…)的近似值.因为微分近似式相当于现在的一阶泰勒公式.

三　极值问题

多元函数的极值问题是多元函数微分学的重要应用,这里仍以二元函数为例进行讨论.

定义　设函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有定义.若对于任何点 $P(x,y)\in U(P_0)$,成立不等式

$$f(P)\leqslant f(P_0)\quad (\text{或 } f(P)\geqslant f(P_0)),$$

则称函数 f 在点 P_0 取得**极大(或极小)**值,点 P_0 称为 f 的**极大(或极小)值点**.极大值、极小值统称**极值**.极大值点、极小值点统称**极值点**.

注意:这里所讨论的极值点只限于定义域的内点.

例 5　设 $f(x,y)=2x^2+y^2, g(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}, h(x,y)=xy$.由定义直接知道,坐标原点(0,0)是 f 的极小值点,是 g 的极大值点,但不是 h 的极值点.这是因为对任何点 (x,y),恒有 $f(x,y)\geqslant f(0,0)=0$;对任何 $(x,y)\in\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,恒有 $g(x,y)\leqslant g(0,0)=1$;而对于函数 h,在原点的任意小邻域内,既含有使 $h(x,y)>0$ 的Ⅰ、Ⅲ象限中的点,又含有使 $h(x,y)<0$ 的Ⅱ、Ⅳ象限中的点,所以 $h(0,0)=0$ 既不是极大值又不是极小值. □

由定义可见,若 f 在点 (x_0,y_0) 取得极值,则当固定 $y=y_0$ 时,一元函数 $f(x,y_0)$ 必定在 $x=x_0$ 取相同的极值.同理,一元函数 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 也取相同的极值.于是得到二元函数取极值的必要条件如下:

定理17.10(极值必要条件)　若函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 存在偏导数,且在 P_0 取得极值,则有

$$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0. \tag{16}$$

反之,若函数 f 在点 P_0 满足(16),则称点 P_0 为 f 的**稳定点**.定理 17.10 指出:若 f 存在偏导数,则其极值点必是稳定点.但稳定点并不都是极值点,如例 5 中的函数 h,原点为其稳定点,但它在原点并不取得极值.

与一元函数的情形相同,函数在偏导数不存在的点上也有可能取得极值.例如 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在原点没有偏导数,但 $f(0,0)=0$ 是 f 的极小值.

为了讨论二元函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 取得极值的充分条件,我们假定 f 具有二阶连续偏导数,并记

$$\boldsymbol{H}_f(P_0)=\begin{bmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0)\\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{bmatrix}_{P_0} \tag{17}$$

它称为 f 在 P_0 的**黑赛**(Hesse)**矩阵**[①]

定理17.11(极值充分条件) 设二元函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内具有二阶连续偏导数,且 P_0 是 f 的稳定点.则当 $\boldsymbol{H}_f(P_0)$ 是正定矩阵时,f 在 P_0 取得极小值;当 $\boldsymbol{H}_f(P_0)$ 是负定矩阵时,f 在 P_0 取得极大值;当 $\boldsymbol{H}_f(P_0)$ 是不定矩阵时,f 在 P_0 不取极值.

证 由 f 在 P_0 的二阶泰勒公式,并注意到条件 $f_x(P_0)=f_y(P_0)=0$,有

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(\Delta x,\Delta y)\boldsymbol{H}_f(P_0)(\Delta x,\Delta y)^{\mathrm{T}}+o(\Delta x^2+\Delta y^2).$$

由于 $\boldsymbol{H}_f(P_0)$ 正定,所以对任何 $(\Delta x,\Delta y)\neq(0,0)$,恒使二次型 $Q(\Delta x,\Delta y)=(\Delta x,\Delta y)\boldsymbol{H}_f(P_0)(\Delta x,\Delta y)^{\mathrm{T}}>0$.因此存在一个与 $\Delta x,\Delta y$ 无关的正数 q[②],使得

$$Q(\Delta x,\Delta y)\geqslant 2q(\Delta x^2+\Delta y^2).$$

从而对于充分小的 $U(P_0)$,只要 $(x,y)\in U(P_0)$ 就有

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(x_0,y_0)&\geqslant q(\Delta x^2+\Delta y^2)+o(\Delta x^2+\Delta y^2)\\&=(\Delta x^2+\Delta y^2)(q+o(1))\geqslant 0,\end{aligned}$$

即 f 在点 (x_0,y_0) 取得极小值.

同理可证 $\boldsymbol{H}_f(P_0)$ 为负定矩阵时,f 在 P_0 取得极大值.

最后,当 $\boldsymbol{H}_f(P_0)$ 不定时,f 在 P_0 不取极值.这是因为倘若 f 取极值(例如取极大值),则沿任何过 P_0 的直线 $x=x_0+t\Delta x,y=y_0+t\Delta y$,$f(x,y)=f(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)=\varphi(t)$ 在 $t=0$ 亦取极大值.由一元函数取极值的充分条件,$\varphi''(0)>0$ 是不可能的(否则 φ 在 $t=0$ 将取极小值),故 $\varphi''(0)\leqslant 0$.而

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=f_x\Delta x+f_y\Delta y,\\\varphi''(t)&=f_{xx}\Delta x^2+2f_{xy}\Delta x\Delta y+f_{yy}\Delta y^2,\\\varphi''(0)&=(\Delta x,\Delta y)\boldsymbol{H}_f(P_0)(\Delta x,\Delta y)^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

这表明 $\boldsymbol{H}_f(P_0)$ 必须是负半定的.同理,倘若 f 取极小值,则将导致 $\boldsymbol{H}_f(P_0)$ 必须是正半定的.也就是说,当 f 在 P_0 取得极值时,$\boldsymbol{H}_f(P_0)$ 必须是正半定或负半定矩阵,但这与假设相矛盾. □

根据正半定或负半定对称阵所属主子行列式的符号规则,定理17.11又可写成如下比较实用的形式:

---

① 关于黑赛矩阵的一般形式,将在第二十三章里介绍.

② 因为 $Q(\Delta x,\Delta y)/(\Delta x^2+\Delta y^2)=(u,v)\boldsymbol{H}_f(P_0)(u,v)^{\mathrm{T}}=\Phi(u,v)$,其中

$$u=\Delta x/\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},\quad v=\Delta y/\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

显然,$\Phi(u,v)$ 是 (u,v) 的连续函数.由于 $u^2+v^2=1$,因此 Φ 在单位圆 $u^2+v^2=1$ 上必有最小值 $2q\geqslant 0$.又因 $(u,v)\neq(0,0)$,故 $q>0$.

若函数 f 如定理 17.11 所设. P_0 是 f 的稳定点,则有:

(i) 当 $f_{xx}(P_0)>0,(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P_0)>0$ 时,f 在点 P_0 取得极小值;

(ii) 当 $f_{xx}(P_0)<0,(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P_0)>0$ 时,f 在点 P_0 取得极大值;

(iii) 当$(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P_0)<0$ 时,f 在点 P_0 不能取得极值;

(iv) 当$(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P_0)=0$ 时,不能肯定 f 在点 P_0 是否取得极值.

例 6 求 $f(x,y)=x^2+5y^2-6x+10y+6$ 的极值.

解 由方程组

$$\begin{cases} f_x = 2x - 6 = 0, \\ f_y = 10y + 10 = 0 \end{cases}$$

得 f 的稳定点 $P_0(3,-1)$,由于

$$f_{xx}(P_0) = 2, f_{xy}(P_0) = 0,$$

$$f_{yy}(P_0) = 10, (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(P_0) = 20.$$

因此 f 在点 P_0 取得极小值 $f(3,-1)=-8$. 又因 f 处处存在偏导数,故$(3,-1)$为 f 的惟一极值点. □

例 7 讨论 $f(x,y)=x^2+xy$ 是否存在极值.

解 由方程组 $f_x=2x+y=0, f_y=x=0$ 得稳定点为原点.

因 $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=-1<0$,故原点不是 f 的极值点. 又因 f 处处可微,所以 f 没有极值点. □

例 8 讨论 $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$在原点是否取得极值.

解 容易验证原点是 f 的稳定点,且在原点 $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0$,故由定理 17.11 无法判定 f 在原点是否取到极值. 但由于当 $x^2<y<2x^2$ 时 $f(x,y)<0$,而当 $y>2x^2$ 或 $y<x^2$ 时,$f(x,y)>0$(图 17-7),所以函数 f 不可能在原点取得极值. □

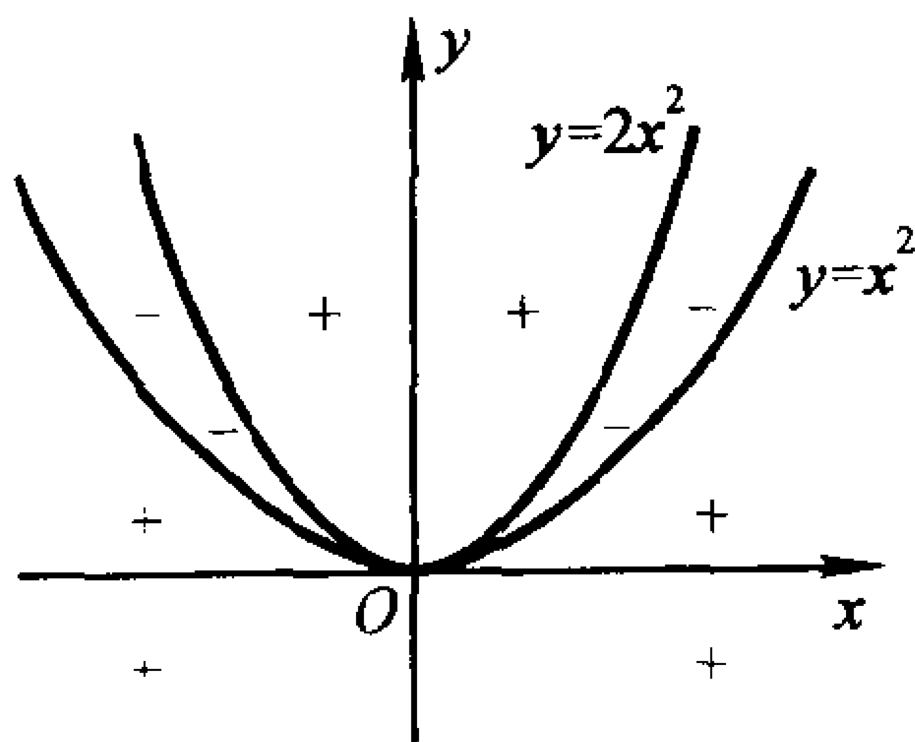


图 17-7

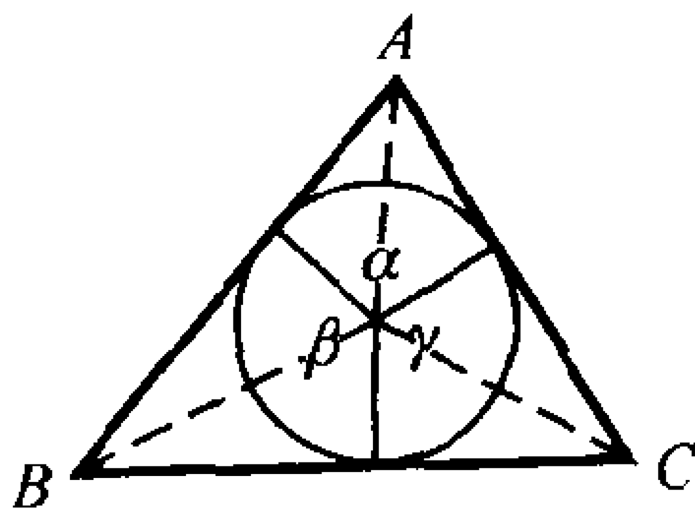


图 17-8

由极值的定义还知道,极值只是函数 f 在某一点的局部性概念. 要想获得函数 f 在区域 D 上的最大值和最小值(由上一章知道在有界闭区域上的连续函数一定能取得最大与最小值),与一元函数的问题一样,必须考察函数 f 在所有

稳定点、无偏导点以及属于区域的界点上的函数值①.

比较这些值,其中最大者(或最小者)即为函数 f 在 D 上的最大(小)值.

例 9 证明:圆的所有外切三角形中,以正三角形的面积为最小.

证 设圆的半径为 a. 任一外切三角形为 $\triangle ABC$,三切点处的半径两两相夹的中心角分别为 α,β,γ. 其中 $\gamma=2\pi-(\alpha+\beta)$(图 17-8). 容易得出 $\triangle ABC$ 的面积表达式为

$$\begin{aligned} S &= a^2\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\right) \\ &= a^2\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}-\tan\frac{\alpha+\beta}{2}\right). \end{aligned}$$

其中 $0<\alpha,\beta<\pi$. 为求得稳定点,令

$$\begin{cases} S_\alpha = \dfrac{1}{2}a^2\left(\sec^2\dfrac{\alpha}{2}-\sec^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=0, \\ S_\beta = \dfrac{1}{2}a^2\left(\sec^2\dfrac{\beta}{2}-\sec^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=0. \end{cases}$$

在定义域内上述关于 α,β 的方程组仅有惟一解:$\alpha=\beta=\dfrac{2}{3}\pi, r=2\pi-(\alpha+\beta)=\dfrac{2}{3}\pi$.

为了应用定理 17.11,求得在稳定点 $(\alpha,\beta)=\left(\dfrac{2}{3}\pi,\dfrac{2}{3}\pi\right)$ 处的二阶偏导数为

$$S_{\alpha\alpha}=4\sqrt{3}a^2, S_{\alpha\beta}=2\sqrt{3}a^2, S_{\beta\beta}=4\sqrt{3}a^2.$$

由于 $S_{\alpha\alpha}>0, S_{\alpha\alpha}S_{\beta\beta}-S_{\alpha\beta}^2=36a^4>0$,因此 S 在此稳定点上取得极小值.

因为面积函数 S 在定义域中处处存在偏导数,又因此时 $\alpha=\beta=\gamma$,而具体问题存在最小值,故外切三角形中以正三角形的面积为最小. □

例 10(最小二乘法问题) 设通过观测或实验得到一列点 $(x_i,y_i), i=1,2,\cdots,n$. 它们大体上在一条直线上,即大体上可用直线方程来反映变量 x 与 y 之间的对应关系(参见图 17-9). 现要确定一直线使得与这 n 个点的偏差平方和最小(最小二乘方).

解 设所求直线方程为

$$y=ax+b,$$

所测得的 n 个点为 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$. 现要确定 a,b,使得

$$f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$$

① 如果属于区域的界点成一曲线 $F(x,y)=0$,求函数 f 在此曲线上的最大(小)值一般要用下一章的条件极值方法去解决. 倘若该曲线有一显式方程 $y=\varphi(x)$,则上述问题归结为求一元函数 $g(x)=f(x,\varphi(x))$ 的极值.

为最小.为此,令

$$\begin{cases} f_a = 2\sum_{i=1}^{n} x_i(ax_i + b - y_i) = 0, \\ f_b = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 0, \end{cases}$$

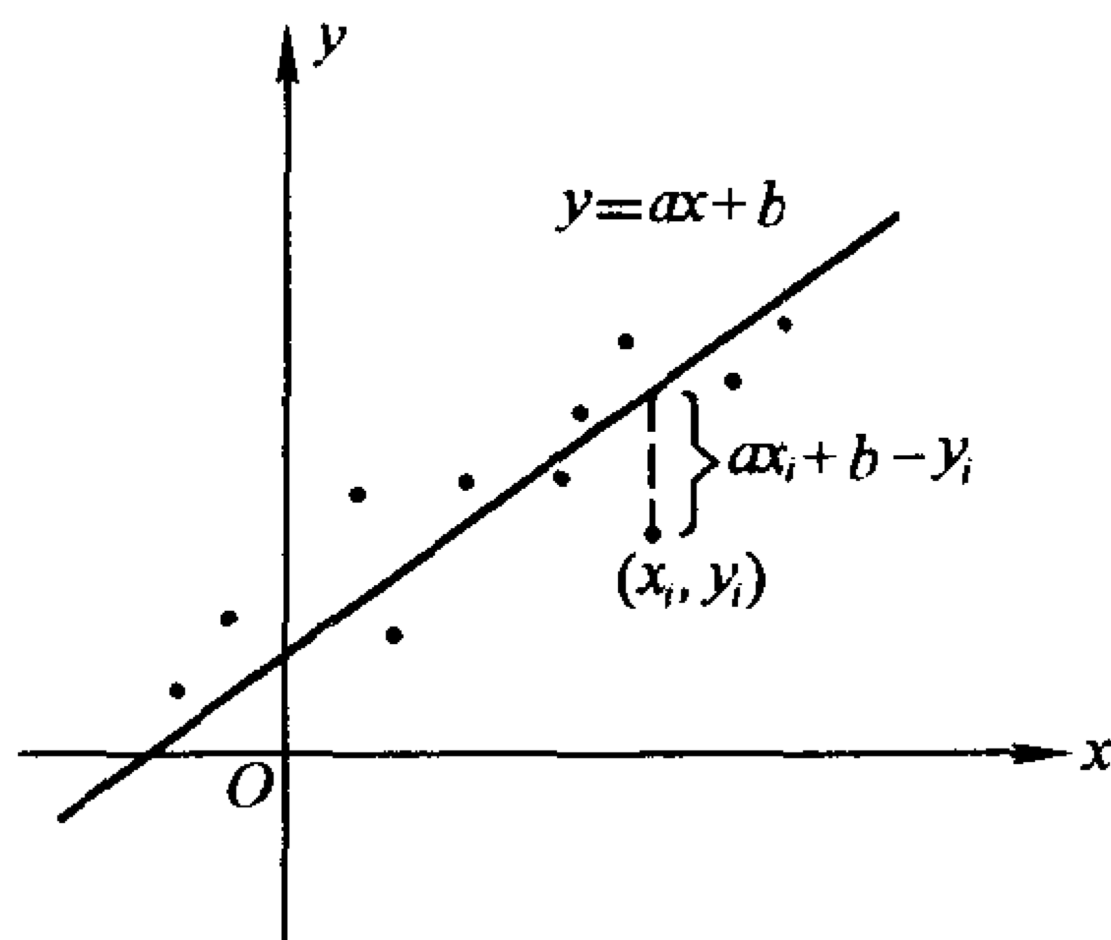


图 17-9

把这组关于 a,b 的线性方程加以整理,得

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

求此方程组的解,即得 $f(a,b)$的稳定点[①]

$$\bar{a} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2},$$

$$\bar{b} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

为进一步确定该点是极小值点,我们计算得

$$A = f_{aa} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0,$$

$$B = f_{ab} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$C = f_{bb} = 2n;$$

$$D = AC - B^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0,$$

从而根据定理 17.11,$f(a,b)$在点$(\bar{a},\bar{b})$取得极小值.由实际问题可知这极小值为最小值. □

习 题

1. 求下列函数的高阶偏导数:

---

① 当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不全相等时,可由数学归纳法证得 $n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0$.

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$,所有二阶偏导数;

(2) $z=\mathrm{e}^x(\cos y+x\sin y)$,所有二阶偏导数;

(3) $z=x\ln(x,y)$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y^2}$;

(4) $u=xyz\mathrm{e}^{x+y+z}$, $\dfrac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$;

(5) $z=f(xy^2,x^2y)$,所有二阶偏导数;

(6) $u=f(x^2+y^2+z^2)$,所有二阶偏导数;

(7) $z=f\left(x+y,xy,\dfrac{x}{y}\right)$, z_x, z_{xx}, z_{xy}.

2. 设 $u=f(x,y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,证明:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

3. 设 $u=f(r)$, $r^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$,证明:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}.$$

4. 设 $v=\dfrac{1}{r}g\left(t-\dfrac{r}{c}\right)$, c 为常数, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.证明:

$$v_{xx}+v_{yy}+v_{zz}=\frac{1}{c^2}v_{tt}.$$

5. 证明定理 17.8 的推论.

6. 通过对 $F(x,y)=\sin x\cos y$ 施用中值定理,证明对某 $\theta\in(0,1)$,有

$$\frac{3}{4}=\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi\theta}{3}\cos\frac{\pi\theta}{6}-\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi\theta}{3}\sin\frac{\pi\theta}{6}.$$

7. 求下列函数在指定点处的泰勒公式:

(1) $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$在点$(0,0)$(到二阶为止);

(2) $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$在点$(1,1)$(到三阶为止);

(3) $f(x,y)=\ln(1+x+y)$在点$(0,0)$;

(4) $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ 在点$(1,-2)$.

8. 求下列函数的极值点:

(1) $z=3axy-x^3-y^3(a>0)$;

(2) $z=x^2+5y^2-6x+10y+6$;

(3) $z=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$.

9. 求下列函数在指定范围内的最大值与最小值:

(1) $z=x^2-y^2$, $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$;

(2) $z=x^2-xy+y^2$, $\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$;

(3) $z=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$, $\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 2\pi\}$.

10. 在已知周长为 $2p$ 的一切三角形中,求出面积为最大的三角形.

11. 在 xy 平面上求一点,使它到三直线 $x=0$, $y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 的距离平方和最小.

12. 已知平面上 n 个点的坐标分别是

$$A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),\cdots,A_n(x_n,y_n),$$

试求一点,使它与这 n 个点距离的平方和最小.

---

13. 证明:函数 $u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$ (a,b 为常数)满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

14. 证明:函数 $u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$($a,b$ 为常数)满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

15. 证明:若函数 $u=f(x,y)$满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

则函数 $v=f\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$也满足此方程.

16. 设函数 $u=\varphi(x+\psi(y))$,证明

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

17. 设 f_x,f_y 和 f_{yx} 在点(x_0,y_0)的某邻域内存在,f_{yx} 在点(x_0,y_0)连续,证明 $f_{xy}(x_0,y_0)$ 也存在,且 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

18. 设 f_x,f_y 在点(x_0,y_0)的某邻域内存在且在点(x_0,y_0)可微,则有

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0).$$

19. 设

$$u=\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}.$$

求:(1) $u_x+u_y+u_z$;(2) $xu_x+yu_y+zu_z$;(3) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$.

20. 设 $f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx$,试按 h,k,l 的正数幂展开 $f(x+h,y+k,z+l)$.

总练习题

1. 设 $f(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2x$,证明

$$f_x+f_y+f_z=(x+y+z)^2.$$

2. 求函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点的偏导数 $f_x(0,0)$ 与 $f_y(0,0)$，并考察 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的可微性.

3. 设

$$u=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

证明：(1) $\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}=0$;　　(2) $\sum_{k=1}^{n}x_k\frac{\partial u}{\partial x_k}=\frac{n(n-1)}{2}u$.

4. 设函数 $f(x,y)$ 具有连续的 n 阶导数，试证函数 $g(t)=f(a+ht,b+kt)$ 的 n 阶导数

$$\frac{\mathrm{d}^n g(t)}{\mathrm{d}t^n}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+ht,b+kt).$$

5. 设

$$\varphi(x,y,z)=\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ d+z & e+x & f+y \\ g+y & h+z & h+x \end{vmatrix},$$

求 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$.

6. 设

$$\Phi(x,y,z)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(y) & g_2(y) & g_3(y) \\ h_1(z) & h_2(z) & h_3(z) \end{vmatrix},$$

求 $\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y\partial z}$.

7. 设函数 $u=f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上有 $u_{xy}=0$，试求 u 关于 x,y 的函数式.

8. 设 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，且在 P_0 给定了 n 个向量 $\boldsymbol{l}_i, i=1,2,\cdots,n$，相邻两个向量之间的夹角为 $\frac{2\pi}{n}$. 证明

$$\sum_{i=1}^{n}f_{l_i}(P_0)=0.$$

9. 设 $f(x,y)$ 为 n 次齐次函数，证明

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f=n(n-1)\cdots(n-m+1)f.$$

10. 对于函数 $f(x,y)=\sin\frac{y}{x}$，试证

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f=0.$$

第十八章　隐函数定理及其应用

§1　隐　函　数

一　隐函数概念

在这之前我们所接触的函数,其表达式大多是自变量的某个算式,如

$$y = x^2 + 1,\ u = \mathrm{e}^{xyz}(\sin xy + \sin yz + \sin zx).$$

这种形式的函数称为**显函数**.但在不少场合常会遇到另一种形式的函数,其自变量与因变量之间的对应法则是由一个方程式所确定.设 $X \subset \mathbf{R}, Y \subset \mathbf{R}$,函数 $F: X \times Y \to \mathbf{R}$.对于方程

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

若存在集合 $I \subset X$ 与 $J \subset Y$,使得对于任何 $x \in I$,恒有惟一确定的 $y \in J$,它与 x 一起满足方程(1),则称由方程(1)确定一个定义在 I 上,值域含于 J 的**隐函数**.若把它记为

$$y = f(x)^{①},\ x \in I,\ y \in J,$$

则成立恒等式

$$F(x, F(x)) \equiv 0,\ x \in I.$$

例如方程

$$xy + y - 1 = 0$$

能确定一个定义在 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ 上的隐函数 $y = f(x)$.如果从方程中把 y 解出,这个函数也可表示为显函数形式:

$$y = \frac{1}{1 + x}.$$

又如:圆方程 $x^2 + y^2 = 1$ 能确定一个定义在 $[-1, +1]$ 上,函数值不小于 0 的隐函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$;又能确定另一个定义在 $[-1, +1]$ 上,函数值不大于 0 的隐函数 $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

所以,隐函数必须在指出确定它的方程以及 x, y 的取值范围后才有意义.

---

① 这里只表示存在着定义在 I 上,值域在 J 内的函数 f,它并不意味着 y 能否用 x 的某一显式来表示.

当然在不产生误解的情况下，其取值范围也可不必一一指明. 此外，还需指出：

(i) 并不是任一方程都能确定出隐函数，如方程

$$x^2 + y^2 + c = 0.$$

当 $c>0$ 时，就不能确定任何函数 $f(x)$，使得

$$x^2 + [f(x)]^2 + c \equiv 0.$$

而只有当 $c\leqslant 0$ 时，才能确定隐函数. 因此，我们必须研究方程(1)在什么条件下才能确定隐函数.

(ii) 倘若方程(1)能确定隐函数，一般并不都像前面的一些例子那样，能从方程中解出 y，并用自变量 x 的算式来表示(即使 $F(x,y)$是初等函数). 例如，对于方程

$$y - x - \frac{1}{2}\sin y = 0.$$

确实存在一个定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数 $f(x)$，使得

$$f(x) - x + \frac{1}{2}\sin f(x) \equiv 0,$$

但这函数 $f(x)$却无法用 x 的算式来表达. 因此，在一般情况下，我们主要考虑方程(1)能否确定隐函数以及这个隐函数的连续性、可微性，而不管它是否能用显式表示.

二 隐函数存在性条件的分析

由于满足方程(1)的点集可看作曲面 $z=F(x,y)$与坐标平面 $z=0$ 的交集，所以方程(1)能确定一个函数，至少要求该交集非空，即存在点 $P_0(x_0,y_0)$，使 $F(x_0,y_0)=0$.

其次，方程(1)能在点 P_0 附近确定一个连续函数，表现为上述交集是一条通过点 P_0 的连续曲线段(图 18-1). 如果曲面 $z=F(x,y)$在点 P_0 处存在切平面，且切平面与坐标平面 $z=0$ 相交于直线 l，那么曲面 $z=F(x,y)$在点 P_0 附近亦必与坐标平面 $z=0$ 相交(其交线在点 P_0 处的切线正是 l). 为此，设 F 在点 P_0 可微，且

$$(F_x(P_0),F_y(P_0)) \neq (0,0), \quad (2)$$

则可使上述切平面存在，并满足与 $z=0$ 相交成直线的要求.

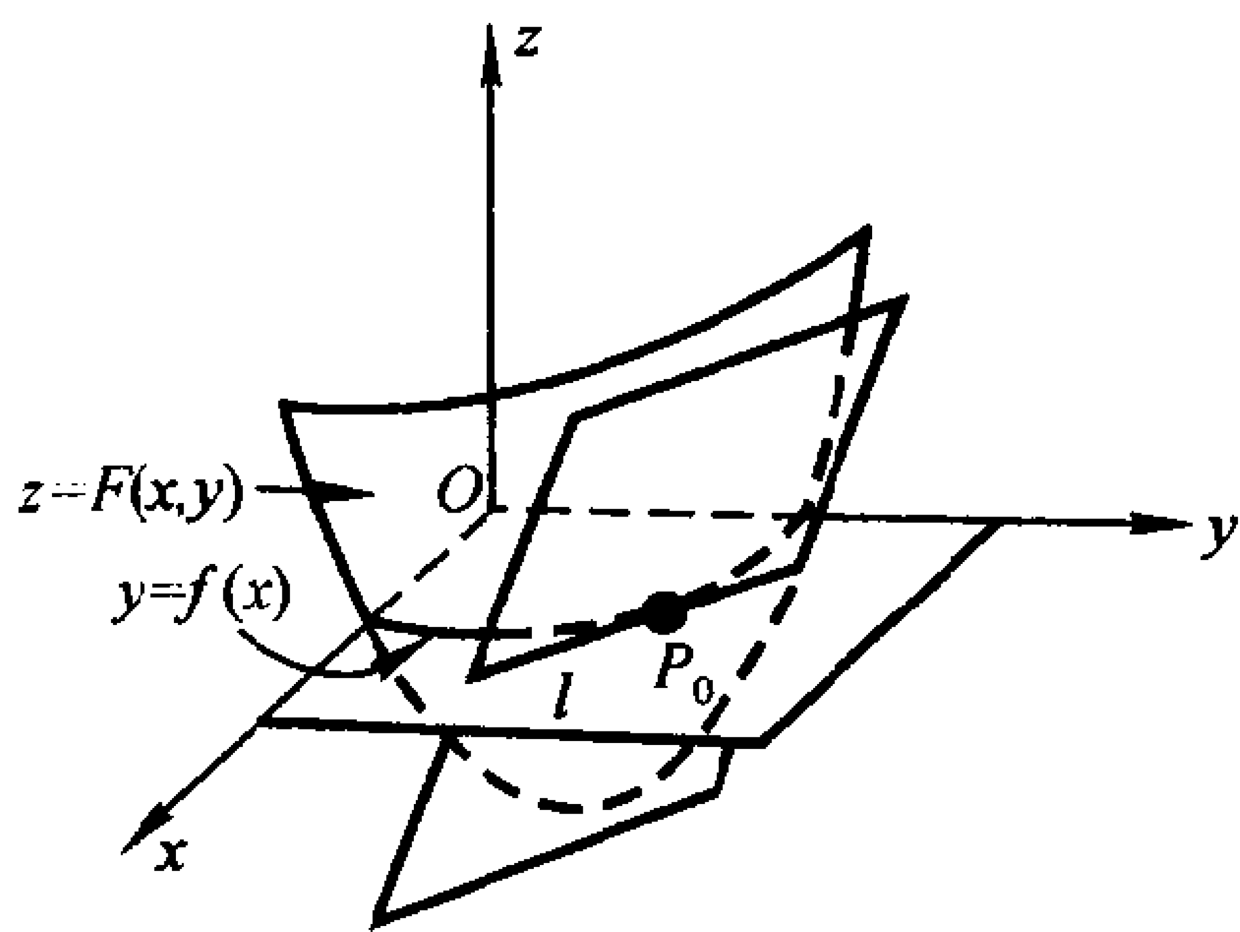


图 18-1

如果进一步要求上述隐函数 $y=f(x)$(或 $x=g(y)$)在点 P_0 可微，则在 F 为可微的假设下，通过方程(1)在点 P_0 处对 x 求导，依链式法则得到

$$F_x(P_0)+F_y(P_0)\cdot\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=0. \tag{3}$$

当 $F_y(P_0)\neq 0$ 时,可由(3)解出

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=-\frac{F_x(P_0)}{F_y(P_0)}. \tag{4}$$

类似地,当 $F_x(P_0)\neq 0$ 时,通过方程(1)对 y 求导后也可解出

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}=-\frac{F_y(P_0)}{F_x(P_0)}.$$

由此可见,条件(2)不仅对于隐函数的存在性,而且对于隐函数的求导同样是重要的.

三　隐函数定理

定理 18.1(隐函数存在惟一性定理)　若满足下列条件:

(i) 函数 F 在以 $P_0(x_0,y_0)$ 为内点的某一区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上连续;

(ii) $F(x_0,y_0)=0$(通常称为初始条件);

(iii) 在 D 内存在连续的偏导数 $F_y(x,y)$;

(iv) $F_y(x_0,y_0)\neq 0$,

则在点 P_0 的某邻域 $U(P_0)\subset D$ 内,方程 $F(x,y)=0$ 惟一地确定了一个定义在某区间 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 内的函数(隐函数) $y=f(x)$,使得

1° $f(x_0)=y_0$, $x\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 时 $(x,f(x))\in U(P_0)$ 且 $F(x,f(x))\equiv 0$;

2° $f(x)$ 在 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 内连续.

证　先证隐函数 f 的存在性与惟一性.

由条件(iv),不妨设 $F_y(x_0,y_0)>0$(若 $F_y(x_0,y_0)<0$,则可讨论 $-F(x,y)=0$).由条件(iii) F_y 在 D 内连续,由连续函数的局部保号性,存在点 P_0 的某一闭的方邻域 $[x_0-\beta,x_0+\beta]\times[y_0-\beta,y_0+\beta]\subset D$,使得在其上每一点处都有 $F_y(x,y)>0$.因而,对每个固定的 $x\in[x_0-\beta,x_0+\beta]$, $F(x,y)$ 作为 y 的一元函数,必定在 $[y_0-\beta,y_0+\beta]$ 上严格增且连续.由初始条件(ii)可知

$$F(x_0,y_0-\beta)<0,\ F(x_0,y_0+\beta)>0.$$

再由 F 的连续性条件(i),又可知道 $F(x,y_0-\beta)$ 与 $F(x,y_0+\beta)$ 在 $[x_0-\beta,x_0+\beta]$ 上也是连续的.因此由保号性存在 $\alpha>0(\alpha\leqslant\beta)$,当 $x\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 时恒有

$$F(x,y_0-\beta)<0,\ F(x,y_0+\beta)>0.$$

如图 18－2 所示，在矩形 $ABB'A'$ 的 AB 边上 F 取负值，在 $A'B'$ 边上 F 取正值. 因此对 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 内每个固定值 $\bar{x}$，同样有 $F(\bar{x},y_0-\beta)<0, F(\bar{x},y_0+\beta)>0$. 根据前已指出的 $F(\bar{x},y)$ 在 $[y_0-\beta,y_0+\beta]$ 上严格增且连续，由介值性保证存在惟一的 $\bar{y}\in(y_0-\beta,y_0+\beta)$，使得满足 $F(\bar{x},\bar{y})=0$. 由 $\bar{x}$ 在 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 中的任意性，这就确定了一个隐函数 $y=f(x)$，它的定义域为 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$，值域含于 $(y_0-\beta,y_0+\beta)$. 若记

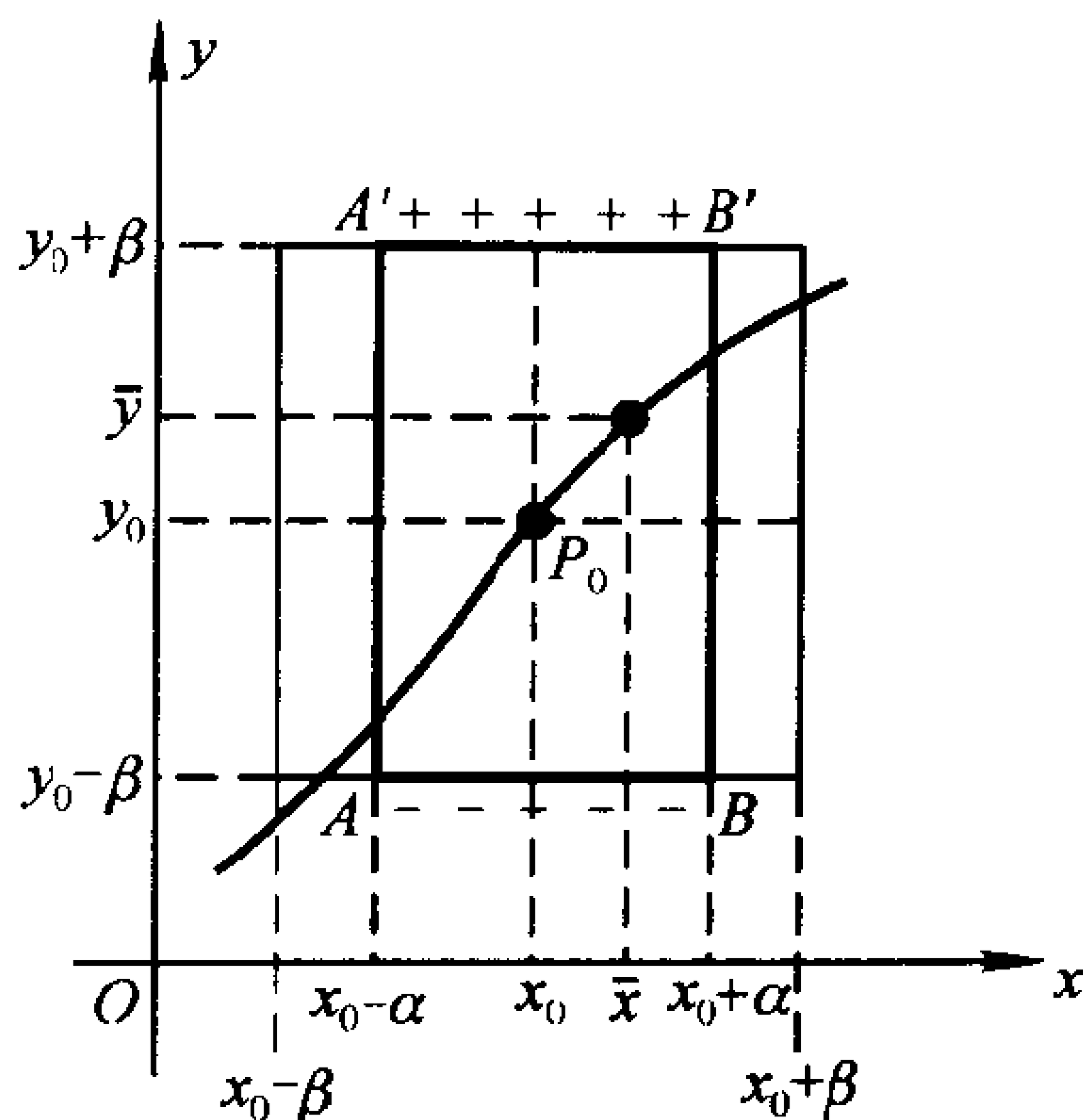


图 18－2

$$U(P_0)=(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\times(y_0-\beta,y_0+\beta),$$

则 $y=f(x)$ 满足结论 1°的各项要求.

再证明 f 的连续性.

对于 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 内的任意点 $\bar{x}$，$\bar{y}=f(\bar{x})$，则由上述结论可知 $y_0-\beta<\bar{y}<y_0+\beta$. 任给 $\varepsilon>0$，且设 $\varepsilon<\min\{y_0+\beta-\bar{y},\bar{y}-y_0+\beta\}$，使得

$$y_0-\beta\leqslant\bar{y}-\varepsilon<\bar{y}+\varepsilon\leqslant y_0+\beta.$$

从而 $F(\bar{x},\bar{y}-\varepsilon)<0, F(\bar{x},\bar{y}+\varepsilon)>0$. 由保号性存在 $\bar{x}$ 的某邻域 $(\bar{x}-\delta,\bar{x}+\delta)\subset(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$，使得当 x 属于该邻域时同样有

$$F(x,\bar{y}-\varepsilon)<0,\ F(x,\bar{y}+\varepsilon)>0.$$

因此存在惟一的 y，使得 $F(x,y)=0$，$|y-\bar{y}|<\varepsilon$. 由于 y 的惟一性，推知 $y=f(x)$. 这就证得：当 $|x-\bar{x}|<\delta$ 时 $|f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon$，即 $f(x)$ 在 $\bar{x}$ 连续. 由 $\bar{x}$ 的任意性，证得 $f(x)$ 在 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 内处处连续. □

注意 1. 定理18.1的条件仅仅是充分的. 例如方程 $y^3-x^3=0$，在点 $(0,0)$ 不满足条件(iv)($F_y(0,0)=0$)，但它仍能确定惟一的连续函数 $y=x$. 当然，由于条件(iv)不满足，往往导致定理结论的失效，例如图 18－3 所示的双纽线，其方程为

$$F(x,y)=(x^2+y^2)^2-x^2+y^2=0.$$

由于 $F(0,0)=0$，F 与 $F_y=4y(x^2+y^2)+2y$ 均连续，故满足定理条件(i)、(ii)、(iii). 但因 $F_y(0,0)=0$，致使在原点的无论怎样小的邻域内都不可能存在惟一的隐函数.

2. 在定理证明过程中，条件(iii)和(iv)只是用来保证存在 P_0 的某一邻域，在此邻域内 F 关于变量 y 是严格单调的. 因此对于本定理所要证明的结论来

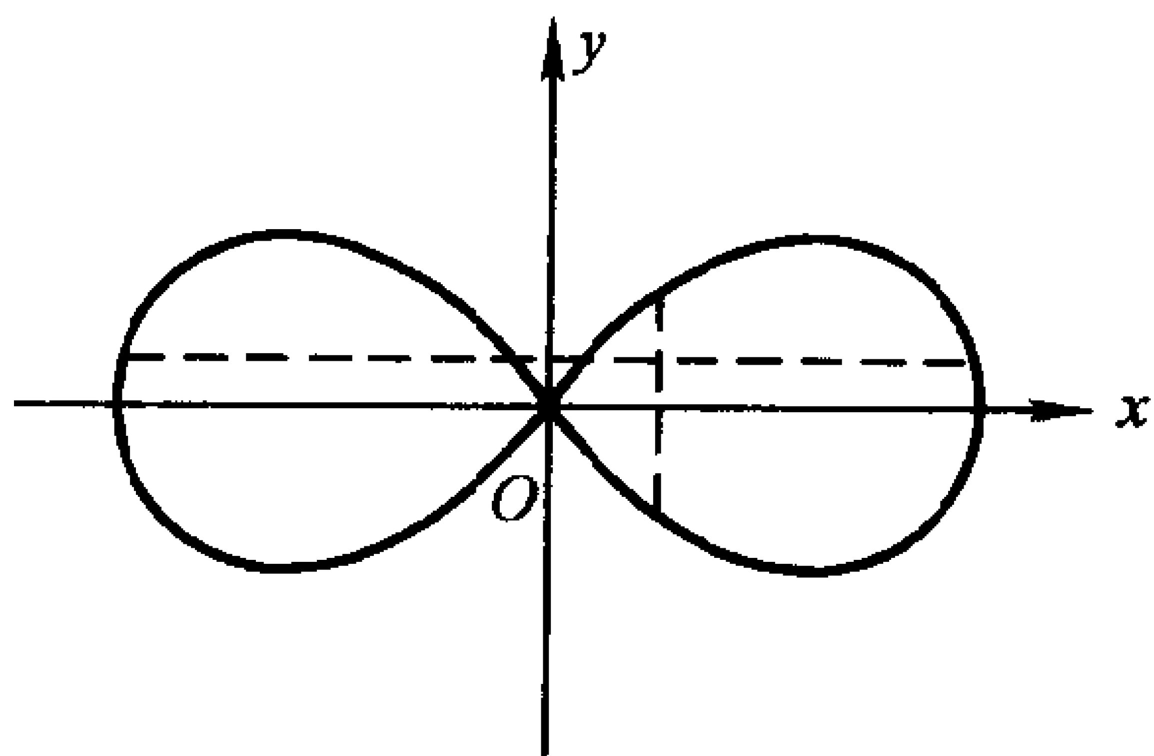


图 18-3

说,可以把这两个条件减弱为“F 在 P_0 的某一邻域内关于 y 严格单调”.现在采用较强的条件(iii)和(iv),只是为了在实际应用中便于检验.

3. 如果把定理的条件(iii)、(iv)改为 $F_x(x,y)$连续,且 $F_x(x_0,y_0)\neq 0$.这时结论是存在惟一的连续函数 $x=g(y)$.

定理 18.2(隐函数可微性定理)　设 $F(x,y)$满足隐函数存在惟一性定理中的条件(i)—(iv),又设在 D 内还存在连续的偏导数 $F_x(x,y)$,则由方程(1)所确定的隐函数 $y=f(x)$在其定义域$(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$内有连续导函数,且

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.\tag{5}$$

证　设 x 与 $x+\Delta x$ 都属于$(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$,它们所对应的函数值 $y=f(x)$与 $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$都含于$(y_0-\beta,y_0+\beta)$内.由于

$$F(x,y)=0,\ F(x+\Delta x,y+\Delta y)=0,$$

因此由 F_x、F_y 的连续性以及二元函数中值定理,有

$$\begin{aligned}0&=F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y)\\&=F_x(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y)\Delta x+F_y(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y)\Delta y,\end{aligned}$$

其中 $0<\theta<1$.因而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F_x(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y)}{F_y(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y)}.$$

注意到上式右端是连续函数 $F_x(x,y)$、$F_y(x,y)$与 $f(x)$的复合函数,而且 $F_y(x,y)$在 $U(P_0)$内不等于零,故有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

且 $f'(x)$在$(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$内连续.　□

像在第二段里我们所分析的那样,若已知方程(1)确实存在连续可微的隐函数,则可对方程(1)应用复合函数求导法得到隐函数的导数,因为把 $F(x,f(x))$看作 $F(x,y)$与 $y=f(x)$的复合函数时,有

$$F_x(x,y)+F_y(x,y)y'=0.\tag{6}$$

当 $F_y(x,y)\neq 0$ 时,由它可立刻推得与(5)相同的结果.

对于隐函数的高阶导数,可用和上面同样的方法来求得,这时只要假定函数 F 存在相应阶数的连续的高阶偏导数.例如,要计算 y'',只需对恒等式(6)继续

应用复合函数求导法则，便得

$$F_{xx}(x,y)+F_{xy}(x,y)y'+[F_{yx}(x,y)+F_{yy}(x,y)y']y'+F_y(x,y)y''=0.$$

再把(5)的结果代入上式，整理后得到

$$\begin{aligned} y''&=-\frac{1}{F_y}(F_{xx}+2F_{xy}y'+F_{yy}y'^2)\\ &=\frac{2F_xF_yF_{xy}-F_y^2F_{xx}-F_x^2F_{yy}}{F_y^3}, \end{aligned}$$

当然它也可由公式(5)直接对 x 求导数而得到.

最后，我们可以类似地理解由方程 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$ 所确定的 n 元隐函数的概念. 并叙述下列 n 元隐函数的惟一存在与连续可微性定理：

定理 18.3 若(i)函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)$ 在以点 $P_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y^0)$ 为内点的区域 $D\subset\mathbf{R}^{n+1}$ 上连续；

(ii) $F(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y^0)=0$;

(iii) 偏导数 $F_{x_1},F_{x_2},\cdots,F_{x_n},F_y$ 在 D 内存在且连续；

(iv) $F_y(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y^0)\neq0$,

则在点 P_0 的某邻域 $U(P_0)\subset D$ 内，方程 $F(x_1,\cdots,x_n,y)=0$ 惟一地确定了一个定义在 $Q_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 的某邻域 $U(Q_0)\subset\mathbf{R}^n$ 内的 n 元连续函数(隐函数) $y=f(x_1,\cdots,x_n)$，使得

1° 当 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in U(Q_0)$ 时

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n,f(x_1,x_2,\cdots,x_n))\in U(P_0),$$

且

$$F(x_1,\cdots,x_n,f(x_1,\cdots,x_n))\equiv0,$$

$$y^0=f(x_1^0,\cdots,x_n^0).$$

2° $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $U(Q_0)$ 内有连续偏导数：$f_{x_1},f_{x_2},\cdots,f_{x_n}$，而且

$$f_{x_1}=-\frac{F_{x_1}}{F_y},\ f_{x_2}=-\frac{F_{x_2}}{F_y},\cdots,\ f_{x_n}=-\frac{F_{x_n}}{F_y}.$$

四 隐函数求导举例

例 1 设方程

$$F(x,y)=y-x-\frac{1}{2}\sin y=0. \tag{7}$$

由于 F 及其偏导数 F_x,F_y 在平面上任一点都连续，且

$$F(0,0)=0,$$

$$F_y(x,y)=1-\frac{1}{2}\cos y>0.$$

故依定理 18.1 和 18.2,方程(7)确定了一个连续可导隐函数 $y=f(x)$,按公式(5),其导数为

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos y}=\frac{2}{2-\cos y}.$$

□

例 2　讨论笛卡儿(Descartes)叶形线(图 18-4)

$$x^3+y^3-3axy=0 \tag{8}$$

所确定的隐函数 $y=f(x)$的一阶与二阶导数.

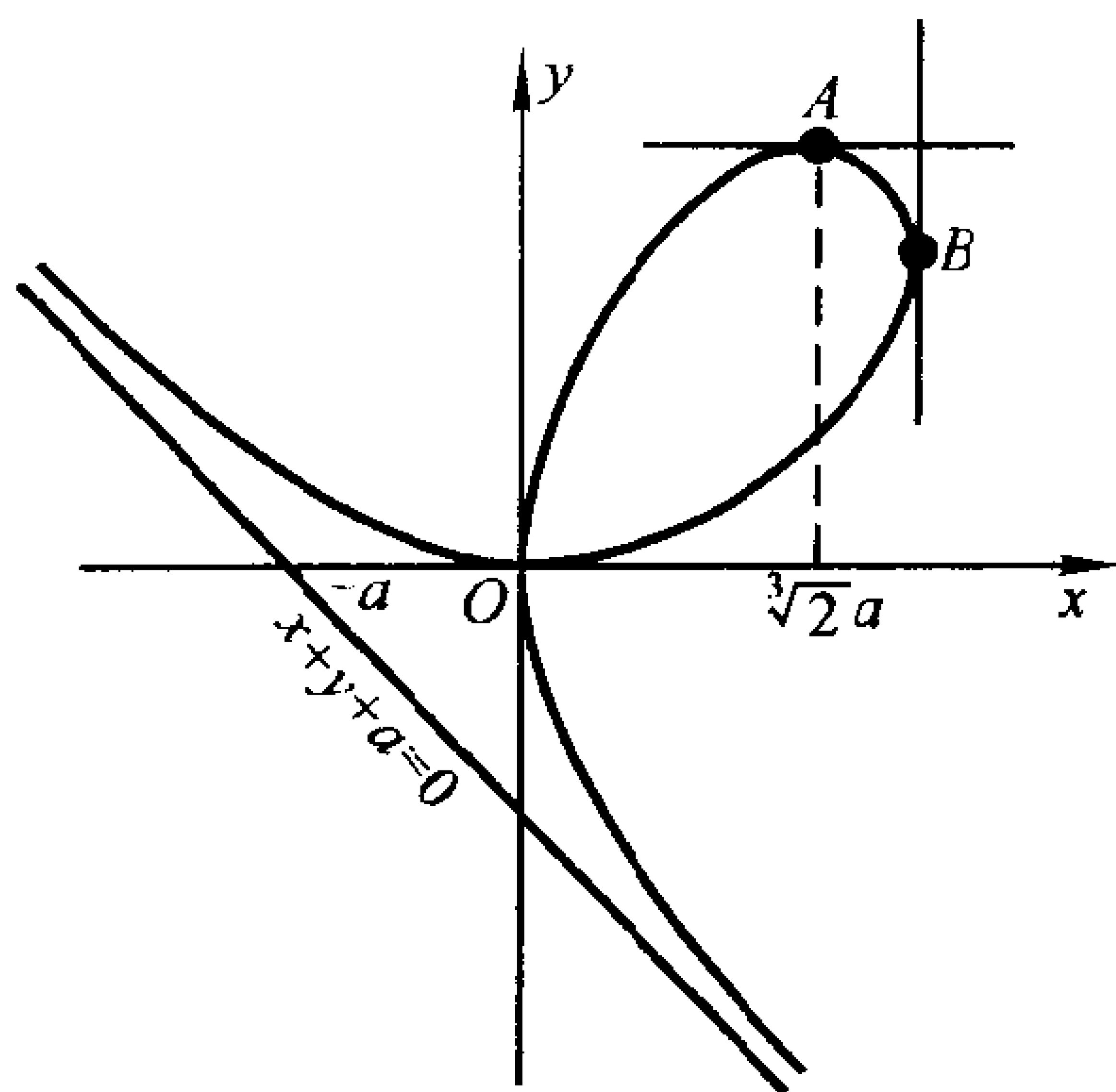


图 18-4

解　由隐函数定理知道,在使得

$$F_y(x,y)=3(y^2-ax)\neq 0$$

的点(x,y)附近,方程(8)都能确定隐函数 $y=f(x)$,现求它的一阶与二阶导数如下:

对(8)式求关于 x 的导数(其中 y 是 x 的函数)并以 3 除之,得

$$x^2+y^2y'-ay-axy'=0$$

或

$$(x^2-ay)+(y^2-ax)y'=0. \tag{9}$$

于是

$$y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}\quad (y^2-ax\neq 0). \tag{10}$$

再对(9)式求导,得

$$2x-ay'+(2yy'-a)y'+(y^2-ax)y''=0,$$

$$y''(y^2-ax)=2ay'-2yy'^2-2x. \tag{11}$$

把(10)式代入(11)式的右边,得

$$2ay'-2yy'^2-2x=\frac{-2a^3xy-2xy(x^3+y^3-3axy)}{(y^2-ax)^2}.$$

再利用方程(8)就得到

$$y''=-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}. \tag{12}$$

由(10)式易见,曲线在点 $A(\sqrt[3]{2}a,\sqrt[3]{4}a)$处有一水平切线,在点 $B(\sqrt[3]{4}a,\sqrt[3]{2}a)$处有一垂直切线.

□

注意　由于在点B和原点处的任何邻域内,每一个x所对应的y值不惟一,所以方程(8)不能在那两点的邻域内确定惟一的隐函数.

例 3　讨论方程

$$F(x,y,z)=xyz^3+x^2+y^3-z=0 \tag{13}$$

在原点附近所确定的二元隐函数及其偏导数.

解 由于 $F(0,0,0)=0, F_z(0,0,0)=-1\neq 0, F, F_x, F_y, F_z$ 处处连续,根据隐函数定理 18.3,在原点 $(0,0,0)$ 附近能惟一确定连续可微的隐函数 $z=f(x,y)$,且可求得它的偏导数如下:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz^3+2x}{1-3xyz^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz^3+3y^2}{1-3xyz^2}.$$ □

例 4(反函数的存在性与其导数) 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有连续的导函数 $f'(x)$,且 $f(x_0)=y_0$,考虑方程

$$F(x,y)=y-f(x)=0. \tag{14}$$

由于

$$F(x_0,y_0)=0,\ F_y=1,\ F_x(x_0,y_0)=-f'(x_0),$$

所以只要 $f'(x_0)\neq 0$,就能满足隐函数定理的所有条件,这时方程(14)能确定出在 y_0 的某邻域 $U(y_0)$ 内的连续可微隐函数 $x=g(y)$,并称它为函数 $y=f(x)$ 的反函数.反函数的导数是

$$g'(y)=-\frac{F_y}{F_x}=-\frac{1}{-f'(x)}=\frac{1}{f'(x)}. \tag{15}$$

事实上,这就是在第五章里曾经得到过的反函数求导公式. □

习 题

1. 方程 $\cos x+\sin y=e^{xy}$ 能否在原点的某邻域内确定隐函数 $y=f(x)$ 或 $x=g(y)$?

2. 方程 $xy+z\ln y+e^{xz}=1$ 在点 $(0,1,1)$ 的某邻域内能否确定出某一个变量为另外两个变量的函数?

3. 求由下列方程所确定的隐函数的导数:

(1) $x^2y+3x^4y^3-4=0$,求 $\frac{dy}{dx}$;

(2) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$,求 $\frac{dy}{dx}$;

(3) $e^{-xy}-2z+e^z=0$,求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$;

(4) $a+\sqrt{a^2-y^2}=ye^u, u=\frac{x+\sqrt{a^2-y^2}}{a}\ (a>0)$,求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$;

(5) $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-5=0$,求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$;

(6) $z=f(x+y+z,xyz)$,求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial x}{\partial y},\frac{\partial y}{\partial z}$.

4. 设 $z=x^2+y^2$，其中 $y=f(x)$ 为由方程 $x^2-xy+y^2=1$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 及 $\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$.

5. 设 $u=x^2+y^2+z^2$，其中 $z=f(x,y)$ 是由方程 $x^3+y^3+z^3=3xyz$ 所确定的隐函数，求 u_x 及 u_{xx}.

---

6. 求由下列方程所确定的隐函数的偏导数：

(1) $x+y+z=\mathrm{e}^{-(x+y+z)}$，求 z 对于 x,y 的一阶与二阶偏导数；

(2) $F(x,x+y,x+y+z)=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

7. 证明：设方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，则当 $F_y\neq 0$ 时，有

$$F_y^3 y''=\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}.$$

8. 设 f 是一元函数，试问应对 f 提出什么条件，方程

$$2f(xy)=f(x)+f(y)$$

在点(1,1)的邻域内就能确定出惟一的 y 为 x 的函数？

§2 隐函数组

一 隐函数组概念

前一节讨论的是由一个方程所确定的隐函数，本节将讨论由方程组所确定的隐函数组.

设 $F(x,y,u,v)$ 和 $G(x,y,u,v)$ 为定义在区域 $V\subset\mathbf{R}^4$ 上的两个四元函数.若存在平面区域 D，对于 D 中每一点 (x,y)，分别有区间 J 和 K 上惟一的一对值 $u\in J,v\in K$，它们与 x,y 一起满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0, \end{cases} \tag{1}$$

则说方程组(1)确定了两个定义在 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上，值域分别落在 J 和 K 内的函数.我们称这两个函数为由方程组(1)所确定的**隐函数组**.若分别记这两个函数为 $u=f(x,y)$、$v=g(x,y)$，则在 D 上成立恒等式

$$F(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0,$$
$$G(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0.$$

关于隐函数组的一般情况（含有 $m+n$ 个变量的 m 个方程所确定的 m 个隐函数）将在第二十三章里用向量形式作进一步讨论.

二 隐函数组定理

为了探索由方程组(1)确定隐函数组所需要的条件，不妨假设(1)中的函数

F 与 G 是可微的,而且由(1)所确定的两个隐函数 u 与 v 也是可微的.那么通过对方程组(1)关于 x,y 分别求偏导数,得到

$$\begin{cases}F_x+F_uu_x+F_vv_x=0,\\G_x+G_uu_x+G_vv_x=0,\end{cases}\tag{2}$$

$$\begin{cases}F_y+F_uu_y+F_vv_y=0,\\G_y+G_uu_y+G_vv_y=0.\end{cases}\tag{3}$$

要想从(2)解出 u_x 与 v_x,从(3)解出 u_y 与 v_y,其充分条件是它们的系数行列式不为零,即

$$\begin{vmatrix}F_u & F_v\\G_u & G_v\end{vmatrix}\neq 0.\tag{4}$$

(4)式左边的行列式称为函数 F、G 关于变量 u,v 的**函数行列式**(或**雅可比(Jacobi)行列式**),亦可记作$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$.条件(4)在隐函数组定理中所起的作用,与定理 18.1 中的条件(iv)相当.

定理 18.4(隐函数组定理) 若

(i) $F(x,y,u,v)$与 $G(x,y,u,v)$在以点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$为内点的区域 $V\subset\mathbf{R}^4$ 内连续;

(ii) $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0,G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$(初始条件);

(iii) 在 V 内 F,G 具有一阶连续偏导数;

(iv) $J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$在点 P_0 不等于零,

则在点 P_0 的某一(四维空间)邻域 $U(P_0)\subset V$ 内,方程组(1)惟一地确定了定义在点 $Q_0(x_0,y_0)$的某一(二维空间)邻域 $U(Q_0)$内的两个二元隐函数

$$u=f(x,y),\ v=g(x,y),$$

使得

1° $u_0=f(x_0,y_0),v_0=g(x_0,y_0)$且当$(x,y)\in U(Q_0)$时

$$(x,y,f(x,y),g(x,y))\in U(P_0),$$

$$F(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0,$$

$$G(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0;$$

2° $f(x,y),g(x,y)$在 $U(Q_0)$内连续;

3° $f(x,y),g(x,y)$在 $U(Q_0)$内有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)},\tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},\ \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.$$

本定理的证明这里从略,有兴趣的读者可参阅第二十三章里的一般隐函数组定理及其证明.

注意 在定理 18.4 中,若将条件(iv)改为$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}\right|_{P_0}\neq 0$,则方程(1)所确定的隐函数组相应是 $y=y(u,x)$, $v=v(u,x)$;其他情形均可类似推得.总之,由方程组定义隐函数组及隐函数组求导时,应先明确哪些变量是自变量,哪些变量是因变量,然后再进行有关的运算和讨论.

例 1 讨论方程组

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=u^2+v^2-x^2-y=0,\\ G(x,y,u,v)=-u+v-xy+1=0\end{cases}\tag{6}$$

在点 $P_0(2,1,1.2)$近旁能确定怎样的隐函数组,并求其偏导数.

解 首先,$F(P_0)=G(P_0)=0$,即 P_0 满足初始条件.再求出 F,G 的所有一阶偏导数

$$F_x=-2x,\ F_y=-1,\ F_u=2u,F_v=2v,$$

$$G_x=-y,\ G_y=-x,\ G_u=-1,\ G_v=1.$$

容易验算,在点 P_0 处的所有六个雅可比行列式中只有

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=0.$$

因此,只有 x,v 难以肯定能否作为以 y,u 为自变量的隐函数.除此之外,在 P_0 的近旁任何两个变量都可作为以其余两个变量为自变量的隐函数.

如果我们想求得 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$的偏导数,只需对方程组(6)分别关于 u,v 求偏导数,得到

$$\begin{cases}2u-2xx_u-y_u=0,\\ -1-yx_u-xy_u=0,\end{cases}\tag{7}$$

$$\begin{cases}2v-2xx_v-y_v=0,\\ 1-xy_v-yx_v=0.\end{cases}\tag{8}$$

由(7)解出

$$x_u=\frac{2xu+1}{2x^2-y},\ y_u=-\frac{2x+2yu}{2x^2-y}.$$

由(8)解出

$$x_v=\frac{2xv-1}{2x^2-y},\ y_v=\frac{2x-2yv}{2x^2-y}.$$ □

三 反函数组与坐标变换

在§1 例 4 中,我们通过隐函数定理讨论了一元函数反函数存在的(充分)

条件.现在讨论由二元函数组所确定的反函数组及其存在的(充分)条件.

设函数组

$$u = u(x,y),\ v = v(x,y) \tag{9}$$

是定义在 xy 平面点集 $B \subset \mathbf{R}^2$ 上的两个函数,对每一点 $P(x,y) \in B$,由方程组(9)有 uv 平面上惟一的一点 $Q(u,v) \in \mathbf{R}^2$ 与之对应.我们称方程组(9)确定了 B 到 $\mathbf{R}^2$ 的一个**映射(变换)**,记作 T.这时映射(9)可写成如下函数形式

$$T:\ B \to \mathbf{R}^2,$$

$$P(x,y) \mapsto Q(u,v)$$

或写成点函数形式 $Q = T(P), P \in B$,并称 $Q(u,v)$为映射 T 下 $P(x,y)$的**象**,而 P 则是 Q 的**原象**.记 B 在映射 T 下的**象集**为 $B' = T(B)$.

反过来,若 T 为**一一映射**(即不仅每一原象只对应一个象,而且不同的原象对应不同的象).这时每一点 $Q \in B'$,由方程组(9)都有惟一的一点 $P \in B$ 与之相对应.由此所产生的新映射称为映射 T 的**逆映射(逆变换)**,记作 T^{-1},即

$$T^{-1}:\ B' \to B,$$

$$Q \mapsto P$$

或

$$P = T^{-1}(Q), Q \in B'.$$

亦即存在定义在 B'上的一个函数组

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v), \tag{10}$$

把它代入(9)而成为恒等式:

$$u \equiv u(x(u,v),y(u,v)),\ v \equiv v(x(u,v),y(u,v)), \tag{11}$$

这时我们又称函数组(10)是函数组(9)的**反函数组**.

关于反函数组的存在性问题,其实是隐函数组存在性问题的一种特殊情形.这只需把方程组(9)改写成

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = u - u(x,y) = 0, \\ G(x,y,u,v) = v - v(x,y) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

并将定理 18.4 应用于(12),便可得到函数组(9)在某个局部范围内存在反函数组(10)的下述定理.

定理 18.5(反函数组定理) 设函数组(9)及其一阶偏导数在某区域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上连续,点 $P_0(x_0,y_0)$是 D 的内点,且

$$u_0 = u(x_0,y_0), v_0 = v(x_0,y_0), \left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0} \neq 0,$$

则在点 $P_0'(u_0,v_0)$的某一邻域 $U(P_0')$内存在惟一的一组反函数(10),使得 $x_0 = x(u_0,v_0), y_0 = y(u_0,v_0)$,且当$(u,v) \in U(P_0')$时,有

$$(x(u,v),y(u,v)) \in U(P_0)$$

以及恒等式(11).此外,反函数组(10)在 $U(P_0')$ 内存在连续的一阶偏导数,且

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial v}{\partial y}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial u}{\partial y}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial u}{\partial x}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}. \tag{13}$$

由(13)看到:互为反函数组的(9)与(10),它们的雅可比行列式互为倒数,即

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1.$$

这与(一元)反函数求导公式(§1 中(15)式)相类似.

例 2　平面上的点 P 的直角坐标 (x,y) 与极坐标 (r,θ) 之间的坐标变换公式为

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta. \tag{14}$$

由于

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r,$$

所以除原点外,在一切点上由函数组(14)所确定的反函数组是

$$r=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\theta=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,\\[2ex] \arctan\dfrac{y}{x}, & x<0.\end{cases}$$ □

对于函数组

$$x=x(u,v,w),\ y=y(u,v,w),\ z=z(u,v,w),$$

在相应于定理 18.5 的条件下所确定出的反函数组为

$$u=u(x,y,z),\ v=v(x,y,z),\ w=w(x,y,z),$$

它们是三维空间中直角坐标与曲面坐标之间的坐标变换.

例 3　直角坐标 (x,y,z) 与球坐标 (r,θ,φ) 之间的变换公式为

$$\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi,\\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\\ z=r\cos\theta.\end{cases} \tag{15}$$

由于

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{vmatrix}$$

$$=r^2\sin\theta,$$

所以在 $r^2\sin\theta\neq0$ 即除去 z 轴上的一切点,由方程组(15)可确定出 r,φ,θ 为 $x,y,z(z>0)$ 的函数,即

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \varphi = \arctan \frac{y}{x},\ \theta = \arccos \frac{z}{r}.$$ □

例 4 设 φ 为二元可微函数.对于函数组 $u = x + at, v = x - at$,试把弦振动方程

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (a > 0)$$

变换成以 u, v 为自变量的形式.

解 首先有 $u_x = v_x = 1, u_t = -v_t = a$,从而$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,t)} = -2a \neq 0$,因此所设变换存在逆变换,而且又有

$$du = u_x dx + u_t dt = dx + a dt,\ dv = dx - a dt.$$

于是按微分形式不变性,得到

$$d\varphi = \varphi_u du + \varphi_v dv = (\varphi_u + \varphi_v) dx + a(\varphi_u - \varphi_v) dt,$$

并由此推知

$$\varphi_x = \varphi_u + \varphi_v,\ \varphi_t = a(\varphi_u - \varphi_v).$$

按此继续求以 u, v 为自变量的 φ_{xx} 与 φ_{tt} 如下:

$$\begin{aligned}\varphi_{xx} &= \frac{\partial}{\partial u}(\varphi_u + \varphi_v) u_x + \frac{\partial}{\partial v}(\varphi_u + \varphi_v) v_x \\ &= \varphi_{uu} + \varphi_{vu} + \varphi_{uv} + \varphi_{vv} = \varphi_{uu} + 2\varphi_{uv} + \varphi_{vv}, \\ \varphi_{tt} &= a \frac{\partial}{\partial u}(\varphi_u - \varphi_v) u_t + \frac{\partial}{\partial v}(\varphi_u - \varphi_v) v_t \\ &= a^2(\varphi_{uu} - 2\varphi_{uv} + \varphi_{vv}).\end{aligned}$$

借助这些结果就得到

$$a^2 \varphi_{xx} - \varphi_{tt} = 4a^2 \varphi_{uv} = 0,$$

即把原来以 x, t 作为自变量的弦振动方程变换成以 u, v 作为新自变量的方程为

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = 0.$$

而且进一步容易求得此方程的解的形式为

$$\varphi = f(u) + g(v) = f(x + at) + g(x - at)$$

(参见第十七章总练习题 7). □

习　　题

1. 试讨论方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{z^2}{2}, \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

在点$(1, -1, 2)$的附近能否确定形如 $x = f(z), y = g(z)$的隐函数组?

2. 求下列方程组所确定的隐函数组的导数:

(1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 = ax, \end{cases}$ 求$\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$;

(2) $\begin{cases} x-u^2-yv=0, \\ y-v^2-xu=0, \end{cases}$ 求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}$;

(3) $\begin{cases} u=f(ux,v+y), \\ v=g(u-x,v^2y), \end{cases}$ 求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

3. 求下列函数组所确定的反函数组的偏导数:

(1) $\begin{cases} x=\mathrm{e}^u+u\sin v, \\ y=\mathrm{e}^u-u\cos v, \end{cases}$ 求 u_x,v_x,u_y,v_y;

(2) $\begin{cases} x=u+v, \\ y=u^2+v^2, \\ z=u^3+v^3, \end{cases}$ 求 z_x.

4. 设函数 $z=z(x,y)$是由方程组

$$x=\mathrm{e}^{u+v},\ y=\mathrm{e}^{u-v},\ z=uv$$

(u,v 为参量)所定义的函数,求当 $u=0,v=0$ 时的 $\mathrm{d}z$.

5. 设以 u,v 为新的自变量变换下列方程:

(1) $(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$,设 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2},v=\arctan\dfrac{y}{x}$;

(2) $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$,设 $u=xy,v=\dfrac{x}{y}$.

6. 设函数 $u=u(x,y)$由方程组

$$u=f(x,y,z,t),\ g(y,z,t)=0,\ h(z,t)=0$$

所确定,求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$和$\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

---

7. 设 $u=u(x,y,z),v=v(x,y,z)$和 $x=x(s,t),y=y(s,t),z=z(s,t)$都有连续的一阶偏导数,证明

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}\frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}\frac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)}.$$

8. 设 $u=\dfrac{y}{\tan x},v=\dfrac{y}{\sin x}$. 证明:当$0<x<\dfrac{\pi}{2},y>0$时,$u,v$ 可以用来作为曲线坐标;解出 x,y 作为 u,v 的函数;画出 xy 平面上 $u=1,v=2$ 所对应的坐标曲线;计算$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$和$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$并验证它们互为倒数.

9. 将以下式中的(x,y,z)变换成球面坐标(r,θ,φ)的形式:

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

10. 设 $u=\dfrac{x}{r^2},v=\dfrac{y}{r^2},w=\dfrac{z}{r^2}$,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(1) 试求以 u,v,w 为自变量的反函数组;

(2) 计算 $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$.

§3 几何应用

在本节中所讨论的曲线和曲面，由于它们的方程是以隐函数(组)的形式出现的，因此在求它们的切线(或切平面)时都要用到隐函数(组)的微分法.

一 平面曲线的切线与法线

设平面曲线由方程

$$F(x,y)=0 \tag{1}$$

给出，它在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内满足隐函数定理条件，于是在 P_0 附近所确定的连续可微隐函数 $y=f(x)$(或 $x=g(y)$)和方程(1)在 P_0 附近表示同一曲线，从而该曲线在点 P_0 处存在切线和法线，其方程分别为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0) \quad (\text{或 } x-x_0=g'(y_0)(y-y_0))$$

与

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \quad \left(\text{或 } x-x_0=-\frac{1}{g'(y_0)}(y-y_0)\right).$$

由于

$$f'(x)=-\frac{F_x}{F_y} \quad \left(\text{或 } g'(y)=-\frac{F_y}{F_x}\right),$$

所以曲线(1)在点 P_0 处的切线与法线方程为

$$\text{切线:}\quad F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0, \tag{2}$$

$$\text{法线:}\quad F_y(x_0,y_0)(x-x_0)-F_x(x_0,y_0)(y-y_0)=0. \tag{3}$$

例 1 求笛卡儿叶形线(参见§1 例 2)

$$2(x^3+y^3)-9xy=0$$

在点(2,1)处的切线与法线.

解 设 $F(x,y)=2(x^3+y^3)-9xy$，于是 $F_x=6x^2-9y$，$F_y=6y^2-9x$ 在全平面连续，且 $F_x(2,1)=15\neq 0$，$F_y(2,1)=-12\neq 0$. 因此，由公式(2)与(3)分别求得曲线在点(2,1)的切线方程与法线方程分别为

$$15(x-2)-12(y-1)=0 \quad \text{即} \quad 5x-4y-6=0,$$

$$-12(x-2)-15(y-1)=0 \quad \text{即} \quad 4x+5y-13=0. \qquad \square$$

二 空间曲线的切线与法平面

下面我们讨论由参数方程

$$L:\ x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta \tag{4}$$

表示的空间曲线 L 上某一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线和法线方程，这里 $x_0=$

$x(t_0), y_0=y(t_0), z_0=z(t_0), \alpha\leqslant t_0\leqslant\beta$，并假定(4)式中的三个函数在 t_0 处可导，且

$$[x'(t_0)]^2+[y'(t_0)]^2+[z'(t_0)]^2\neq 0.$$

在曲线 L 上点 P_0 附近选取一点 $P(x,y,z)=P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$，于是连接 L 上的点 P_0 与 P 的割线方程为

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z},$$

其中 $\Delta x=x(t_0+\Delta t)-x(t_0), \Delta y=y(t_0+\Delta t)-y(t_0), \Delta z=z(t_0+\Delta t)-z(t_0)$. 以 Δt 除上式各分母，得

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，$P\to P_0$，且

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}\to x'(t_0),\ \frac{\Delta y}{\Delta t}\to y'(t_0),\ \frac{\Delta z}{\Delta t}\to z'(t_0),$$

即得曲线 L 在 P_0 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}. \tag{5}$$

由此可见，当 $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$ 不全为零时，它们是该切线的方向数.

过点 P_0 可以作无穷多条直线与切线 l 垂直，所有这些直线都在同一平面上，称这平面为曲线 L 在点 P_0 处的**法平面**(图 18-5 中的平面 n). 它通过点 P_0，且以 L 在 P_0 的切线 l 为它的法线，所以法平面 n 的方程为

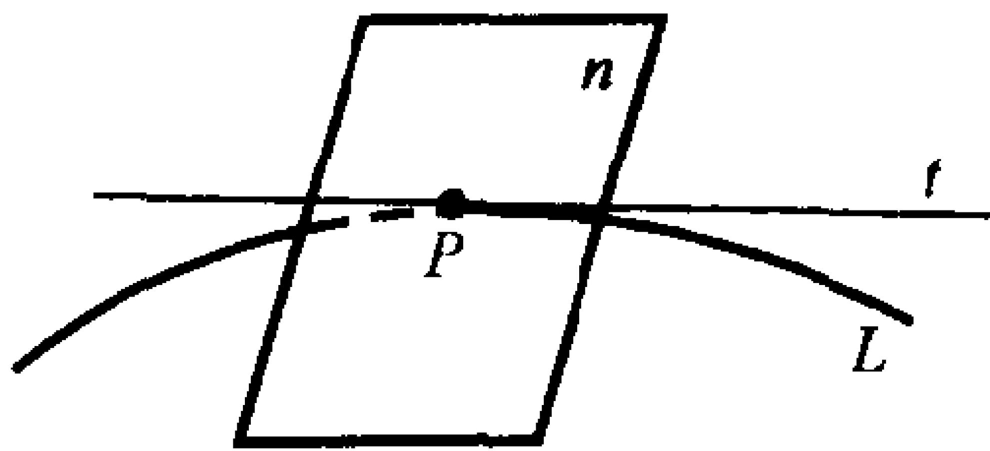


图 18-5

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0. \tag{6}$$

当空间曲线 L 由方程组

$$L:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0\end{cases} \tag{7}$$

给出时，若它在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内满足隐函数组定理的条件(这里不妨设条件(iv)是 $\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}\neq 0$)，则方程组(7)在点 P_0 附近能确定惟一连续可微的隐函数组

$$x=\varphi(z),\ y=\psi(z), \tag{8}$$

使得 $x_0=\varphi(z_0), y_0=\psi(z_0)$，且

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}.$$

由于在点 P_0 附近方程组(7)与函数组(8)表示同一空间曲线,因此以 z 为参量时,就得到点 P_0 附近曲线 L 的参量方程:

$$x=\varphi(z),\ y=\psi(z)\ z=z.$$

于是由(5)式曲线在 P_0 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right|_{P_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right|_{P_0}}=\frac{z-z_0}{1},$$

即

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}}=\frac{z-z_0}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}. \tag{9}$$

按(6)式曲线在 P_0 处的法平面方程为

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0}(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}(z-z_0)=0. \tag{10}$$

同样可推出:当$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,y)}$或$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}$在 P_0 处不等于零时,曲线在 P_0 处的切线与法平面方程仍分别取(9)与(10)的形式.由此可见,当

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0},\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0},\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}$$

不全为零时,它们是空间曲线(7)在点 P_0 处的切线的方向数.

例 2 求球面 $x^2+y^2+z^2=50$ 与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 所截出的曲线的点(3,4,5)处的切线与法平面方程.

解 设

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-50,$$
$$G(x,y,z)=x^2+y^2-z^2.$$

它们在点(3,4,5)处的偏导数和雅可比行列式之值为:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=6,\ \frac{\partial F}{\partial y}=8,\ \frac{\partial F}{\partial z}=10,$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}=6,\ \frac{\partial G}{\partial y}=8,\ \frac{\partial G}{\partial z}=-10$$

和
$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=-160,\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=120,\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=0.$$

所以曲线在点(3,4,5)处的切线方程为：

$$\frac{x-3}{-160}=\frac{y-4}{120}=\frac{z-5}{0},$$

即

$$\begin{cases}3(x-3)+4(y-4)=0,\\ z=5.\end{cases}$$

法平面方程为

$$-4(x-3)+3(y-4)+0(z-5)=0,$$

即

$$4x-3y=0.$$

□

三 曲面的切平面与法线

设曲面由方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{11}$$

给出，它在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内满足隐函数定理条件(这里不妨设 $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$). 于是方程(11)在点 P_0 附近确定惟一连续可微的隐函数 $z=f(x,y)$ 使得 $z_0=f(x_0,y_0)$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}.$$

由于在点 P_0 附近(11)与 $z=f(x,y)$ 表示同一曲面，从而该曲面在 P_0 处有切平面与法线(第十七章§1(13)、(14))，它们的方程分别是

$$z-z_0=-\frac{F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)-\frac{F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)$$

与

$$\frac{x-x_0}{-\dfrac{F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}}=\frac{y-y_0}{-\dfrac{F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

它们也可分别写成如下形式：

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0 \tag{12}$$

与

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}. \tag{13}$$

这种形式对于 $F_x(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ 或 $F_y(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ 也同样适合.

例3 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 在(1,1,1)处的切平面方程与法线方程.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-6$. 由于 $F_x=2x, F_y=4y, F_z=6z$ 在

全空间上处处连续. 在(1,1,1)处 $F_x=2, F_y=4, F_z=6$. 因此由公式(12)、(13)得切平面方程

$$2(x-1)+4(y-1)+6(z-1)=0,$$

即

$$x+2y+3z=6$$

和法线方程

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

□

习　　题

1. 求平面曲线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}(a>0)$上任一点处的切线方程,并证明这些切线被坐标轴所截取的线段等长.

2. 求下列曲线在所示点处的切线与法平面:

(1) $x=a\sin^2 t, y=b\sin t\cos t, z=c\cos^2 t$,在点 $t=\frac{\pi}{4}$;

(2) $2x^2+3y^2+z^2=9, z^2=3x^2+y^2$,在点$(1,-1,2)$.

3. 求下列曲面在所示点处的切平面与法线:

(1) $y-e^{2x-z}=0$,在点$(1,1,2)$;

(2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$,在点$\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

4. 证明对任意常数 ρ,φ,球面 $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ 与锥面 $x^2+y^2=\tan^2\varphi\cdot z^2$ 是正交的.

5. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的切平面,使它平行于平面

$$x+4y+6z=0.$$

6. 求曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上求出一点,使曲线在此点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

---

7. 求函数

$$u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

在点 $M(1,2,-2)$处沿曲线

$$x=t, y=2t^2, z=-2t^4$$

在该点切线方向导数.

8. 试证明:函数 $F(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的梯度恰好是 F 的等值线在点 P_0 的法向量(设 F 有连续一阶偏导数).

9. 确定正数 λ,使曲面 $xyz=\lambda$ 与椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在某一点相切(即在该点有公共切平面).

10. 求曲面 $x^2+y^2+z^2=x$ 的切平面,使其垂直于平面 $x-y-\frac{1}{2}z=2$ 和 $x-y-z=$

2.

11. 求两曲面

$$F(x,y,z)=0,\ G(x,y,z)=0$$

的交线在 xy 平面上的投影曲线的切线方程.

§4　条件极值

以往所讨论的极值问题,其极值点的搜索范围是目标函数的定义域,但是另外还有很多极值问题,其极值点的搜索范围还受到各自不同条件的限制.例如,要设计一个容量为 V 的长方形开口水箱,试问水箱的长、宽、高各等于多少时,其表面积最小? 为此,设水箱的长、宽、高分别为 x,y,z,则表面积为

$$S(x,y,z)=2(xz+yz)+xy.$$

依题意,上述表面积函数的自变量不仅要符合定义域的要求($x>0,y>0,z>0$),而且还须满足条件

$$xyz=V. \tag{1}$$

这类附有约束条件的极值问题称为**条件极值**问题(不带约束条件的极值问题不妨称为无条件极值问题).

条件极值问题的一般形式是在条件组

$$\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\ k=1,2,\cdots,m\quad(m<n) \tag{2}$$

的限制下,求目标函数

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{3}$$

的极值.

过去遇到这类极值问题时,只能用消元法化为无条件极值问题来求解.如上面的例子,由条件(1)解出 $z=V/xy$,并代入函数 $S(x,y,z)$中,得到

$$F(x,y)=S\left(x,y,\frac{V}{xy}\right)=2V\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)+xy.$$

然后按$(F_x,F_y)=(0,0)$,求出稳定点 $x=y=\sqrt[3]{2V}$,并有 $z=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.最后判定在此稳定点上取得最小面积 $S=3\sqrt[3]{4V^2}$.

然而,在一般情形下要从条件组(2)中解出 m 个变元并不总是可能的.下面我们介绍的拉格朗日乘数法就是一种不直接依赖消元而求解条件极值问题的有效方法.

我们从 f,φ 皆为二元函数这一简单情况入手.欲求函数

$$z=f(x,y) \tag{4}$$

的极值,其中(x,y)受条件

$$C: \varphi(x,y) = 0 \tag{5}$$

的限制.

若把条件 C 看作(x,y)所满足的曲线方程,并设 C 上的点$P_0(x_0,y_0)$为 f 在条件(5)下的极值点,且在点 P_0 的某邻域内方程(5)能惟一确定可微的隐函数 $y=g(x)$,则 $x=x_0$ 必定也是 $z=f(x,g(x))=h(x)$的极值点.故由 f 在 P_0 可微,g 在x_0 可微,得到

$$h'(x_0) = f_x(x_0,y_0) + f_y(x_0,y_0)g'(x_0) = 0. \tag{6}$$

而当 φ 满足隐函数定理条件时

$$g'(x_0) = -\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}. \tag{7}$$

把(7)代入(6)后又得到

$$f_x(P_0)\varphi_y(P_0) - f_y(P_0)\varphi_x(P_0) = 0. \tag{8}$$

在几何意义上,关系式(8)表示曲面 $z=f(x,y)$的等高线 $f(x,y)=f(P_0)$与曲线 C 在点P_0 处具有公共切线(见图 18-6).

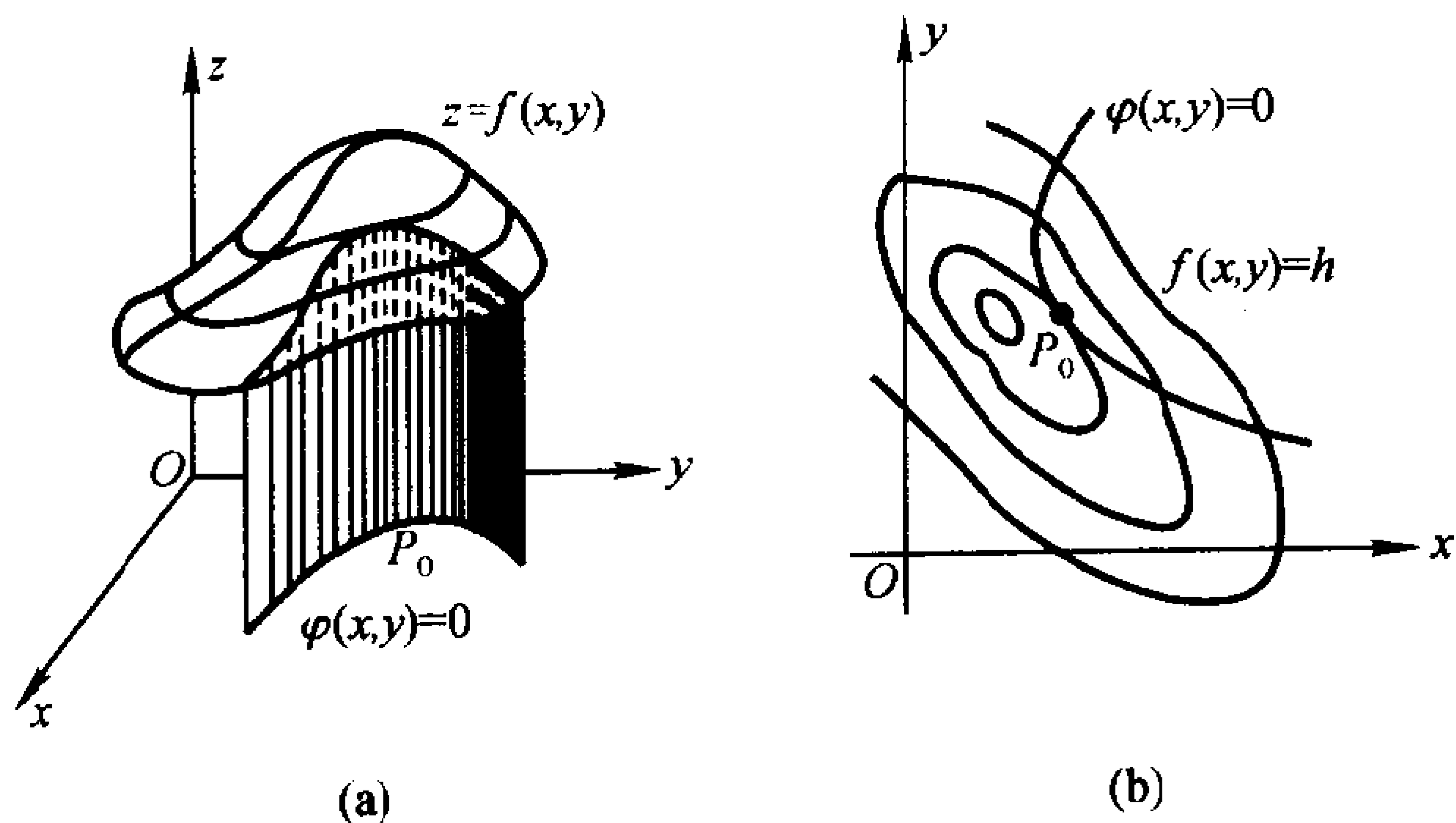


图 18-6

从而存在某一常数 λ_0,使得在 P_0 处满足

$$\left.\begin{aligned} &f_x(P_0) + \lambda_0\varphi_x(P_0) = 0,\\ &f_y(P_0) + \lambda_0\varphi_y(P_0) = 0,\\ &\varphi(P_0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

如果引入辅助变量 λ 和辅助函数

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y), \tag{10}$$

则(9)中三式就是

$$\left.\begin{aligned} &L_x(x_0,y_0,z_0) = f_x(P_0) + \lambda_0\varphi_x(P_0) = 0,\\ &L_y(x_0,y_0,z_0) = f_y(P_0) + \lambda_0\varphi_y(P_0) = 0,\\ &L_\lambda(x_0,y_0,z_0) = \varphi(P_0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

这样就把条件极值问题(4),(5)转化为讨论函数(10)的无条件极值问题.这种方法称为**拉格朗日乘数法**,(10)中的函数 L 称为**拉格朗日函数**,辅助变量 λ 称为**拉格朗日乘数**.

对于由(3)、(2)两式所表示的一般条件极值问题的拉格朗日函数是

$$\begin{aligned} &L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m) \\ &= f(x_1,x_2,\cdots,x_n) + \sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n), \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 为拉格朗日乘数,并有下面定理:

定理 18.6 设在条件(2)的限制下,求函数(3)的极值问题,其中 f 与 $\varphi_k(k=1,2,\cdots,m)$在区域 D 内有连续的一阶偏导数.若 D 的内点$P_0(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$是上述问题的极值点,且雅可比矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{P_0} \tag{13}$$

的秩为 m,则存在 m 个常数$\lambda_1^{(0)},\cdots,\lambda_m^{(0)}$,使得$(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},\lambda_1^{(0)},\cdots,\lambda_m^{(0)})$为拉格朗日函数(12)的稳定点,即$(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},\lambda_1^{(0)},\cdots,\lambda_m^{(0)})$为下述 $n+m$ 个方程:

$$\begin{cases} L_{x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x_1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_{x_n} = \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x_n} = 0 \\ L_{\lambda_1} = \varphi_1(x_1,\cdots,x_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_{\lambda_m} = \varphi_m(x_1,\cdots,x_n) = 0 \end{cases}$$

的解.

当 $n=2,m=1$ 时,定理的正确性已在前面作了说明,对于一般情形的证明可参阅第二十三章的定理 23.19.

例 1 用拉格朗日乘数法重新求本节开头提到的水箱设计的问题.

解 这时所求问题的拉格朗日函数是

$$L(x,y,z,\lambda) = 2(xz+yz)+xy+\lambda(xyz-V).$$

对 L 求偏导数,并令它们都等于 0:

$$\left.\begin{aligned} L_x &= 2z + y + \lambda yz = 0, \\ L_y &= 2z + x + \lambda xz = 0, \\ L_z &= 2(x + y) + \lambda xy = 0, \\ L_\lambda &= xyz - V = 0. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

求方程组(14)的解,得

$$x = y = 2z = \sqrt[3]{2V},\ \lambda = -\frac{4}{\sqrt[3]{2V}}. \tag{15}$$

依题意,所求水箱的表面积在条件(1)下确实存在最小值.由(15)知当高为$\sqrt[3]{\frac{V}{4}}$,长与宽为高的 2 倍时,表面积最小.最小值 $S = 3(2V)^{2/3}$. □

例 2 抛物面

$$x^2 + y^2 = z$$

被平面

$$x + y + z = 1$$

截成一个椭圆.求这个椭圆到原点的最长与最短距离.

解 这个问题实质上就是要求函数

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

在条件 $x^2 + y^2 - z = 0$ 及 $x + y + z - 1 = 0$ 下的最大、最小值问题.应用拉格朗日乘数法,令

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 1).$$

对 L 求一阶偏导数,并令它们都等于 0,则有

$$\begin{cases} L_x = 2x + 2x\lambda + \mu = 0, \\ L_y = 2y + 2y\lambda + \mu = 0, \\ L_z = 2z - \lambda + \mu = 0, \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0, \\ L_\mu = x + y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

求得这方程组的解为

$$\lambda = -3 \pm \frac{5}{3}\sqrt{3},\ \mu = -7 \pm \frac{11}{3}\sqrt{3},$$

与

$$x = y = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2},\ z = 2 \mp \sqrt{3}. \tag{16}$$

(16)就是拉格朗日函数 $L(x, y, z, \lambda, \mu)$的稳定点,且所求的条件极值点必在其中取得.由于所求问题存在最大值与最小值(因为函数 f 在有界闭集$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z, x + y + z = 1\}$上连续,从而必存在最大值与最小值),故由

$$f\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2},\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2},2\mp\sqrt{3}\right)$$

所求得的两个值 $9\mp5\sqrt{3}$，正是该椭圆到原点的最长距离$\sqrt{9+5\sqrt{3}}$与最短距离$\sqrt{9-5\sqrt{3}}$. □

例 3 求$f(x,y,z)=xyz$在条件$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{r}(x>0,y>0,z>0,r>0)$下的极小值;并证明不等式

$$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{-1}\leqslant\sqrt[3]{abc},$$

其中 a,b,c 为任意正实数.

解 设拉格朗日函数为

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{r}\right).$$

对 L 求偏导数并令它们都等于 0,则有

$$\left.\begin{aligned}L_x&=yz-\frac{\lambda}{x^2}=0,\\L_y&=zx-\frac{\lambda}{y^2}=0,\\L_z&=xy-\frac{\lambda}{x^2}=0,\\L_\lambda&=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{r}=0.\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

由方程组(17)的前三式,易得

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z}=\frac{xyz}{\lambda}=\mu.$$

把它代入(17)的第四式,求出 $\mu=\frac{1}{3r}$. 从而函数 L 的稳定点为 $x=y=z=3r,\lambda=(3r)^4$.

为了判断 $f(3r,3r,3r)=(3r)^3$ 是否为所求条件极(小)值,我们可把条件$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{r}$看作隐函数$z=z(x,y)$(满足隐函数定理条件),并把目标函数$f(x,y,z)=xyz(x,y)=F(x,y)$看作 f 与$z=z(x,y)$的复合函数. 这样,就可应用极值充分条件来作出判断. 为此计算如下:

$$z_x=-\frac{-1}{x^2}\Big/\frac{-1}{z^2}=-\frac{z^2}{x^2},\ z_y=-\frac{z^2}{y^2},$$

$$F_x=yz+xyz_x=yz-\frac{yz^2}{x},\ F_y=xz-\frac{xz^2}{y},$$

$$F_{xx}=yz_x+yz_x+xyz_{xx}=\frac{2yz^3}{x^3},$$

$$F_{xy}=z+yz_y+xz_x+xyz_{xy}=z-\frac{z^2}{y}-\frac{z^2}{x}+\frac{2z^3}{xy},$$

$$F_{yy}=\frac{2xz^3}{y^3}.$$

当 $x=y=z=3r$ 时,

$$F_{xx}=6r=F_{yy},\ F_{xy}=3r,$$

$$F_{xx}F_{yy}-F_{xy}^2=36r^2-9r^2=27r^2>0.$$

由此可见,所求得的稳定点为极小值点,而且可以验证是最小值点.这样就有不等式

$$xyz\geqslant(3r)^3\quad\left(x>0,y>0,z>0\text{ 且}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{r}\right).\tag{18}$$

令 $x=a,y=b,z=c$,则 $r=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{-1}$,代入不等式(18)有

$$abc\geqslant\left[3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{-1}\right]^3$$

或

$$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{-1}\leqslant\sqrt[3]{abc}\quad(a>0,b>0,c>0).$$

□

习　　题

1. 应用拉格朗日乘数法,求下列函数的条件极值:

(1) $f(x,y)=x^2+y^2$,若 $x+y-1=0$;

(2) $f(x,y,z,t)=x+y+z+t$,若 $xyzt=c^4$(其中 $x,y,z,t>0,c>0$);

(3) $f(x,y,z)=xyz$,若 $x^2+y^2+z^2=1,x+y+z=0$.

2. (1)求表面积一定而体积最大的长方体;

(2) 求体积一定而表面积最小的长方体.

3. (1) 求空间一点(x_0,y_0,z_0)到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的最短距离.

---

4. 证明:在 n 个正数的和为定值条件

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=a$$

下,这 n 个正数的乘积 $x_1x_2\cdots x_n$ 的最大值为$\frac{a^n}{n^n}$.并由此结果推出 n 个正数的几何中值不大于算术中值

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

5. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为已知的 n 个正数,求

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

在限制条件

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1$$

下的最大值.

6. 求函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

在条件

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 1 \quad (a_k > 0, k = 1,2,\cdots,n)$$

下的最小值.

总 练 习 题

1. 方程 $y^2 - x^2(1-x^2) = 0$ 在哪些点的邻域内可惟一地确定连续可导的隐函数 $y = f(x)$?

2. 设函数 $f(x)$在区间(a,b)内连续,函数 $\varphi(y)$在区间(c,d)内连续,而且 $\varphi'(y)>0$. 问在怎样条件下,方程

$$\varphi(y) = f(x)$$

能确定函数

$$y = \varphi^{-1}(f(x))$$

并研究例子:(i)$\sin y + \operatorname{sh} y = x$; (ii)$e^{-y} = -\sin^2 x$.

3. 设 $f(x,y,z)=0, z=g(x,y)$,试求$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$.

4. 已知 $G_1(x,y,z), G_2(x,y,z), f(x,y)$都是可微的,

$$g_i(x,y) = G_i(x,y,f(x,y)),\ i = 1,2.$$

证明:

$$\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -f_x & -f_y & 1 \\ G_{1x} & G_{1y} & G_{1z} \\ G_{2x} & G_{2y} & G_{2z} \end{vmatrix}.$$

5. 设 $x = f(u,v,w), y = g(u,v,w), z = h(u,v,w)$,求

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}.$$

6. 试求下列方程所确定的函数的偏导数$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$:

(1) $x^2 + u^2 = f(x,u) + g(x,y,u)$;

(2) $u = f(x+u, yu)$.

7. 据理说明:在点$(0,1)$近旁是否存在连续可微的 $f(x,y)$和 $g(x,y)$,满足 $f(0,1)=1$, $g(0,1)=-1$,且

$$[f(x,y)]^3 + xg(x,y) - y = 0,\ [g(x,y)]^3 + yf(x,y) - x = 0.$$

8. 设(x_0,y_0,z_0,u_0)满足方程组

$$f(x)+f(y)+f(z)=F(u),\ g(x)+g(y)+g(z)=G(u),$$
$$h(x)+h(y)+h(z)=H(u),$$

这里所有的函数假定有连续的导数.

(1) 说出一个能在该点邻域内确定 x,y,z 为 u 的函数的充分条件;

(2) 在 $f(x)=x, g(x)=x^2, h(x)=x^3$ 的情形下,上述条件相当于什么?

9. 求由下列方程所确定的隐函数的极值:

(1) $x^2+2xy+2y^2=1$;

(2) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\ (a>0)$.

10. 设 $y=F(x)$和一组函数 $x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v)$,那么由方程 $\psi(u,v)=F(\varphi(u,v))$可以确定函数 $v=v(u)$. 试用 $u,v,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u},\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2}$表示$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

11. 试证明:二次型

$$f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy$$

在单位球面

$$x^2+y^2+z^2=1$$

上的最大值和最小值恰好是矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{pmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{pmatrix}$$

的最大特征值和最小特征值.

12. 设 n 为正整数,$x,y>0$. 用条件极值方法证明:

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

提示:参照§4 例 3 的思想方法,给出合适的约束条件.

13. 求出椭球$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$在第一卦限中的切平面与三个坐标面所成四面体的最小体积.

14. 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$是曲面 $F(x,y,z)=1$ 的非奇异点①,F 在 $U(P_0)$可微,且为 n 次齐次函数. 证明:此曲面在 P_0 处的切平面方程为

$$xF_x(P_0)+yF_y(P_0)+zF_z(P_0)=n.$$

① 若$(F_x,F_y,F_z)_{P_0}\neq(0,0,0)$,则点 P_0 称为 F 的**非奇异点**,否则 P_0 称为 F 的**奇异点**.

第十九章　含参量积分

§1　含参量正常积分

从本章开始我们讨论多元函数的各种积分问题,首先研究含参量积分.设 $f(x,y)$是定义在矩形区域 $R=[a,b]\times[c,d]$上的二元函数.当 x 取$[a,b]$上某定值时,函数 $f(x,y)$则是定义在$[c,d]$上以 y 为自变量的一元函数.倘若这时 $f(x,y)$在$[c,d]$上可积,则其积分值是 x 在$[a,b]$上取值的函数,记它为 $I(x)$,就有

$$I(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y,\ x\in[a,b]. \tag{1}$$

一般地,设 $f(x,y)$为定义在区域 $G=\{(x,y)\mid c(x)\leqslant y\leqslant d(x),a\leqslant x\leqslant b\}$上的二元函数,其中 $c(x)$,$d(x)$为定义在$[a,b]$上的连续函数(图 19-1),若对于$[a,b]$上每一固定的 x 值,$f(x,y)$作为 y 的函数在闭区间$[c(x),d(x)]$上可积,则其积分值是 x 在$[a,b]$上取值的函数,记作 $F(x)$时,就有

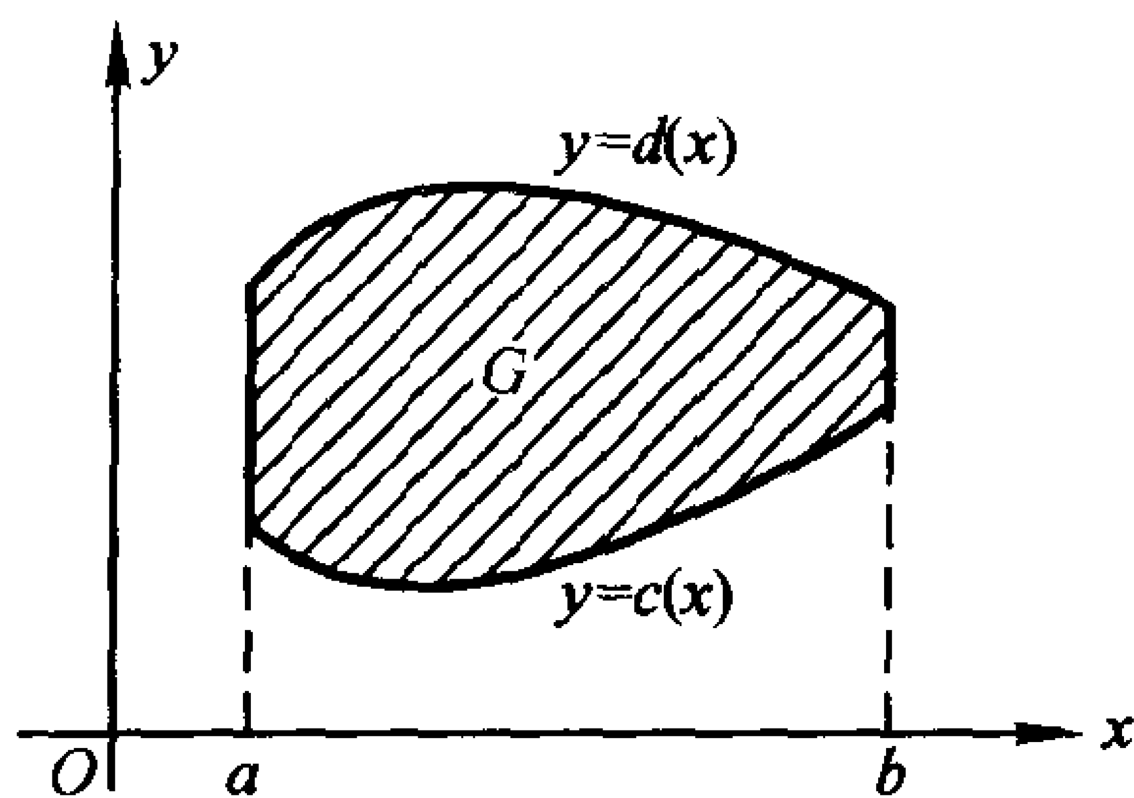


图 19-1

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\mathrm{d}y,\ x\in[a,b]. \tag{2}$$

用积分形式所定义的这两个函数(1)与(2),通称为定义在$[a,b]$上**含参量 x 的(正常)积分**,或简称**含参量积分**.

下面讨论含参量积分的连续性、可微性与可积性.

定理 19.1(连续性)　若二元函数 $f(x,y)$在矩形区域 $R=[a,b]\times[c,d]$上连续,则函数

$$I(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

在$[a,b]$上连续.

证　设 $x\in[a,b]$,对充分小的 Δx,有 $x+\Delta x\in[a,b]$(若 x 为区间的端点,则仅考虑 $\Delta x>0$ 或 $\Delta x<0$),于是

$$I(x+\Delta x)-I(x)=\int_c^d[f(x+\Delta x,y)-f(x,y)]\mathrm{d}y. \tag{3}$$

由于 $f(x,y)$在有界闭域 R 上连续,从而一致连续,即对任给的正数 ε,总存在某个正数 δ,对 R 内任意两点(x_1,y_1)与(x_2,y_2),只要

$$|x_1-x_2|<\delta,\ |y_1-y_2|<\delta,$$

就有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon. \tag{4}$$

所以由(3),(4)可推得:当$|\Delta x|<\delta$,

$$|I(x+\Delta x)-I(x)|\leqslant\int_c^d|f(x+\Delta x,y)-f(x,y)|\mathrm{d}y$$

$$<\int_c^d\varepsilon\mathrm{d}x=\varepsilon(d-c).$$

这就证得 $I(x)$在$[a,b]$上连续. □

同理可证:若 $f(x,y)$在矩形区域 R 上连续,则含参量 y 的积分

$$J(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \tag{5}$$

在$[c,d]$上连续.

对于定理 19.1 的结论也可以写成如下的形式:若 $f(x,y)$在矩形区域 R 上连续,则对任何 $x_0\in[a,b]$,都有

$$\lim_{x\to x_0}\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d\lim_{x\to x_0}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

这个结论表明,定义在矩形区域上的连续函数,其极限运算与积分运算的顺序是可以交换的.

定理 19.2(连续性) 设二元函数 $f(x,y)$在区域

$$G=\{(x,y)|c(x)\leqslant y\leqslant d(x),a\leqslant x\leqslant b\}$$

上连续,其中 $c(x),d(x)$为$[a,b]$上的连续函数,则函数

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)}f(x,y)\mathrm{d}y \tag{6}$$

在$[a,b]$上连续.

证 对积分(6)用换元积分法,令

$$y=c(x)+t(d(x)-c(x)).$$

当 y 在$c(x)$与 $d(x)$之间取值时,t 在$[0,1]$上取值,且

$$\mathrm{d}y=(d(x)-c(x))\mathrm{d}t.$$

所以从(6)式可得

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1 f(x,c(x)+t(d(x)-c(x)))(d(x)-c(x))\mathrm{d}t.$$

由于被积函数

$$f(x,c(x)+t(d(x)-c(x)))(d(x)-c(x))$$

在矩形区域$[a,b]\times[0,1]$上连续,由定理 19.1 得积分(6)所确定的函数 $F(x)$ 在$[a,b]$上连续. □

下面讨论含参量积分的求导运算与积分运算的可交换性.

定理 19.3(可微性) 若函数 $f(x,y)$与其偏导数$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$都在矩形区域 $R=[a,b]\times[c,d]$上连续,则

$$I(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

在$[a,b]$上可微,且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

证 对于$[a,b]$内任一点 x,设 $x+\Delta x\in[a,b]$(若 x 为区间端点,则讨论单侧导数),则

$$\frac{I(x+\Delta x)-I(x)}{\Delta x}=\int_c^d\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\mathrm{d}y.$$

由微分学的拉格朗日中值定理及 $f_x(x,y)$在有界闭域 R 上连续(从而一致连续),对任给正数 ε,存在正数 δ,只要当$|\Delta x|<\delta$ 时,就有

$$\left|\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}-f_x(x,y)\right|$$
$$=|f_x(x+\theta\Delta x,y)-f_x(x,y)|<\varepsilon,$$

其中 $\theta\in(0,1)$. 因此

$$\left|\frac{\Delta I}{\Delta x}-\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y\right|$$
$$\leqslant\int_c^d\left|\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}-f_x(x,y)\right|\mathrm{d}y$$
$$<\varepsilon(d-c).$$

这就证得对一切 $x\in[a,b]$,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}I(x)=\int_c^d\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\mathrm{d}y.$$ □

定理 19.4(可微性) 设 $f(x,y),f_x(x,y)$在 $R=[a,b]\times[p,q]$上连续,

$c(x),d(x)$为定义在$[a,b]$上其值含于$[p,q]$内的可微函数，则函数

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

在$[a,b]$上可微，且

$$F'(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x,y)\mathrm{d}y+f(x,d(x))d'(x)-f(x,c(x))c'(x). \tag{7}$$

证 把 $F(x)$看作复合函数：

$$F(x)=H(x,c,d)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y,$$

$$c=c(x),\ d=d(x).$$

由复合函数求导法则及活动上限积分的求导法则，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)&=\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial c}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial H}{\partial d}\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}x}\\&=\int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x,y)\mathrm{d}y+f(x,d(x))d'(x)-f(x,c(x))c'(x).\end{aligned}$$ □

关于函数 $I(x)$和 $F(x)$的可积性，可由定理19.1与定理19.2推得：

定理19.5(可积性) 若 $f(x,y)$在矩形区域 $R=[a,b]\times[c,d]$上连续，则 $I(x)$和 $J(y)$分别在$[a,b]$和$[c,d]$上可积.

这就是说：在 $f(x,y)$连续性假设下，同时存在两个求积顺序不同的积分：

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \quad 与 \quad \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

为书写简便起见，今后将上述两个积分写作

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \quad 与 \quad \int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x,$$

前者表示 $f(x,y)$先对 y 求积然后对 x 求积，后者则求积顺序相反. 它们统称为**累次积分**，或更确切地称为**二次积分**.

下面的定理指出，在 $f(x,y)$连续性假设下，累次积分与求积顺序无关.

定理19.6 若 $f(x,y)$在矩形区域 $R=[a,b]\times[c,d]$上连续，则

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x. \tag{8}$$

证 记

$$I_1(u)=\int_a^u \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y,$$

$$I_2(u)=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^u f(x,y)\mathrm{d}x,$$

其中 $u\in[a,b]$，现在分别求 $I_1(u)$与 $I_2(u)$的导数.

$$I_1'(u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_a^u I(x)\mathrm{d}x=I(u).$$

对于 $I_2(u)$,令 $H(u,y)=\int_a^u f(x,y)\mathrm{d}x$,则有

$$I_2(u)=\int_c^d H(u,y)\mathrm{d}y.$$

因为 $H(u,y)$与 $H_u(u,y)=f(u,y)$都在 R 上连续,由定理 19.3,

$$I_2'(u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_c^d H(u,y)\mathrm{d}y=\int_c^d H_u(u,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_c^d f(u,y)\mathrm{d}y=I(u).$$

故得 $I_1'(u)=I_2'(u)$,因此对一切 $u\in[a,b]$,有

$$I_1(u)=I_2(u)+k\quad(k\text{ 为常数}).$$

当 $u=a$ 时,$I_1(a)=I_2(a)=0$,于是 $k=0$,即得

$$I_1(u)=I_2(u),\ u\in[a,b].$$

取 $u=b$,就得到所要证明的(8)式. □

例 1 求$\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$.

解 记 $I(\alpha)=\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$.由于 $\alpha,1+\alpha,\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$都是 α 和x 的连续函数,由定理 19.2 知 $I(\alpha)$在 $\alpha=0$ 处连续,所以

$$\lim_{\alpha\to 0}I(\alpha)=I(0)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$$ □

例 2 计算积分

$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

解 考虑含参量积分

$$I(\alpha)=\int_0^1\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

显然 $I(0)=0,I(1)=I$,且函数 $I(\alpha)$在 $R=[0,1]\times[0,1]$上满足定理 19.3 的条件,于是

$$I'(\alpha)=\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)}\mathrm{d}x.$$

因为

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)}=\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\frac{\alpha+x}{1+x^2}-\frac{\alpha}{1+\alpha x}\right),$$

所以

$$I'(\alpha)=\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\int_0^1\frac{\alpha}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{\alpha}{1+\alpha x}\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{1}{1+\alpha^2}\left[\alpha\arctan x\Big|_0^1+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1-\ln(1+\alpha x)\Big|_0^1\right]$$
$$=\frac{1}{1+\alpha^2}\left[\alpha\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2-\ln(1+\alpha)\right].$$

因此

$$\int_0^1 I'(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int_0^1\frac{1}{1+\alpha^2}\left[\frac{\pi}{4}\alpha+\frac{1}{2}\ln 2-\ln(1+\alpha)\right]\mathrm{d}\alpha$$
$$=\frac{\pi}{8}\ln(1+\alpha^2)\Big|_0^1+\frac{1}{2}\ln 2\ \arctan\alpha\Big|_0^1-I(1)$$
$$=\frac{\pi}{8}\ln 2+\frac{\pi}{8}\ln 2-I(1)$$
$$=\frac{\pi}{4}\ln 2-I(1).$$

另一方面

$$\int_0^1 I'(\alpha)\mathrm{d}\alpha=I(1)-I(0)=I(1),$$

所以 $I=I(1)=\frac{\pi}{8}\ln 2.$ □

例 3 设 $f(x)$在 $x=0$ 的某个邻域内连续,验证当$|x|$充分小时,函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x(x-t)^{n-1}f(t)\mathrm{d}t \tag{9}$$

的各阶导数存在,且 $\varphi^{(n)}(x)=f(x)$.

解 由于(9)中被积函数 $F(x,t)=(x-t)^{n-1}f(t)$及其偏导数 $F_x(x,t)$ 在原点的某个方邻域内连续,于是由定理 19.4 可得

$$\varphi'(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x(n-1)(x-t)^{n-2}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{(n-1)!}(x-x)^{n-1}f(x)$$
$$=\frac{1}{(n-2)!}\int_0^x(x-t)^{n-2}f(t)\mathrm{d}t.$$

同理

$$\varphi''(x)=\frac{1}{(n-3)!}\int_0^x(x-t)^{n-3}f(t)\mathrm{d}t.$$

如此继续下去,求得 k 阶导数为

$$\varphi^{(k)}(x)=\frac{1}{(n-k-1)!}\int_0^x(x-t)^{n-k-1}f(t)\mathrm{d}t.$$

特别当 $R=n-1$ 时有

$$\varphi^{(n-1)}(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

于是 $\varphi^{(n)}(x)=f(x)$. 附带说明,当 $x=0$ 时,$\varphi(x)$及其各阶导数为

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=\cdots=\varphi^{(n-1)}(0)=0.$$ □

例 4 求 $I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x \quad (b>a>0)$.

解 因为 $\int_a^b x^y\mathrm{d}y=\frac{x^b-x^a}{\ln x}$, 所以

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_a^b x^y\mathrm{d}y.$$

由于函数 x^y 在 $R=[0,1]\times[a,b]$ 上满足定理 19.6 的条件,所以交换积分顺序得到

$$I=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1 x^y\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{1}{1+y}\mathrm{d}y=\ln\frac{1+b}{1+a}.$$ □

习 题

1. 设 $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x-y)$(这个函数在 $x=y$ 时不连续),试证由含参量积分

$$F(y)=\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$$

所确定的函数在$(-\infty,\infty)$上连续,并作函数 $F(y)$的图象.

2. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{a\to 0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x$; (2) $\lim\limits_{a\to 0}\int_0^2 x^2\cos ax\mathrm{d}x$.

3. 设 $F(x)=\int_x^{x^2}\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}y$, 求 $F'(x)$.

4. 应用对参量的微分法,求下列积分:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x$.

5. 应用积分号下的积分法,求下列积分:

(1) $\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x \quad (b>a>0)$;

(2) $\int_0^1\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x \quad (b>a>0)$.

6. 试求累次积分:

$$\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy \quad 与 \quad \int_0^1 dy\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx,$$

并指出它们为什么与定理19.6的结果不符.

---

7. 研究函数 $F(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$ 的连续性,其中 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上是正的连续函数.

8. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,A]$ 上连续,证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x [f(t+h)-f(t)]dt = f(x)-f(a) \quad (a<x<A).$$

9. 设

$$F(x,y)=\int_{\frac{x}{y}}^{xy}(x-yz)f(z)dz,$$

其中 $f(z)$ 为可微函数,求 $F_{xy}(x,y)$.

10. 设

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,\ F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

其中 $0<k<1$(这两个积分称为**完全椭圆积分**).

(1) 试求 $E(k)$ 与 $F(k)$ 的导数,并以 $E(k)$ 与 $F(k)$ 来表示它们;

(2) 证明 $E(k)$ 满足方程

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

§2 含参量反常积分

一 一致收敛性及其判别法

设函数 $f(x,y)$ 定义在无界区域 $R=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y<+\infty\}$[①]上,若对每一个固定的 $x\in[a,b]$,反常积分

$$\int_c^{+\infty} f(x,y)dy \tag{1}$$

都收敛,则它的值是 x 在 $[a,b]$ 上取值的函数,当记这个函数为 $I(x)$ 时,则有

$$I(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)dy,\ x\in[a,b], \tag{2}$$

称(1)式为定义在 $[a,b]$ 上的**含参量 x 的无穷限反常积分**,或简称**含参量反常积分**.

---

① 无界区域 R 也可简单地记为 $R=[a,b]\times[c,+\infty)$.

如同反常积分与数项级数的关系那样，含参量反常积分与函数项级数在所研究的问题与论证方法上也极为相似.

首先引入含参量反常积分的一致收敛概念及柯西准则.

定义 1 若含参量反常积分(1)与函数 $I(x)$ 对任给的正数 ε，总存在某一实数 $N>c$，使得当 $M>N$ 时，对一切 $x\in[a,b]$，都有

$$\left|\int_c^M f(x,y)\mathrm{d}y - I(x)\right| < \varepsilon,$$

即

$$\left|\int_M^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right| < \varepsilon,$$

则称含参量反常积分(1)在 $[a,b]$ 上**一致收敛于** $I(x)$，或简单地说含参量积分(1)在 $[a,b]$ 上一致收敛.

定理 19.7(一致收敛的柯西准则) 含参量反常积分(1)在 $[a,b]$ 上一致收敛的充要条件是：对任给正数 ε，总存在某一实数 $M>c$，使得当 $A_1,A_2>M$ 时，对一切 $x\in[a,b]$，都有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right| < \varepsilon. \tag{3}$$

例 1 证明含参量反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{y}\mathrm{d}y \tag{4}$$

在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛(其中 $\delta>0$)，但在 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛.

证 作变量代换 $u=xy$，得

$$\int_A^{+\infty} \frac{\sin xy}{y}\mathrm{d}y = \int_{Ax}^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u, \tag{5}$$

其中 $A>0$. 由于 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$ 收敛，故对任给正数 ε，总存在正数 M，使当 $A'>M$ 时，就有

$$\left|\int_{A'}^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right| < \varepsilon.$$

取 $A\delta>M$，则当 $A>\frac{M}{\delta}$ 时，对一切 $x\geqslant\delta>0$，由(5)式有

$$\left|\int_A^{+\infty} \frac{\sin xy}{y}\mathrm{d}y\right| < \varepsilon,$$

所以(4)在 $x\geqslant\delta>0$ 上一致收敛.

现在证明(4)在 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛. 由一致收敛定义，只要证明：存在某一正数 ε_0，使对任何实数 $M(>c)$，总相应地存在某个 $A>M$ 及某个 $x\in$

$[a,b]$,使得

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

由于非正常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$ 收敛(在本节例 6 中我们将求出这个积分的值),故对任何正数 ε_0 与 M,总存在某个 $x(>0)$,使得

$$\left|\int_{Mx}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u - \int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right| < \varepsilon_0,$$

即

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u - \varepsilon_0 < \int_{Mx}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u < \int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u + \varepsilon_0. \tag{6}$$

现令 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$,由(5)及不等式(6)的左端就有

$$\int_M^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}\mathrm{d}y = \int_{Mx}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u > 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0 = \varepsilon_0.$$

所以(4)在$(0,+\infty)$内不一致收敛. □

关于含参量反常积分一致收敛性与函数项级数一致收敛之间的联系有下述定理.

定理 19.8　含参量反常积分(1)在$[a,b]$上一致收敛的充要条件是:对任一趋于$+\infty$的递增数列$\{A_n\}$(其中 $A_1=c$),函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \tag{7}$$

在$[a,b]$上一致收敛.

证　[必要性]由(1)在$[a,b]$上一致收敛,故对任给 $\varepsilon>0$,必存在 $M>c$,使当 $A''>A'>M$ 时,对一切 $x\in[a,b]$,总有

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)\mathrm{d}y\right| < \varepsilon. \tag{8}$$

又由 $A_n\to+\infty(n\to\infty)$,所以对正数 M,存在正整数 N,只要当 $m>n>N$ 时,就有 $A_m>A_n>M$.由(8)对一切 $x\in[a,b]$,就有

$$\begin{aligned}|u_n(x)+\cdots+u_m(x)| &= \left|\int_{A_m}^{A_{m+1}} f(x,y)\mathrm{d}y + \cdots + \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)\mathrm{d}y\right| \\ &= \left|\int_{A_m}^{A_{n+1}} f(x,y)\mathrm{d}y\right| < \varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了级数(7)在$[a,b]$上一致收敛.

[充分性]　用反证法.假若(1)在$[a,b]$上不一致收敛,则存在某个正数 ε_0,使得对于任

何实数 $M>c$,存在相应的 $A''>A'>M$ 和 $x'\in[a,b]$,使得

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x',y)\mathrm{d}y\right|\geqslant\varepsilon_0.$$

现取 $M_1=\max\{1,c\}$,则存在 $A_2>A_1>M_1$ 及 $x_1\in[a,b]$,使得

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x_1,y)\mathrm{d}y\right|\geqslant\varepsilon_0.$$

一般地,取 $M_n=\max\{n,A_{2(n-1)}\}(n\geqslant2)$,则有 $A_{2n}>A_{2n-1}>M_n$ 及 $x_n\in[a,b]$,使得

$$\left|\int_{A_{2n-1}}^{A_{2n}}f(x_n,y)\mathrm{d}y\right|\geqslant\varepsilon_0.\tag{9}$$

由上述所得到的数列 $\{A_n\}$ 是递增数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=+\infty$. 现在考察级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

由(9)式知存在正数 ε_0,对任何正整数 N,只要 $n>N$,就有某个 $x_n\in[a,b]$,使得

$$|u_{2n}(x_n)|=\left|\int_{A_{2n}}^{A_{2n+1}}f(x_n,y)\mathrm{d}y\right|\geqslant\varepsilon_0.$$

这与级数(7)在 $[a,b]$ 上一致收敛的假设矛盾. 故含参量反常积分(1)在 $[a,b]$ 上一致收敛. □

下面列出含参量反常积分的一致收敛性判别法. 由于它们的证明与函数项级数相应的判别法相仿,故从略.

魏尔斯特拉斯 M 判别法 设有函数 $g(y)$,使得

$$|f(x,y)|\leqslant g(y),\ a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y<+\infty.$$

若 $\int_c^{+\infty}g(y)\mathrm{d}y$ 收敛,则 $\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

狄利克雷判别法 设

(i) 对一切实数 $N>c$,含参量反常积分

$$\int_c^N f(x,y)\mathrm{d}y$$

对参量 x 在 $[a,b]$ 上一致有界,即存在正数 M,对一切 $N>c$ 及一切 $x\in[a,b]$,都有

$$\left|\int_c^N f(x,y)\mathrm{d}y\right|\leqslant M;$$

(ii) 对每一个 $x\in[a,b]$,函数 $g(x,y)$ 关于 y 是单调递减且当 $y\to+\infty$ 时,对参量 x,$g(x,y)$ 一致地收敛于 0,

则含参量反常积分

$$\int_c^{+\infty}f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛.

阿贝耳判别法 设

(i) $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上一致收敛;

(ii) 对每一个 $x\in[a,b]$,函数 $g(x,y)$为 y 的单调函数,且对参量 x,$g(x,y)$在$[a,b]$上一致有界,

则含参量反常积分

$$\int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$$

在$[a,b]$上一致收敛.

例 2 证明含参量反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2}\mathrm{d}x \tag{10}$$

在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

证 由于对任何实数 y 有

$$\left|\frac{\cos xy}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2},$$

及反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

收敛,故由魏尔斯特拉斯 M 判别法,含参量反常积分(10)在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛. □

例 3 证明含参量反常积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \tag{11}$$

在$[0,d]$上一致收敛.

证 由于反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛(当然,对于参量 y,它在$[0,d]$上一致收敛),函数 $g(x,y)=\mathrm{e}^{-xy}$对每个$x\in[0,d]$单调,且对任何 $0\leqslant y\leqslant d,x\geqslant 0$ 都有

$$|g(x,y)| = |\mathrm{e}^{-xy}| \leqslant 1.$$

故由阿贝耳判别法即得含参量反常积分(11)在$[0,d]$上一致收敛. □

例 4 证明:若 $f(x,y)$在$[a,b]\times[c,+\infty)$上连续,又

$$\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$$

在$[a,b)$上收敛,但在 $x=b$ 处发散,则

$$\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$$

在$[a,b)$上不一致收敛.

证 用反证法.假若积分在$[a,b)$上一致收敛,则对于任给$\varepsilon>0$,总存在$M>c$,当$A,A'>M$时对一切$x\in[a,b)$恒有

$$\left|\int_A^{A'}f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon.$$

由假设$f(x,y)$在$[a,b]\times[A,A']$上连续,所以$\int_A^{A'}f(x,y)\mathrm{d}y$是$x$的连续函数.在上面不等式中令$x\to b$,得到当$A'>A>M$时,

$$\left|\int_A^{A'}f(b,y)\mathrm{d}y\right|\leqslant\varepsilon.$$

而ε是任给的,因此$\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$在$x=b$处收敛,这与假设矛盾.所以积分$\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$在$[a,b)$上不一致收敛. □

二 含参量反常积分的性质

定理 19.9(连续性) 设$f(x,y)$在$[a,b]\times[c,+\infty)$上连续,若含参量反常积分

$$I(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y \tag{12}$$

在$[a,b]$上一致收敛,则$I(x)$在$[a,b]$上连续.

证 由定理19.8,对任一递增且趋于$+\infty$的数列$\{A_n\}(A_1=c)$,函数项级数

$$I(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,y)\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \tag{13}$$

在$[a,b]$上一致收敛.又由于$f(x,y)$在$[a,b]\times[c,+\infty)$上连续,故每个$u_n(x)$都在$[a,b]$上连续.根据函数项级数的连续性定理,函数$I(x)$在$[a,b]$上连续. □

这个定理也表明,在一致收敛的条件下,极限运算与积分运算可以交换:

$$\lim_{x\to x_0}\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^{+\infty}f(x_0,y)\mathrm{d}y=\int_c^{+\infty}\lim_{x\to x_0}f(x,y)\mathrm{d}y. \tag{14}$$

定理 19.10(可微性) 设$f(x,y)$与$f_x(x,y)$在区域$[a,b]\times[c,+\infty)$上连续.若$I(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$在$[a,b]$上收敛,$\int_c^{+\infty}f_x(x,y)\mathrm{d}y$在$[a,b]$上一致收敛,则$I(x)$在$[a,b]$上可微,且

$$I'(x)=\int_c^{+\infty}f_x(x,y)\mathrm{d}y. \tag{15}$$

证 对任一递增且趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}(A_1=c)$，令

$$u_n(x)=\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

由定理 19.3 推得

$$u_n'(x)=\int_{A_n}^{A_{n+1}}f_x(x,y)\mathrm{d}y.$$

由 $\int_c^{+\infty}f_x(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛及定理 19.8，可得函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f_x(x,y)\mathrm{d}y$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛，因此根据函数项级数的逐项求导定理，即得

$$I'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f_x(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^{+\infty}f_x(x,y)\mathrm{d}y,$$

或写作

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\mathrm{d}y.$$ □

最后结果表明在定理条件下，求导运算和积分运算可以交换.

定理 19.11(可积性) 设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 上连续，若 $I(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x. \tag{16}$$

证 由定理 19.9 知道 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

又由定理 19.9 的证明中可以看到，函数项级数(13)在 $[a,b]$ 上一致收敛，且各项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，因此根据函数项级数逐项求积定理，有

$$\begin{aligned}\int_a^b I(x)\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b\mathrm{d}x\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,y)\mathrm{d}y\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{17}$$

这里最后一步是根据定理 19.6 关于积分顺序的可交换性.(17)式又可写作

$$\int_a^b I(x)\mathrm{d}x=\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

这就是(16)式. □

当定理 19.11 中 x 的取值范围为无限区间 $[a,+\infty)$ 时，则有如下的定理：

定理 19.12 设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,+\infty)$ 上连续.若

(i) $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 y 在任何闭区间 $[c,d]$ 上一致收敛，$\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 x 在任何闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛；

(ii) 积分

$$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y \text{ 与 } \int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}x \tag{18}$$

中有一个收敛，

则(18)中另一个积分也收敛，且

$$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x. \tag{19}$$

证 不妨设(18)中第一个积分收敛，由此推得

$$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

也收敛. 当 $d>c$ 时，

$$\begin{aligned} I_d &= \left|\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right| \\ &= \left|\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{d}f(x,y)\mathrm{d}y - \int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_d^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right|. \end{aligned}$$

根据条件(i)及定理 19.11，可推得

$$\begin{aligned} I_d &= \left|\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_d^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right| \\ &\leqslant \left|\int_a^{A}\mathrm{d}x\int_d^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right| + \int_A^{+\infty}\mathrm{d}x\int_d^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{20}$$

由条件(ii)，对于任给的 $\varepsilon>0$，有 $G>a$，使当 $A>G$ 时，有

$$\int_A^{+\infty}\mathrm{d}x\int_d^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y < \frac{\varepsilon}{2}.$$

选定 A 后，由 $\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 的一致收敛性，存在 $M>c$，使得当 $d>M$ 时有

$$\left|\int_d^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right| < \frac{\varepsilon}{2(A-a)}.$$

把这两个结果应用到(20)式，得到

$$I_d < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{d\to+\infty} I_d = 0$，这就证明了(19)式. □

例 5 计算

$$I = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\frac{\sin bx - \sin ax}{x}\mathrm{d}x \quad (p>0, b>a).$$

解 因为 $\dfrac{\sin bx-\sin ax}{x}=\int_a^b\cos xy\mathrm{d}y$，所以

$$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\left(\int_a^b\cos xy\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b\mathrm{e}^{-px}\cos xy\mathrm{d}y. \tag{21}$$

由于 $|\mathrm{e}^{-px}\cos xy|\leqslant\mathrm{e}^{-px}$ 及反常积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x$ 收敛，根据魏尔斯特拉斯 M 判别法，含参量反常积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\cos xy\mathrm{d}x$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛. 由于 $\mathrm{e}^{-px}\cos xy$ 在 $[0,+\infty)\times[a,b]$ 上连续，根据定理 19.11 交换积分(21)的顺序，积分 I 的值不变. 于是

$$I=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\cos xy\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{p}{p^2+y^2}\mathrm{d}y$$
$$=\arctan\frac{b}{p}-\arctan\frac{a}{p}.$$

□

例 6 计算 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x$.

解 在上例中，令 $b=0$，则有

$$F(p)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x=\arctan\frac{a}{p}\quad(p>0). \tag{22}$$

由阿贝耳判别法可得上述含参量反常积分在 $p\geqslant0$ 上一致收敛. 于是由定理 19.9，$F(p)$ 在 $p\geqslant0$ 上连续，且

$$F(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x.$$

又由(22)式

$$F(0)=\lim_{p\to0^+}F(p)=\lim_{p\to0^+}\arctan\frac{a}{p}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}a.$$

□

例 7 计算

$$\varphi(r)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos rx\mathrm{d}x. \tag{23}$$

解 由于 $|\mathrm{e}^{-x^2}\cos rx|\leqslant\mathrm{e}^{-x^2}$ 对任一实数 r 成立及反常积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 收

敛[①],所以积分(23)在 $r\in(-\infty,+\infty)$上收敛.

考察含参量反常积分

$$\int_0^{+\infty}(e^{-x^2}\cos rx)'_r dx=\int_0^{+\infty}-xe^{-x^2}\sin rx dx. \tag{24}$$

由于$|-xe^{-x^2}\sin rx|\leqslant xe^{-x^2}$对一切 $x\geqslant 0$, $-\infty<r<+\infty$成立及反常积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$ 收敛,根据魏尔斯特拉斯 M 判别法,含参量积分(24)在 $(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

综合上述结果由定理 19.10 即得

$$\begin{aligned}\varphi'(r)&=\int_0^{+\infty}-xe^{-x^2}\sin rx dx=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A-xe^{-x^2}\sin rx dx\\&=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-x^2}\sin rx\Big|_0^A-\frac{1}{2}\int_0^A re^{-x^2}\cos rx dx\right)\\&=-\frac{r}{2}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos rx dx=-\frac{r}{2}\varphi(r).\end{aligned}$$

于是有

$$\ln\varphi(r)=-\frac{r^2}{4}+\ln c,$$

$$\varphi(r)=ce^{-\frac{r^2}{4}}.$$

从而 $\varphi(0)=c$,又由(23)式, $\varphi(0)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 所以 $c=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,因此得到

$$\varphi(r)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{r^2}{4}}.$$ □

最后简略地提一下关于含参量无界函数非正常积分.设 $f(x,y)$在区域 $R=[a,b]\times[c,d)$上有定义.若对 x 的某些值,$y=d$ 为函数 $f(x,y)$的瑕点,则称

$$\int_c^d f(x,y)dy \tag{25}$$

为**含参量 x 的无界函数反常积分**,或简称为**含参量反常积分**.若对每一个 $x\in[a,b]$,积分(25)都收敛,则其积分值是 x 在$[a,b]$上取值的函数.含参量反常积分(25)在$[a,b]$上一致收敛的定义是:

定义 2 对任给正数 ε,总存在某正数 $\delta<d-c$,使得当 $0<\eta<\delta$ 时,对一

① 关于反常积分$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ 的收敛性及其值等于$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$的证明将在第二十二章“反常二重积分”一节中给出.

切 $x\in[a,b]$,都有

$$\left|\int_{d-\eta}^{d} f(x,y)\mathrm{d}y\right| < \varepsilon,$$

则称含参量反常积分(25)在$[a,b]$上一致收敛.

读者可参照含参量无穷限反常积分的办法建立相应的含参量无界函数反常积分的一致收敛性判别法,并讨论它们的性质,这里不再赘述了.

习　　题

1. 证明下列各题:

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛;

(2) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2y}\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$ $(a>0)$上一致收敛;

(3) $\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y$

(i) 在$[a,b]$ $(a>0)$上一致收敛;

(ii) 在$[0,b]$上不一致收敛;

(4) $\int_0^1\ln(xy)\mathrm{d}y$ 在$\left[\frac{1}{b},b\right]$ $(b>1)$ 上一致收敛;

(5) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 在$(-\infty,b]$ $(b<1)$上一致收敛.

2. 从等式 $\int_a^b\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}$ 出发,计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x\quad(b>a>0).$$

3. 证明函数

$$F(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}x$$

在$(-\infty,+\infty)$上连续.

$\left(\text{提示:证明中可利用公式}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\right)$

4. 求下列积分:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-a^2x^2}-\mathrm{e}^{-b^2x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$ $\left(\text{提示:可利用公式}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$;

(2) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\frac{\sin xt}{t}\mathrm{d}t$;

(3) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\frac{1-\cos xy}{x^2}\mathrm{d}x$.

5. 回答下列问题：

(1) 对极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_0^{+\infty} 2xye^{-xy^2}dy$ 能否施行极限与积分运算顺序的交换来求解？

(2) 对 $\int_0^1 dy\int_0^{+\infty}(2y-2xy^3)e^{-xy^2}dx$ 能否运用积分顺序交换来求解？

(3) 对 $F(x)=\int_0^{+\infty} x^3e^{-x^2y}dy$ 能否运用积分与求导运算顺序交换来求解？

6. 应用 $\int_0^{+\infty} e^{-at^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-\frac{1}{2}}\quad(a>0)$，证明

(1) $\int_0^{+\infty} t^2e^{-at^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{4}a^{-\frac{3}{2}}$；

(2) $\int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-at^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$.

7. 应用 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}$，求 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$.

8. 设 $f(x,y)$ 为 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 上连续非负函数，

$$I(x)=\int_0^{+\infty} f(x,y)dy$$

在 $[a,b]$ 上连续，证明 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

9. 设在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 内成立不等式 $|f(x,y)|\leqslant F(x,y)$. 若 $\int_a^{+\infty}F(x,y)dx$ 在 $y\in[c,d]$ 上一致收敛，证明 $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 在 $y\in[c,d]$ 上一致收敛且绝对收敛.

§3 欧拉积分

含参量积分：

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx,\ s>0,\tag{1}$$

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\ p>0,\ q>0\tag{2}$$

在应用中经常出现，它们统称为**欧拉积分**，其中前者又称为**格马**(Gamma)**函数**（或写作 Γ 函数[①]），后者称为**贝塔**(Beta)**函数**（或写作 B 函数）. 下面我们分别讨论这两个函数的性质.

一 Γ 函数

Γ 函数(1)可写成如下两个积分之和：

① 为与第二版一致，本书的 Γ 函数、B 函数均用斜体希腊文，也有些书是用正体希腊文的.

$$\Gamma(s)=\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=I(s)+J(s),$$

其中 $I(s)$当 $s\geqslant 1$ 时是正常积分,当 $0<s<1$ 时是收敛的无界函数反常积分(可用柯西判别法推得);$J(s)$当 $s>0$ 时是收敛的无穷限反常积分(也可用柯西判别法推得).所以含参量积分(1)在 $s>0$ 时收敛,即 Γ 函数的定义域为 $s>0$.

1. $\Gamma(s)$在定义域 $s>0$ 内连续且可导

在任何闭区间$[a,b]$$(a>0)$上,对于函数 $I(s)$,当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时有 $x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\leqslant x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}$,由于 $\int_0^1 x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛,从而 $I(s)$在$[a,b]$上一致收敛;对于 $J(s)$,当 $1\leqslant x<+\infty$时,有 $x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\leqslant x^{b-1}\mathrm{e}^{-x}$,由于 $\int_1^{+\infty}x^{b-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛,从而 $J(s)$在$[a,b]$上也一致收敛.于是 $\Gamma(s)$在 $s>0$ 上连续.

用上述相同的方法考察积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}(x^{s-1}\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x.$$

它在任何闭区间$[a,b]$$(a>0)$上一致收敛.于是由定理 19.10 得到 $\Gamma(s)$在$[a,b]$上可导,由 a,b 的任意性,$\Gamma(s)$在 $s>0$ 上可导,且

$$\Gamma'(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x,\ s>0.$$

仿照上面的办法,还可推得 $\Gamma(s)$在 $s>0$ 上存在任意阶导数:

$$\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^n\mathrm{d}x,\ s>0.$$

2. 递推公式 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$

对下述积分应用分部积分法,有

$$\begin{aligned}\int_0^A x^s\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x&=-x^s\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^A+s\int_0^A x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\\&=-A^s\mathrm{e}^{-A}+s\int_0^A x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

让 $A\to+\infty$就得到 Γ 函数的递推公式:

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s).\tag{3}$$

设 $n<s\leqslant n+1$,即 $0<s-n\leqslant 1$,应用递推公式(3)n 次可得到

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1)&=s\Gamma(s)=s(s-1)\Gamma(s-1)=\cdots\\&=s(s-1)\cdots(s-n)\Gamma(s-n).\end{aligned}\tag{4}$$

公式(3)还指出,如果已知 $\Gamma(s)$在 $0<s\leqslant 1$ 上的值,那么在其他范围内的函数值可由它计算出来.

若 s 为正整数 $n+1$,则(4)式可写成

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)\cdots 2\cdot 1\Gamma(1)=n!\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=n!. \tag{5}$$

3. Γ 函数图象的讨论

对一切 $s>0$,$\Gamma(s)$和 $\Gamma''(s)$恒大于 0,因此 $\Gamma(s)$的图形位于 x 轴上方,且是向下凸的. 因为 $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$,所以 $\Gamma(s)$在 $s>0$ 上存在唯一的极小点 x_0 且 $x_0\in(1,2)$. 又 $\Gamma(s)$在$(0,x_0)$内严格减;在$(x_0,+\infty)$内严格增.

由于 $\Gamma(s)=\dfrac{s\Gamma(s)}{s}=\dfrac{\Gamma(s+1)}{s}$ $(s>0)$及 $\lim\limits_{s\to0^+}\Gamma(s+1)=\Gamma(1)=1$,故有

$$\lim_{s\to0^+}\Gamma(s)=\lim_{s\to0^+}\frac{\Gamma(s+1)}{s}=+\infty.$$

由(5)式及 $\Gamma(s)$在$(x_0,+\infty)$上严格增可推得

$$\lim_{s\to+\infty}\Gamma(s)=+\infty.$$

综上所述,Γ 函数的图象如图 19－2 中 $s>0$ 部分所示.

4. 延拓 $\Gamma(s)$

改写递推公式(3)为

$$\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+1)}{s}. \tag{6}$$

当 $-1<s<0$ 时,(6)式右端有意义,于是可应用(6)式来定义左端函数 $\Gamma(s)$在$(-1,0)$内的值,并且可推得这时 $\Gamma(s)<0$.

用同样的方法,利用 $\Gamma(s)$已在$(-1,0)$内有定义这一事实,由(6)式又可定义 $\Gamma(s)$在$(-2,-1)$内的值,而且这时 $\Gamma(s)>0$. 依此下去可把 $\Gamma(s)$延拓到整个数轴(除了 $s=0,-1,-2,\cdots$以外),其图象如图 19－2 所示.

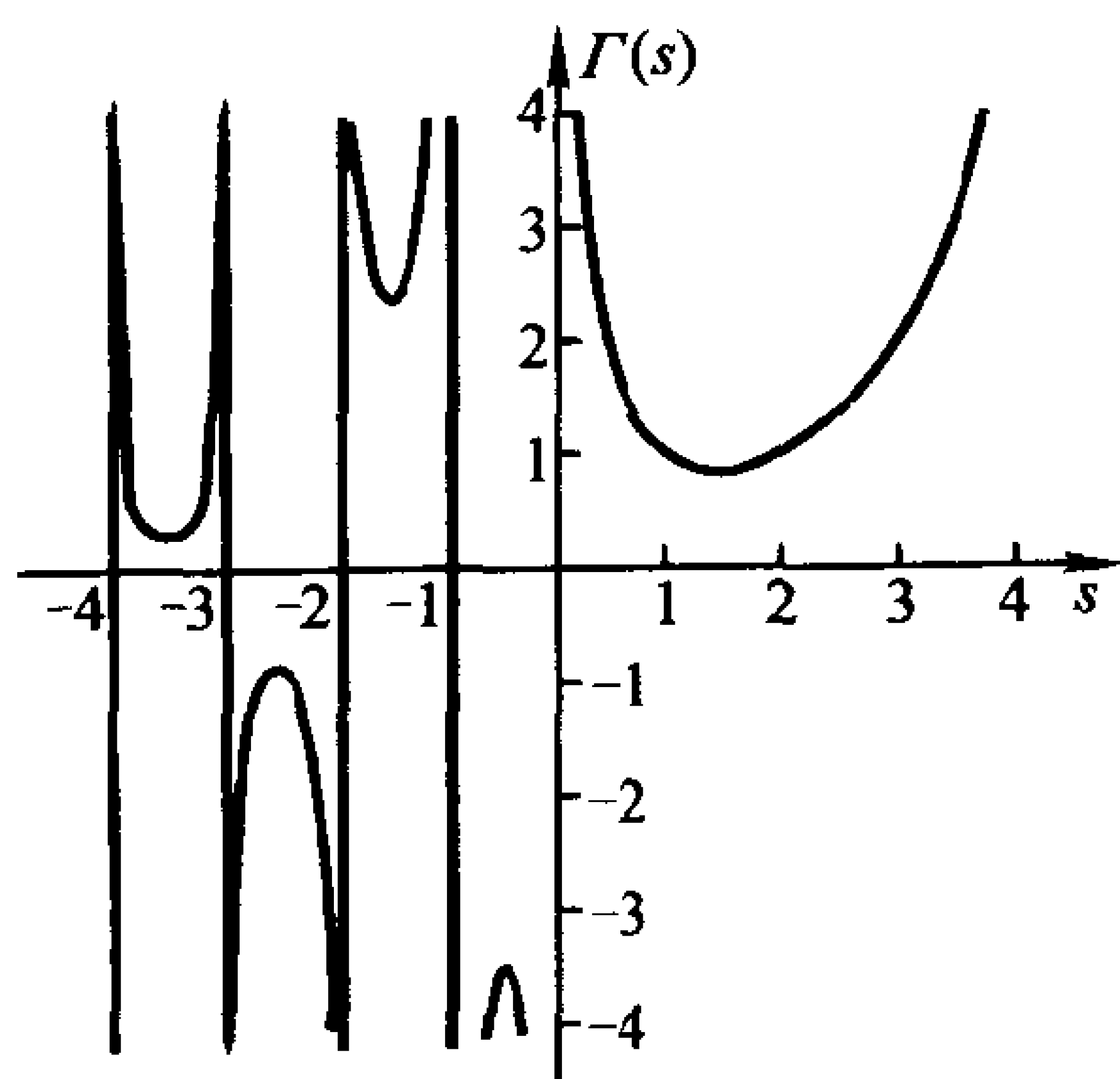


图 19－2

5. $\Gamma(s)$的其他形式

在应用上,$\Gamma(s)$也常以如下形式出现. 如令 $x=y^2$,则有

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}y^{2s-1}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y \quad (s>0).$$

令 $x=py$,就有

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=p^s\int_0^{+\infty}y^{s-1}\mathrm{e}^{-py}\mathrm{d}y \quad (s>0,p>0). \tag{7}$$

二 B 函数

B 函数(2)当 $p<1$ 时,是以 $x=0$ 为瑕点的无界函数反常积分;当 $q<1$ 时,是以 $x=1$ 为瑕点的无界函数反常积分. 应用柯西判别法可证得当 $p>0,q>0$

时这两个无界函数反常积分都收敛,所以函数 $B(p,q)$ 的定义域为 $p>0,q>0$.

1. $B(p,q)$ 在定义域 $p>0,q>0$ 内连续

由于对任何 $p_0>0,q_0>0$ 成立不等式

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\leqslant x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1},\ p\geqslant p_0,\ q\geqslant q_0,$$

而积分 $\int_0^1 x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}\mathrm{d}x$ 收敛,故由魏尔斯特拉斯 M 判别法知 $B(p,q)$ 在 $p_0\leqslant p<+\infty,q_0\leqslant q<+\infty$ 上一致收敛.因而推得 $B(p,q)$ 在 $p>0,q>0$ 内连续.

2. 对称性: $B(p,q)=B(q,p)$

作变换 $x=1-y$,得

$$\begin{aligned}B(p,q)&=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1(1-y)^{p-1}y^{q-1}\mathrm{d}y=B(q,p).\end{aligned}$$

3. 递推公式

$$B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)\quad(p>0,q>1),\tag{8}$$

$$B(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q)\quad(p>1,q>0),\tag{9}$$

$$B(p,q)=\frac{(p-1)(q-1)}{(p+q-1)(p+q-2)}B(p-1,q-1)\quad(p>1,q>1).$$

证 下面只证公式(8),公式(9)可由对称性及公式(8)推得,而最后一个公式则可由公式(8),(9)推得.

当 $p>0,q>1$ 时,有

$$\begin{aligned}B(p,q)&=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x\\&=\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{p}\bigg|_0^1+\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}\mathrm{d}x\\&=\frac{q-1}{p}\int_0^1[x^{p-1}-x^{p-1}(1-x)](1-x)^{q-2}\mathrm{d}x\\&=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}\mathrm{d}x-\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x\\&=\frac{q-1}{p}B(p,q-1)-\frac{q-1}{p}B(p,q),\end{aligned}$$

移项并整理就得(8). □

4. $B(p,q)$ 的其他形式

在应用中 B 函数也常以如下形式出现.如令 $x=\cos^2\varphi$,则有

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2q-1}\varphi\cos^{2p-1}\varphi\mathrm{d}\varphi. \tag{10}$$

令 $x=\dfrac{y}{1+y},1-x=\dfrac{1}{1+y},\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2}$,则有

$$B(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\mathrm{d}y.$$

考察 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\mathrm{d}y$.令 $y=\dfrac{1}{t}$,则有

$$\int_1^{+\infty}\frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\mathrm{d}y=-\int_1^0\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\mathrm{d}t.$$

所以

$$B(p,q)=\int_0^1\frac{y^{p-1}+y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}\mathrm{d}y.$$

三 Γ 函数与 B 函数之间的关系

当 m,n 为正整数时,反复应用 B 函数的递推公式可得

$$\begin{aligned}B(m,n)&=\frac{n-1}{m+n-1}B(m,n-1)\\&=\frac{n-1}{m+n-1}\frac{n-2}{m+n-2}\cdots\frac{1}{m+1}B(m,1).\end{aligned}$$

又由于 $B(m,1)=\displaystyle\int_0^1x^{m-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{m}$,所以

$$\begin{aligned}B(m,n)&=\frac{n-1}{m+n-1}\frac{n-2}{m+n-2}\cdots\frac{1}{m+1}\frac{1}{m}\cdot\frac{(m-1)!}{(m-1)!}\\&=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!},\end{aligned}$$

即

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}. \tag{11}$$

对于任何正实数 p,q 也有相同的关系:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\quad(p>0,q>0). \tag{12}$$

这个关系式我们将在第二十一章§8中加以证明.

习　　题

1. 计算 $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right),\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right),\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right),\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)$.

2. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}u\,du$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}u\,du$.

3. 证明下列各式：

(1) $\Gamma(a)=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{a-1}dx,\ a>0$;

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx=\Gamma(a)\Gamma(1-a),\ 0<a<1$;

(3) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^r)^{q-1}dx=\frac{1}{r}B\left(\frac{p}{r},q\right),\ p>0,q>0,r>0$;

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

4. 证明公式

$$B(p,q)=B(p+1,q)+B(p,q+1).$$

---

5. 已知 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$,试证

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

6. 试将下列积分用欧拉积分表示,并指出参量的取值范围：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx$;

(2) $\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$.

总 练 习 题

1. 在区间 $1\leqslant x\leqslant 3$ 内用线性函数 $a+bx$ 近似代替 $f(x)=x^2$,试求 a,b 使得积分 $\int_1^3(a+bx-x^2)^2dx$ 取最小值.

2. 设 $u(x)=\int_0^1 k(x,y)v(y)dy$,其中

$$k(x,y)=\begin{cases}x(1-y), & x\leqslant y,\\ y(1-x), & x>y\end{cases}$$

与 $v(y)$为$[0,1]$上的连续函数,证明

$$u''(x)=-v(x).$$

3. 求函数

$$F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-a^2)x}{x}dx$$

的不连续点,并作函数 $F(a)$的图象.

4. 证明:若$\int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$在$x\geqslant a$时一致收敛于$F(x)$,且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,t)=\varphi(t)$对任何$t\in[a,b]\subset(0,+\infty)$一致地成立,则

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

5. 设$f(x)$为二阶可微函数,$F(x)$为可微函数.证明函数

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\mathrm{d}z$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

及初值条件$u(x,0)=f(x)$,$u_t(x,0)=F(x)$.

6. 证明:

(1) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{6}$;

(2) $\int_0^u \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n^2}$, $0\leqslant u\leqslant 1$.

第二十章　曲 线 积 分

§1　第一型曲线积分

以前讨论的定积分研究的是定义在直线段上函数的积分.本章将研究定义在平面或空间曲线段上函数的积分.

一　第一型曲线积分的定义

设某物体的密度函数 $f(P)$ 是定义在 Ω 上的连续函数.当 Ω 是直线段时,应用定积分就能计算得该物体的质量.

现在研究当 Ω 是平面或空间中某一可求长度的曲线段时物体的质量的计算问题.首先对 Ω 作分割,把 Ω 分成 n 个可求长度的小曲线段 $\Omega_i(i=1,2,\cdots,n)$,并在每一个 Ω_i 上任取一点 P_i.由于 $f(P)$ 为 Ω 上的连续函数,故当 Ω_i 的弧长都很小时,每一小段 Ω_i 的质量可近似地等于 $f(P_i)\Delta\Omega_i$,其中 $\Delta\Omega_i$ 为小曲线段 Ω_i 的长度.于是在整个 Ω 上的质量就近似地等于和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\Omega_i .$$

当对 Ω 的分割越来越细密(即 $d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta\Omega_i\to 0$)时,上述和式的极限就应是该物体的质量.

由上面看到,求具有某种物质的曲线段的质量,与求直线段的质量一样,也是通过"分割、近似求和、取极限"来得到的.下面给出这类积分的定义.

定义 1　设 L 为平面上可求长度的曲线段,$f(x,y)$ 为定义在 L 上的函数.对曲线 L 作分割 T,它把 L 分成 n 个可求长度的小曲线段 $L_i(i=1,2,\cdots,n)$,L_i 的弧长记为 Δs_i,分割 T 的细度为 $\|T\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta s_i$,在 L_i 上任取一点 $(\xi_i,\eta_i)(i=1,2,\cdots,n)$.若有极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i = J$$

且 J 的值与分割 T 与点 (ξ_i,η_i) 的取法无关,则称此极限为 $f(x,y)$ 在 L 上的**第一型曲线积分**,记作

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s. \tag{1}$$

若 L 为空间可求长曲线段，$f(x,y,z)$为定义在 L 上的函数，则可类似地定义 $f(x,y,z)$在空间曲线 L 上的第一型曲线积分，并且记作

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s. \tag{2}$$

于是前面讲到的质量分布在平面或空间曲线段 L 上的物体的质量可由第一型曲线积分(1)或(2)求得.

关于第一型曲线积分也和定积分一样具有下述一些重要性质. 下面列出平面上第一型曲线积分的性质，对于空间第一型曲线积分的性质，读者可自行仿此写出.

1. 若 $\int_L f_i(x,y)\mathrm{d}s(i=1,2,\cdots,k)$ 存在，$c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为常数，则 $\int_L \sum_{i=1}^{k} c_i f_i(x,y)\mathrm{d}s$ 也存在，且

$$\int_L \sum_{i=1}^{k} c_i f_i(x,y)\mathrm{d}s = \sum_{i=1}^{k} c_i \int_L f_i(x,y)\mathrm{d}s.$$

2. 若曲线段 L 由曲线 $L_1, L_2, \cdots, L_k$ 首尾相接而成，且 $\int_{L_i} f(x,y)\mathrm{d}s(i=1,2,\cdots,k)$ 都存在，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 也存在，且

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \sum_{i=1}^{k}\int_{L_i} f(x,y)\mathrm{d}s.$$

3. 若 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 与 $\int_L g(x,y)\mathrm{d}s$ 都存在，且在 L 上 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s \leqslant \int_L g(x,y)\mathrm{d}s.$$

4. 若 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 存在，则 $\int_L |f(x,y)|\mathrm{d}s$ 也存在，且

$$\left|\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_L |f(x,y)|\mathrm{d}s.$$

5. 若 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 存在，L 的弧长为 s，则存在常数 c，使得

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = cs,$$

这里 $\inf\limits_L f(x,y)\leqslant c\leqslant \sup\limits_L f(x,y)$.

二 第一型曲线积分的计算

定理 20.1 设有光滑曲线

$$L:\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha,\beta],$$

函数 $f(x,y)$为定义在 L 上的连续函数,则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t. \tag{3}$$

证 由弧长公式知道,L 上由 $t=t_{i-1}$到 $t=t_i$ 的弧长

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

由$\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$的连续性与积分中值定理,有

$$\Delta s_i = \sqrt{\varphi'^2(\tau_i')+\psi'^2(\tau_i')}\Delta t_i \quad (t_{i-1} < \tau_i' < t_i).$$

所以

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i''),\psi(\tau_i''))\sqrt{\varphi'^2(\tau_i')+\psi'^2(\tau_i')}\Delta t_i,$$

这里 $t_{i-1}\leqslant\tau_i',\tau_i''\leqslant t_i$. 设

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i''),\psi(\tau_i''))\left[\sqrt{\varphi'^2(\tau_i')+\psi'^2(\tau_i')}-\sqrt{\varphi'^2(\tau_i'')+\psi'^2(\tau_i'')}\right]\Delta t_i,$$

则有

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i''),\psi(\tau_i''))\sqrt{\varphi'^2(\tau_i'')+\psi'^2(\tau_i'')}\Delta t_i + \sigma. \tag{4}$$

令 $\Delta t = \max\{\Delta t_1,\Delta t_2,\cdots,\Delta t_n\}$,则当 $\|T\|\to 0$ 时,必有 $\Delta t\to 0$. 现在证明 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\sigma = 0$.

因为复合函数 $f(\varphi(t),\psi(t))$关于 t 连续,所以在闭区间$[\alpha,\beta]$上有界,即存在常数 M,使对一切 $t\in[\alpha,\beta]$都有

$$|f(\varphi(t),\psi(t))|\leqslant M.$$

再由$\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$在$[\alpha,\beta]$上连续,所以它在$[\alpha,\beta]$上一致连续,即对任给的 $\varepsilon>0$,必存在 $\delta>0$,使当 $\Delta t<\delta$ 时有

$$\left|\sqrt{\varphi'^2(\tau_i'')+\psi'^2(\tau_i'')}-\sqrt{\varphi'^2(\tau_i')-\psi'^2(\tau_i')}\right|<\varepsilon,$$

从而

$$|\sigma|\leqslant \varepsilon M\sum_{i=1}^n \Delta t_i = \varepsilon M(b-a),$$

所以

$$\lim_{\Delta t\to 0}\sigma = 0.$$

再由定积分定义,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i''),\psi(\tau_i''))\sqrt{\varphi'^2(\tau_i'')+\psi'^2(\tau_i'')}\Delta t_i$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

因此当在(4)式两边取极限后,即得所要证的(3)式. □

当曲线 L 由方程

$$y=\psi(x),\quad x\in[a,b]$$

表示,且 $\psi(x)$在$[a,b]$上有连续的导函数时,(3)式成为

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,\psi(x))\sqrt{1+\psi'^2(x)}\,\mathrm{d}x; \tag{5}$$

当曲线 L 由方程

$$x=\varphi(y),y\in[c,d]$$

表示,且 $\varphi(y)$在$[c,d]$上有连续导函数时,(3)式成为

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_c^d f(\varphi(y),y)\sqrt{1+\varphi'^2(y)}\,\mathrm{d}y. \tag{6}$$

例 1 设 L 是半圆周

$$L:\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant\pi,$$

试计算第一型曲线积分 $\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s$.

解 $\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_0^\pi a^2\sqrt{a^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,\mathrm{d}t=a^3\pi.$ □

例 2 设 L 是 $y^2=4x$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(1,2)$一段(图 20-1),试计算第一型曲线积分 $\int_L y\mathrm{d}s$.

解
$$\int_L y\mathrm{d}s=\int_0^2 y\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}\,\mathrm{d}y$$
$$=2\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{y^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2$$
$$=\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1).$$ □

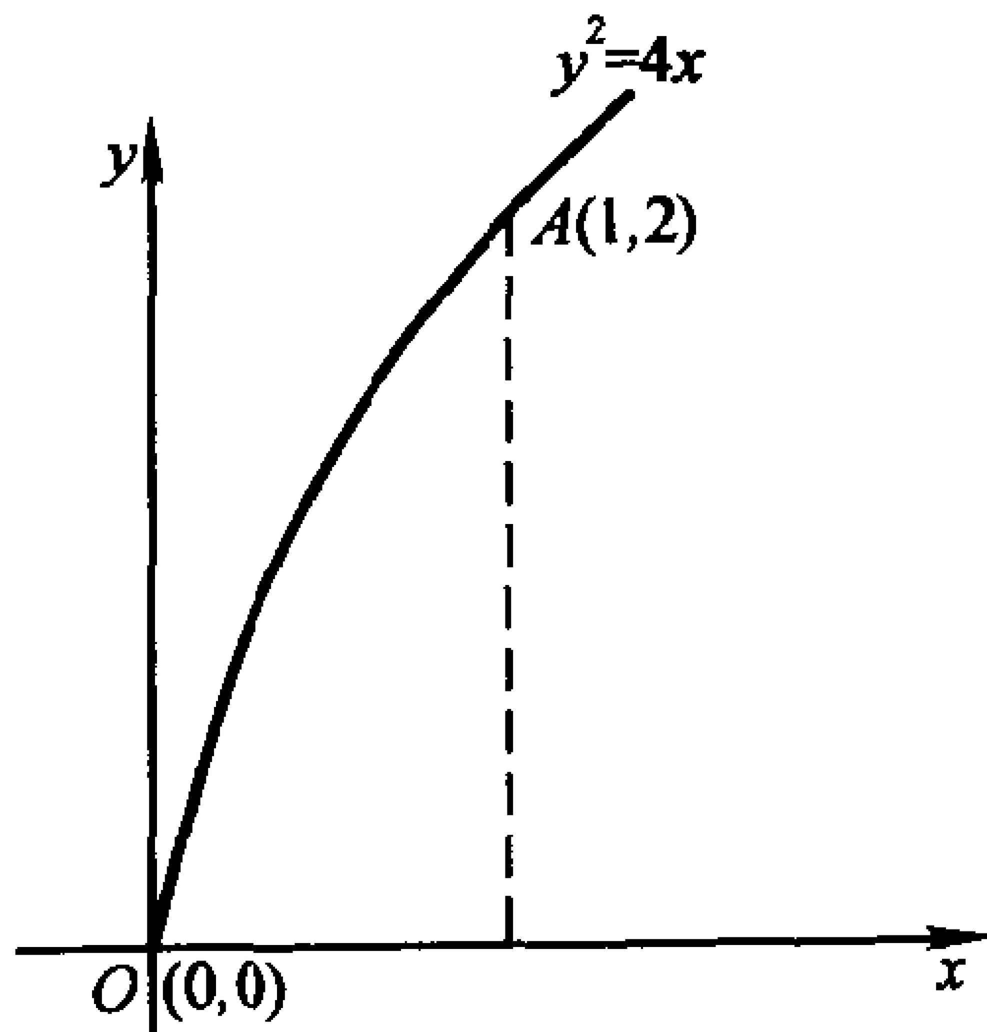


图 20-1

仿照定理 20.1,对于空间曲线积分(2),当曲线 L 由参量方程 $x=\varphi(t),y=\psi(t),z=\chi(t),t\in[\alpha,\beta]$表示时,其计算公式为:

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{7}$$

例3 计算$\int_L x^2\mathrm{d}s$,其中L为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被平面$x+y+z=0$所截得的圆周.

解 由对称性知

$$\int_L x^2\mathrm{d}s=\int_L y^2\mathrm{d}s=\int_L z^2\mathrm{d}s,$$

所以

$$\int_L x^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{a^2}{3}\int_L\mathrm{d}s=\frac{2}{3}\pi a^3.$$ □

习 题

1. 计算下列第一型曲线积分:

(1) $\int_L(x+y)\mathrm{d}s$,其中L是以$O(0,0)$,$A(1,0)$,$B(0,1)$为顶点的三角形;

(2) $\int_L(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s$,其中$L$是以原点为中心,$R$为半径的右半圆周;

(3) $\int_L xy\mathrm{d}s$,其中L为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$在第一象限中的部分;

(4) $\int_L|y|\mathrm{d}s$,其中L为单位圆周$x^2+y^2=1$;

(5) $\int_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$,其中$L$为螺旋线$x=a\cos t$,$y=a\sin t$,$z=bt(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$的一段;

(6) $\int_L xyz\mathrm{d}s$,其中L是曲线$x=t$,$y=\frac{2}{3}\sqrt{2t^3}$,$z=\frac{1}{2}t^2(0\leqslant t\leqslant 1)$的一段;

(7) $\int_L\sqrt{2y^2+z^2}\mathrm{d}s$,其中$L$是$x^2+y^2+z^2=a^2$与$x=y$相交的圆周.

2. 求曲线$x=a$,$y=at$,$z=\frac{1}{2}at^2(0\leqslant t\leqslant 1,a>0)$的质量,设其线密度为$\rho=\sqrt{\frac{2z}{a}}$.

3. 求摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\y=a(1-\cos t)\end{cases}(0\leqslant t\leqslant\pi)$的重心,设其质量分布是均匀的.

---

4. 若曲线以极坐标$\rho=\rho(\theta)(\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2)$表示,试给出计算$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$的公式,并用此公式计算下列曲线积分:

(1) $\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$,其中$L$为曲线$\rho=a\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$的一段;

(2) $\int_L x\mathrm{d}s$,其中L为对数螺线$\rho=a\mathrm{e}^{k\theta}(k>0)$在圆$r=a$内的部分.

5. 证明：若函数 $f(x,y)$ 在光滑曲线 $L: x=x(t), y=y(t), t\in[\alpha,\beta]$ 上连续，则存在点 $(x_0,y_0)\in L$，使得

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = f(x_0,y_0)\Delta L,$$

其中 ΔL 为 L 的弧长.

§2　第二型曲线积分

一　第二型曲线积分的定义

在物理学中还碰到另一种类型的曲线积分问题. 例如一质点受力 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 的作用沿平面曲线 L 从点 A 移动到点 B，求力 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 所作的功(图 20－2).

为此在曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 内插入 $n-1$ 个分点 $M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$，与 $A=M_0, B=M_n$ 一起把有向曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 分成 n 个有向小曲线段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 若记小曲线段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 的弧长为 Δs_i，则分割 T 的细度为

$$\|T\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta s_i.$$

设力 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 在 x 轴和 y 轴方向的投影分别为 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$，那么

$$\boldsymbol{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)).$$

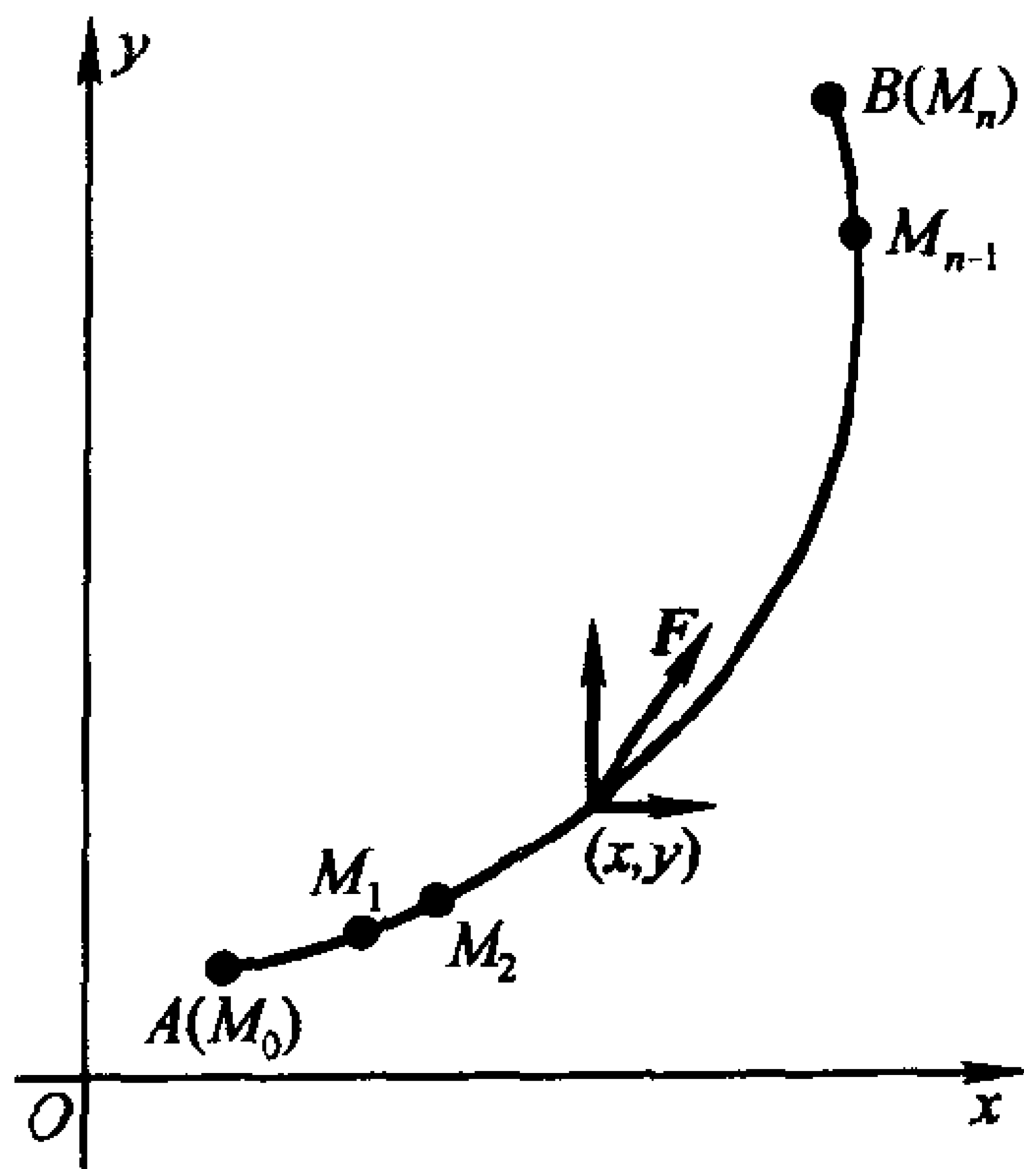


图 20－2

又设小曲线段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 在 x 轴与 y 轴上的投影分别为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 与 $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$，其中 (x_i, y_i) 与 (x_{i-1}, y_{i-1}) 分别为分点 M_i 与 M_{i-1} 的坐标. 记

$$\boldsymbol{L}_{M_{i-1}M_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i),$$

于是力 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 在小曲线段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上所作的功

$$W_i \approx \boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\boldsymbol{L}_{M_{i-1}M_i} = P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i,$$

其中 (ξ_i,η_i) 为小曲线段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上任一点. 因而力 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 沿曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 所作的功近似地等于

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i \approx \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i.$$

当细度 $\|T\|\to 0$ 时，上式右边和式的极限就应该是所求的功. 这种类型的和式极限就是下面所要讨论的第二型曲线积分.

定义 1　设函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 定义在平面有向可求长度曲线 $L: \overset{\frown}{AB}$ 上. 对 L 的任一分割 T，它把 L 分成 n 个小曲线段

$$\widehat{M_{i-1}M_i} \quad (i = 1,2,\cdots,n),$$

其中 $M_0 = A, M_n = B$. 记各小曲线段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 的弧长为 Δs_i, 分割 T 的细度 $\|T\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta s_i$. 又设 T 的分点 M_i 的坐标为 (x_i, y_i), 并记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$. 在每个小曲线段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上任取一点 (ξ_i, η_i), 若极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i$$

存在且与分割 T 与点 (ξ_i, η_i) 的取法无关, 则称此极限为函数 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 沿有向曲线 L 上的**第二型曲线积分**, 记为

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y \quad 或 \quad \int_{AB} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y. \tag{1}$$

上述积分(1)也可写作

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + \int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$$

或

$$\int_{AB} P(x,y)\mathrm{d}x + \int_{AB} Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

为书写简洁起见, (1)式常简写成

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \quad 或 \quad \int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

若 L 为封闭的有向曲线, 则记为

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y. \tag{2}$$

若记 $\boldsymbol{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, $\mathrm{d}\boldsymbol{s} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$, 则(1)式可写成向量形式

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \quad 或 \quad \int_{AB} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}. \tag{3}$$

于是, 力 $\boldsymbol{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ 沿有向曲线 $L:\widehat{AB}$ 对质点所作的功为

$$W = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

倘若 L 为空间有向可求长度曲线, $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 为定义在 L 上的函数, 则可按上述办法类似地定义沿空间有向曲线 L 上的第二型曲线积分, 并记为

$$\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z, \tag{4}$$

或简写成

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z.$$

当把 $\boldsymbol{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y),R(x,y))$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$ 看作三维向量时,(4)式也可表示成(3)式的向量形式.

第二型曲线积分与曲线 L 的方向有关.对同一曲线,当方向由 A 到 B 改为由 B 到 A 时,每一小曲线段的方向都改变,从而所得的 $\Delta x_i,\Delta y_i$ 也随之改变符号,故有

$$\int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\int_{BA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y. \tag{5}$$

而第一型曲线积分的被积表达式只是函数 $f(x,y)$ 与弧长的乘积,它与曲线 L 的方向无关.这是两种类型曲线积分的一个重要区别.

类似于第一型曲线积分,第二型曲线积分也有如下一些主要性质:

1. 若 $\int_L P_i\mathrm{d}x + Q_i\mathrm{d}y \quad (i=1,2,\cdots,k)$ 存在,则 $\int_L \left(\sum_{i=1}^k c_iP_i\right)\mathrm{d}x + \left(\sum_{i=1}^k c_iQ_i\right)\mathrm{d}y$ 也存在,且

$$\int_L \left(\sum_{i=1}^k c_iP_i\right)\mathrm{d}x + \left(\sum_{i=1}^k c_iQ_i\right)\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^k c_i\left(\int_L P_i\mathrm{d}x + Q_i\mathrm{d}y\right),$$

其中 $c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为常数.

2. 若有向曲线 L 是由有向曲线 $L_1,L_2,\cdots,L_k$ 首尾相接而成,且 $\int_{L_i} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \quad (i=1,2,\cdots,k)$ 存在,则 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 也存在,且

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^k \int_{L_i} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

二 第二型曲线积分的计算

与第一型曲线积分一样,第二型曲线积分也可化为定积分来计算.

设平面曲线

$$L:\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t\in[\alpha,\beta],$$

其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导函数,且点 A 与 B 的坐标分别为 $(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))$ 与 $(\varphi(\beta),\psi(\beta))$.又设 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 为 L 上的连续函数,则沿 L 从 A 到 B 的第二型曲线积分

$$\begin{aligned}&\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y \\ =& \int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{6}$$

读者可仿照§1中定理20.1的方法分别证明

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t,$$

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\mathrm{d}t,$$

由此便可得公式(6),这里不再赘述了.

对于沿封闭曲线 L 的第二型曲线积分(2)的计算,可在 L 上任意选取一点作为起点,沿 L 所指定的方向前进,最后回到这一点.

例1 计算 $\int_L xy\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y$,其中 L 分别沿如图20-3中路线

(i) 直线 AB;

(ii) ACB(抛物线:$y=2(x-1)^2+1$);

(iii) $ADBA$(三角形周界).

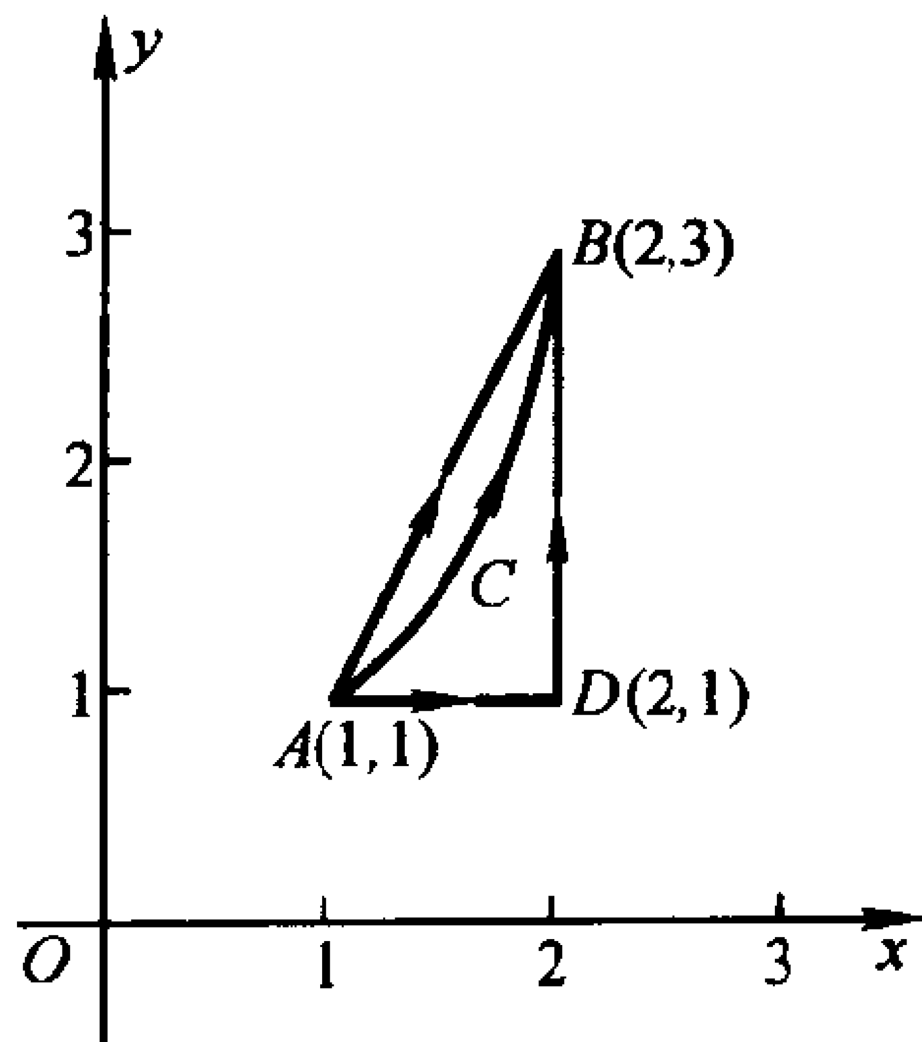


图20-3

解 (i) 直线 AB 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1+t, \\ y = 1+2t, \end{cases} \quad t\in[0,1].$$

故由公式(6)可得

$$\begin{aligned} &\int_{AB} xy\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 [(1+t)(1+2t)+2t]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (1+5t+2t^2)\mathrm{d}t = \frac{25}{6}. \end{aligned}$$

(ii) 曲线 ACB 为抛物线 $y=2(x-1)^2+1, 1\leqslant x\leqslant 2$,所以

$$\begin{aligned} &\int_{ACB} xy\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y \\ &= \int_1^2 \{x[2(x-1)^2+1] + [2(x-1)^2+1-x]4(x-1)\}\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 (10x^3-32x^2+35x-12)\mathrm{d}x = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

(iii) 这里 L 是一条封闭曲线,故可从 A 开始,应用上段的性质2,分别求沿 AD,DB 和 BA 上的线积分然后相加即可得到所求之曲线积分.

由于沿直线 AD:$x=x, y=1(1\leqslant x\leqslant 2)$的线积分为

$$\int_{AD} xy\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y = \int_{AD} xy\mathrm{d}x = \int_1^2 x\mathrm{d}x = \frac{3}{2}.$$

沿直线 $DB: x=2, y=y(1\leqslant y\leqslant 3)$ 的线积分为

$$\int_{DB} xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_{DB}(y-x)\mathrm{d}y=\int_1^3(y-2)\mathrm{d}y=0.$$

沿直线 BA 的线积分可由(i)及公式(5)得到

$$\int_{BA} xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=-\int_{AB} xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=-\frac{25}{6}.$$

所以

$$\oint_L xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\frac{3}{2}+0+\left(-\frac{25}{6}\right)=-\frac{8}{3}.$$ □

例 2 计算 $\int_L x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x$，这里 L：(i) 沿抛物线 $y=2x^2$，从 O 到 B 的一段(图 20－4)；(ii) 沿直线段 $OB: y=2x$；(iii) 沿封闭曲线 $OABO$.

解 (i) $\int_L x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1[x(4x)+2x^2]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 6x^2\mathrm{d}x=\frac{6}{3}=2.$$

(ii) $\int_L x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=\int_0^1(2x+2x)\mathrm{d}x$

$$=4\cdot\frac{1}{2}=2.$$

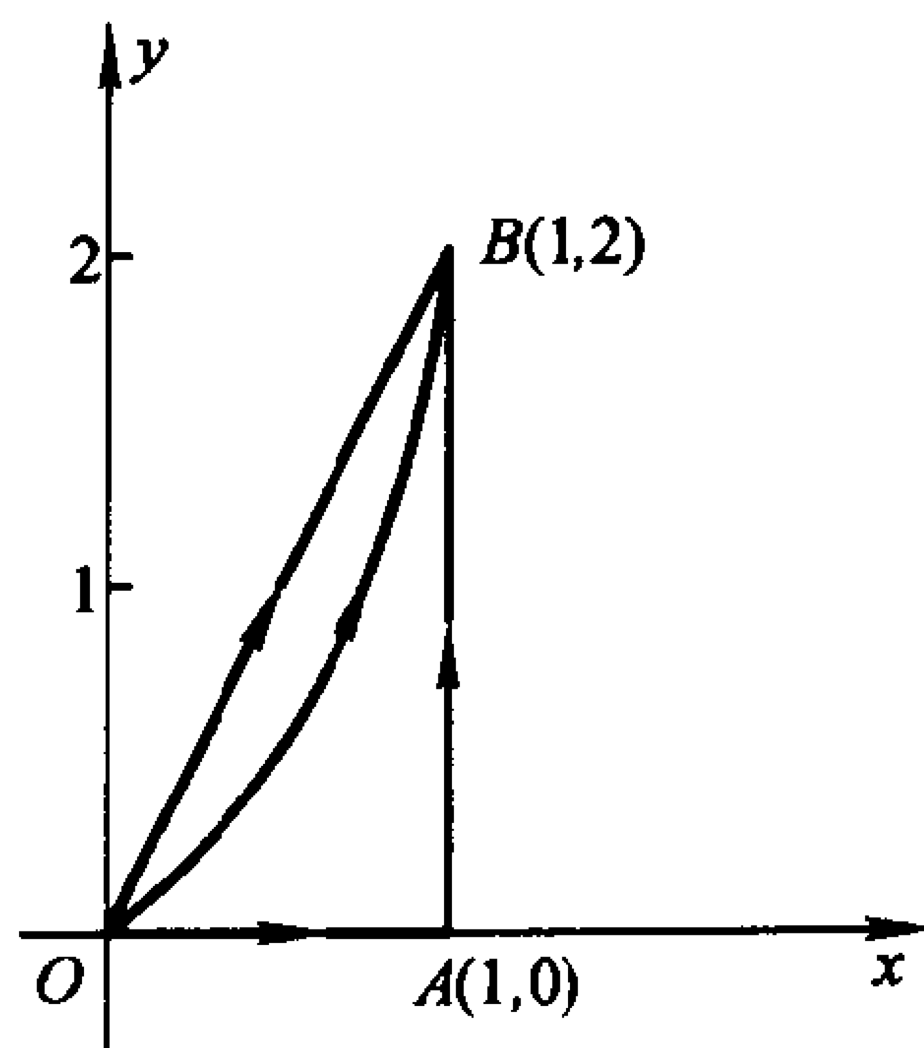


图 20－4

(iii) 在 OA 一段上，$y=0, 0\leqslant x\leqslant 1$；在 AB 一段上，$x=1, 0\leqslant y\leqslant 2$；在 BO 一段上与(ii)一样是 $y=2x$ 从 $x=1$ 到 $x=0$ 的一段. 所以

$$\int_{OA} x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=\int_0^1 0\mathrm{d}x=0,$$

$$\int_{AB} x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=\int_0^2 1\mathrm{d}x=2,$$

$$\int_{BO} x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=-\int_{OB} x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=-2 \quad (见(ii)).$$

因此

$$\oint_L x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=\int_{OA}+\int_{AB}+\int_{BO}=0+2-2=0.$$ □

对于沿空间有向曲线的第二型曲线积分的计算公式也与(6)式相仿. 设空间有向光滑曲线 L 的参量方程为

$$L:\begin{cases}x = x(t),\\ y = y(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,\\ z = z(t),\end{cases}$$

起点为$(x(\alpha),y(\alpha),z(\alpha))$,终点为$(x(\beta),y(\beta),z(\beta))$,则

$$\begin{aligned}&\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z\\ &= \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) +\\ &\quad R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{7}$$

这里要注意曲线方向与积分上下限的确定应该一致.

例 3 计算第二型曲线积分

$$I = \int_L xy\mathrm{d}x + (x - y)\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z,$$

L 是螺旋线:$x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$ 从 $t=0$ 到 $t=\pi$ 上的一段.

解 由公式(7),

$$\begin{aligned}I &= \int_0^\pi(- a^3\cos t\sin^2 t + a^2\cos^2 t - a^2\sin t\cos t + a^2 b\cos^2 t)\mathrm{d}t\\ &= \left[-\frac{1}{3}a^3\sin^3 t - \frac{1}{2}a^2\sin^2 t + \frac{1}{2}a^2(1+b)\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\right]_0^\pi\\ &= \frac{1}{2}a^2(1+b)\pi.\end{aligned}$$

□

例 4 求在力 $\boldsymbol{F}(y,-x,x+y+z)$ 作用下,

(i) 质点由 A 沿螺旋线 L_1 到 B 所作的功(图 20-5),其中 L_1: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

(ii) 质点由 A 沿直线 L_2 到 B 所作的功.

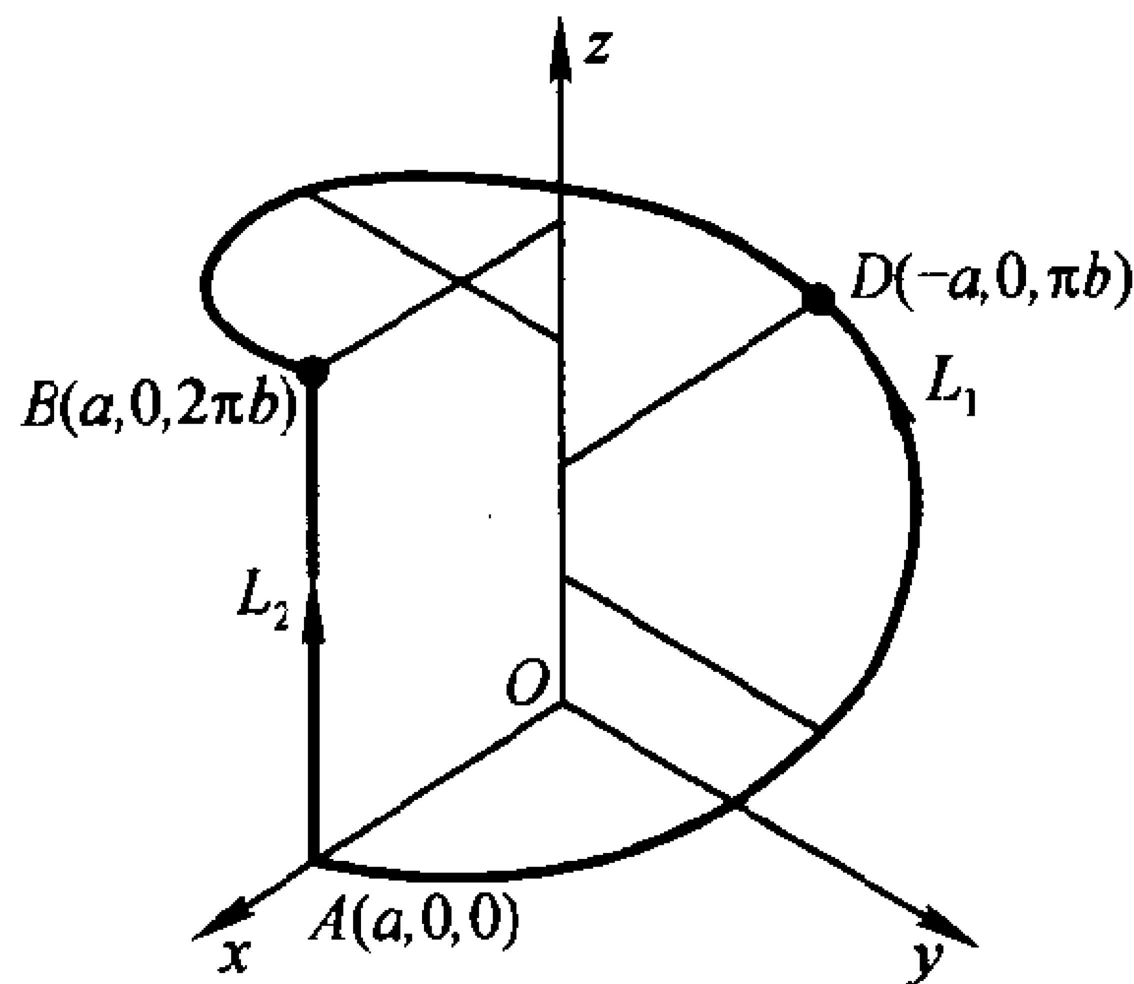


图 20-5

解 如本节开头所述,在空间曲线 L 上力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$W = \int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_L y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y + (x + y + z)\mathrm{d}y.$$

(i) 由于 $\mathrm{d}x = -a\sin t\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = a\cos t\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}z = b\mathrm{d}t$,所以

$$W = \int_0^{2\pi}(- a^2\sin^2 t - a^2\cos^2 t + ab\cos t + ab\sin t + b^2 t)\mathrm{d}t$$

$$= 2\pi(\pi b^2 - a^2).$$

(ii) L_2 的参量方程为

$$x = a, y = 0, z = t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi b.$$

由于 $dx = 0, dy = 0, dz = dt$，所以

$$W = \int_0^{2\pi b} (a + t)dt = 2\pi b(a + \pi b).$$ □

*三 两类曲线积分的联系

虽然第一型曲线积分与第二型曲线积分来自不同的物理原型，且有着不同的特性，但在一定条件下，如在规定了曲线的方向之后，可以建立它们之间的联系.

设 L 为从 A 到 B 的有向光滑曲线，它以弧长 s 为参数，于是

$$L: \begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \end{cases} \quad 0 \leqslant s \leqslant l,$$

其中 l 为曲线 L 的全长，且点 A 与 B 的坐标分别为 $(x(0), y(0))$ 与 $(x(l), y(l))$. 曲线 L 上每一点的切线方向指向弧长增加的一方. 现以 (t, x)，(t, y) 分别表示切线方向 t 与 x 轴与 y 轴正向的夹角，则在曲线上的每一点的切线方向余弦是

$$\frac{dx}{ds} = \cos(t, x), \quad \frac{dy}{ds} = \cos(t, y). \tag{8}$$

若 $P(x, y)$，$Q(x, y)$ 为曲线 L 上的连续函数，则由(6)式得

$$\begin{aligned} &\int_L P dx + Q dy \\ &= \int_0^l [P(x(s), y(s))\cos(t, x) + Q(x(s), y(s))\cos(t, y)]ds \\ &= \int_L [P(x, y)\cos(t, x) + Q(x, y)\cos(t, y)]ds, \end{aligned} \tag{9}$$

最后一个等式是根据第一型曲线积分化为定积分的公式.

这里必须指出，当(9)式左边第二型曲线积分中 L 改变方向时，积分值改变符号，相应在(9)式右边第一型曲线积分中，曲线上各点的切线方向指向相反的方向(即指向弧长减少的方向). 这时夹角 (t, x) 和 (t, y) 分别与原来的夹角相差一个弧度 π，从而 $\cos(t, x)$ 和 $\cos(t, y)$ 都要变号. 因此，一旦方向确定了，公式(9)总是成立的.

这样，根据条件(8)和公式(9)便建立了两种不同类型曲线积分之间的联系.

习 题

1. 计算第二型曲线积分：

(1) $\int_L x dy - y dx$，其中 L 为本节例 2 中的三种情况；

(2) $\int_L (2a - y)dx + dy$，其中 L 为摆线 $x = a(t - \sin t)$，$y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 沿 t 增加方向的一段；

(3) $\oint_L \frac{-x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,其中 L 为圆周 x^2+y^2,依逆时针方向;

(4) $\oint_L y\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y$,其中 L 为 $y=\sin x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 与 x 轴所围的闭曲线,依顺时针方向;

(5) $\oint_L x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$,其中 L:从 $(1,1,1)$ 到 $(2,3,4)$ 的直线段.

2. 设质点受力作用,力的反方向指向原点,大小与质点离原点的距离成正比.若质点由 $(a,0)$ 沿椭圆移动到 $(0,b)$,求力所作的功.

3. 设一质点受力作用,力的方向指向原点,大小与质点到 xy 平面的距离成反比.若质点沿直线 $x=at,y=bt,z=ct(c\neq0)$ 从 $M(a,b,c)$ 到 $N(2a,2b,2c)$,求力所作的功.

---

4. 证明曲线积分的估计式:

$$\left|\int_{AB} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant LM,$$

其中 L 为 AB 的弧长,$M=\max\limits_{(x,y)\in AB}\sqrt{P^2+Q^2}$.

利用上述不等式估计积分

$$I_R=\int_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2},$$

并证明 $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R=0$.

5. 计算沿空间曲线的第二型曲线积分:

(1) $\int_L xyz\mathrm{d}z$,其中 L:$x^2+y^2+z^2=1$ 与 $y=z$ 相交的圆,其方向按曲线依次经过 1,2,7,8 卦限;

(2) $\int_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$,其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限部分的边界曲线,其方向按曲线依次经过 xy 平面部分,yz 平面部分和 zx 平面部分.

总 练 习 题

1. 计算下列曲线积分:

(1) $\int_L y\mathrm{d}s$,其中 L 是由 $y^2=x$ 和 $x+y=2$ 所围的闭曲线;

(2) $\int_L |y|\mathrm{d}s$,其中 L 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$;

(3) $\int_L z\mathrm{d}s$,其中 L 为圆锥螺线

$$x=t\cos t,y=t\sin t,z=t,t\in[0,t_0];$$

(4) $\int_L xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x$,L 为以 a 为半径,圆心在原点的右半圆周从最上面一点 A 到最

下面一点B；

(5) $\int_L \frac{dy - dx}{x - y}$，$L$是抛物线$y=x^2-4$，从$A(0,-4)$到$B(2,0)$的一段；

(6) $\int_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$，$L$是维维安尼曲线$x^2+y^2+z^2=a^2$，$x^2+y^2=ax(z\geqslant 0, a>0)$，若从$x$轴正向看去，$L$是沿逆时针方向进行的.

2. 设$f(x,y)$为连续函数，试就如下曲线：

(1) L：连接$A(a,a)$，$C(b,a)$的直线段；

(2) L：连接$A(a,a)$，$C(b,a)$，$B(b,b)$三点的三角形(逆时针方向)，

计算下列曲线积分：

$$\int_{L_1} f(x,y)ds, \int_{L_2} f(x,y)dx, \int_{L_2} f(x,y)dy.$$

3. 设$f(x,y)$为定义在平面曲线弧段$\widehat{AB}$上的非负连续函数，且在$\widehat{AB}$上恒大于零.

(1) 试证明$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)ds > 0$；

(2) 试问在相同条件下，第二型曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)dx > 0$$

是否成立？为什么？

第二十一章 重 积 分

§1 二重积分概念

一 平面图形的面积

为了研究定义在平面图形(即平面点集)上函数的积分,我们首先讨论平面有界图形的面积问题.

所谓一个平面图形 P 是有界的,是指构成这个平面图形的点集是平面上的有界点集,即存在一矩形 R,使得 $P\subset R$.

设 P 是一平面有界图形,用某一平行于坐标轴的一组直线网 T 分割这个图形(图 21-1).这时直线网 T 的网眼——小闭矩形 Δ_i 可分为三类:(i) Δ_i 上的点都是 P 的内点;(ii) Δ_i 上的点都是 P 的外点,即 $\Delta_i\cap P=\varnothing$;(iii) Δ_i 上含有 P 的边界点.

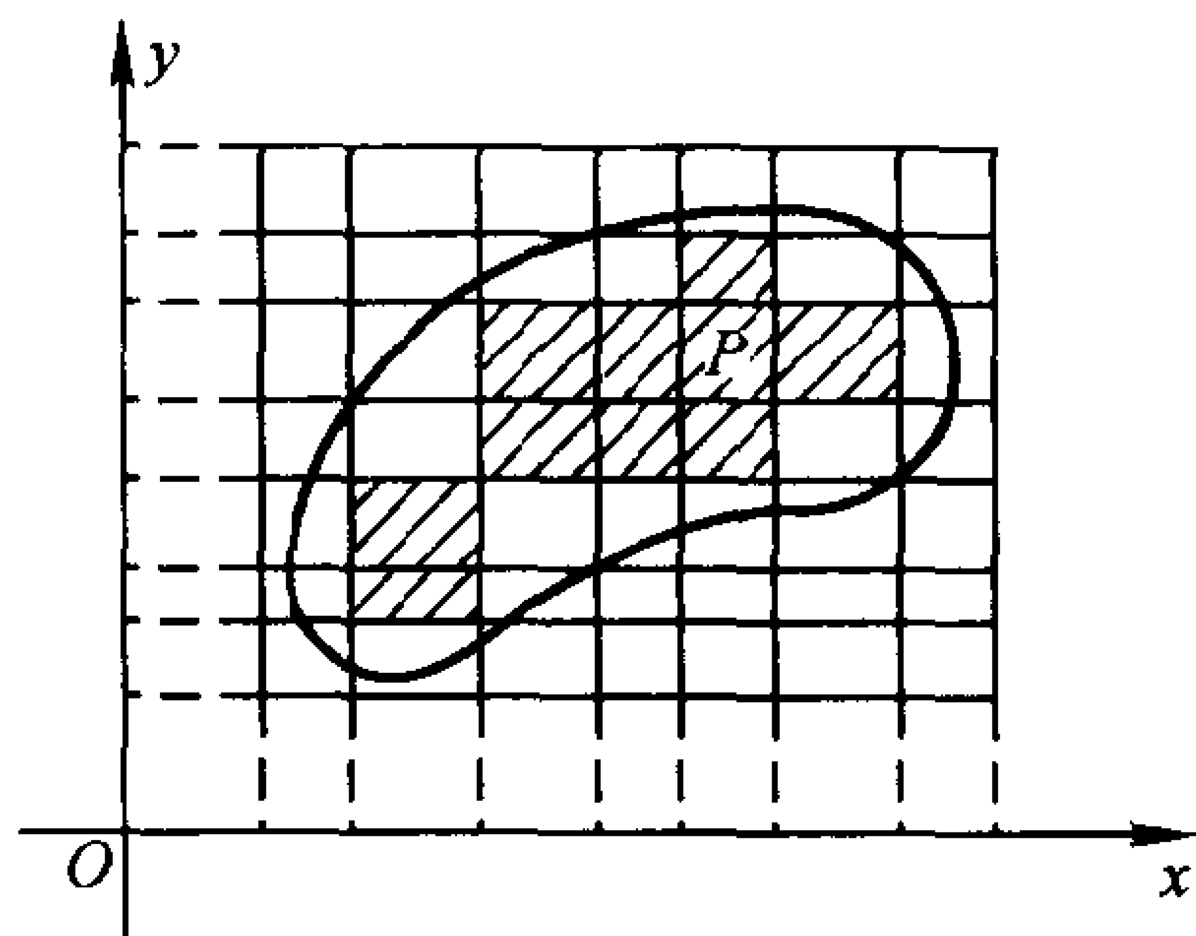


图 21-1

我们将所有属于直线网 T 的第(i)类小矩形(图 21-1 中阴影部分)的面积加起来,记这个和数为 $s_P(T)$,则有 $s_P(T)\leqslant\Delta_R$(这里 Δ_R 表示包含 P 的那个矩形 R 的面积);将所有第(i)类与第(iii)类小矩形(图 21-1 中粗线所围部分)的面积加起来,记这个和数为 $S_P(T)$,则有 $s_P(T)\leqslant S_P(T)$.

由确界存在定理可以推得,对于平面上所有直线网,数集 $\{s_P(T)\}$ 有上确界,数集 $\{S_P(T)\}$ 有下确界,记

$$\underline{I}_P=\sup_T\{s_P(T)\},\qquad \overline{I}_P=\inf_T\{S_P(T)\}.$$

显然有

$$0\leqslant\underline{I}_P\leqslant\overline{I}_P. \tag{1}$$

通常称 $\underline{I}_P$ 为 P 的**内面积**,$\overline{I}_P$ 为 P 的**外面积**.

定义 1 若平面图形 P 的内面积 $\underline{I}_P$ 等于它的外面积 $\overline{I}_P$,则称 P 为**可求面积**,并称其共同值 $I_P=\underline{I}_P=\overline{I}_P$ 为 P 的**面积**.

定理 21.1　平面有界图形 P 可求面积的充要条件是：对任给的 $\varepsilon>0$，总存在直线网 T，使得

$$S_P(T)-s_P(T)<\varepsilon. \tag{2}$$

证　［必要性］　设平面有界图形 P 的面积为 I_P. 由定义 1，有 $I_P=\overline{I}_P=\underline{I}_P$. 对任给的 $\varepsilon>0$，由 $\underline{I}_P$ 及 $\overline{I}_P$ 的定义知道，分别存在直线网 T_1 与 T_2，使得

$$s_P(T_1)>I_P-\frac{\varepsilon}{2},S_P(T_2)<I_P+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

记 T 为由 T_1 与 T_2 这两个直线网合并所成的直线网，可证得①

$$s_P(T_1)\leqslant s_P(T),\quad S_P(T_2)\geqslant S_P(T).$$

于是由(3)可得

$$s_P(T)>I_P-\frac{\varepsilon}{2},\quad S_P(T)<I_P+\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而得到对直线网 T 有 $S_P(T)-s_P(T)<\varepsilon$.

［充分性］　设对任给的 $\varepsilon>0$，存在某直线网 T，使得(2)式成立. 但

$$s_P(T)\leqslant\underline{I}_P\leqslant\overline{I}_P\leqslant S_P(T).$$

所以

$$\overline{I}_P-\underline{I}_P\leqslant S_P(T)-s_P(T)<\varepsilon.$$

由 ε 的任意性，因此 $\overline{I}_P=\underline{I}_P$，因而平面图形 P 可求面积.　□

由不等式(1)及定理 21.1 立即可得：

推论　平面有界图形 P 的面积为零的充要条件是它的外面积 $\overline{I}_P=0$，即对任给的 $\varepsilon>0$，存在直线网 T，使得

$$S_P(T)<\varepsilon,$$

或对任给的 $\varepsilon>0$，平面图形 P 能被有限个其面积总和小于 ε 的小矩形所覆盖.

定理 21.2　平面有界图形 P 可求面积的充要条件是：P 的边界 K 的面积为零.

证　由定理 21.1，P 可求面积的充要条件是：对任给的 $\varepsilon>0$，存在直线网 T，使得 $S_P(T)-s_P(T)<\varepsilon$. 由于

$$S_K(T)=S_P(T)-s_P(T),$$

所以也有 $S_K(T)<\varepsilon$. 由上述推论，P 的边界 K 的面积为零.　□

定理 21.3　若曲线 K 为由定义在 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 的图象，则曲线 K 的面积为零.

证　由于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，所以它在 $[a,b]$ 上一致连续. 因而

---

① 可仿照第九章定积分中上和与下和有关性质证明.

对任给的 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,当把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n,x_0=a,x_n=b)$ 并且满足

$$\max\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \mid i = 1,2,\cdots,n\} < \delta$$

时,可使 $f(x)$ 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅都成立 $\omega_i<\frac{\varepsilon}{b-a}$. 现把曲线 K 按自变量 $x=x_0,x_1,\cdots,x_n$ 分成 n 个小段,这时每一个小段都能被以 Δx_i 为宽, ω_i 为高的小矩形所覆盖. 由于这 n 个小矩形面积的总和为

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \varepsilon,$$

所以由定理 21.1 的推论即得曲线 K 的面积为零. □

我们还可证明:由参量方程 $x=\varphi(t),y=\psi(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 所表示的平面光滑曲线(即 φ,ψ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续的导函数)或按段光滑曲线,其面积一定为零.

二 二重积分的定义及其存在性

先讨论一个几何问题——求**曲顶柱体**的体积. 设 $f(x,y)$ 为定义在可求面积的有界闭区域 D 上的非负连续函数. 求以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶, D 为底的柱体(图 21-2)的体积 V.

采用类似于求曲边梯形面积的方法. 先用一组平行于坐标轴的直线网 T 把区域 D 分成 n 个小区域 $\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$(称 T 为区域 D 的一个**分割**). 以 $\Delta\sigma_i$ 表示小区域 σ_i 的面积. 这个直线网也相应地把曲顶柱体分割成 n 个以 σ_i 为底的小曲顶柱体 $V_i(i=1,2,\cdots,n)$. 由于 $f(x,y)$ 在 D 上连续,故当每个 σ_i 的直径都很小时, $f(x,y)$ 在 σ_i 上各点的函数值都相差无几,因而可在 σ_i 上任取一点 (ξ_i,η_i),用以 $f(\xi_i,\eta_i)$ 为高, σ_i 为底的小平顶柱体的体积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 作为 V_i 的体积 ΔV_i 的近似值(如图 21-3),即

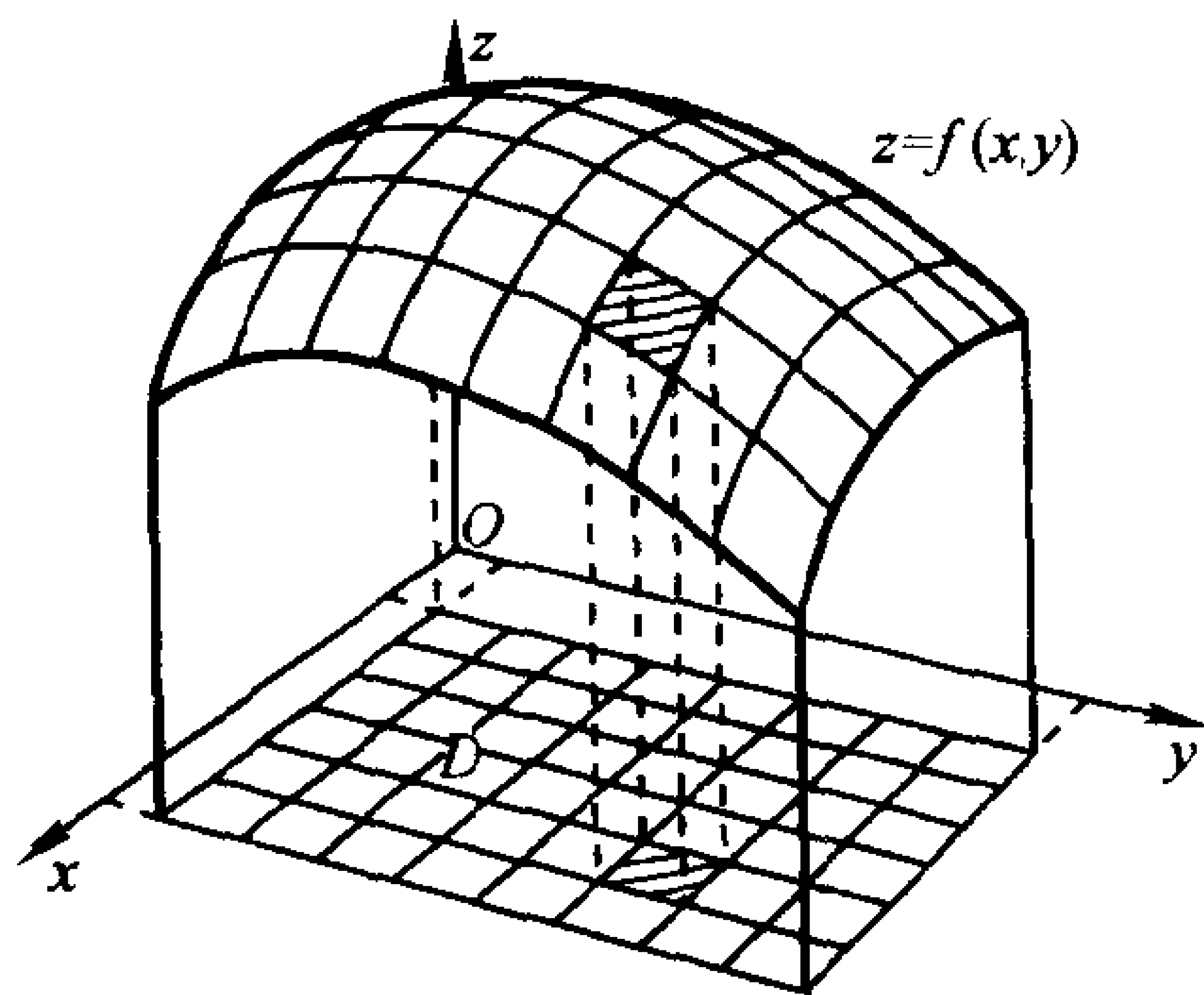


图 21-2

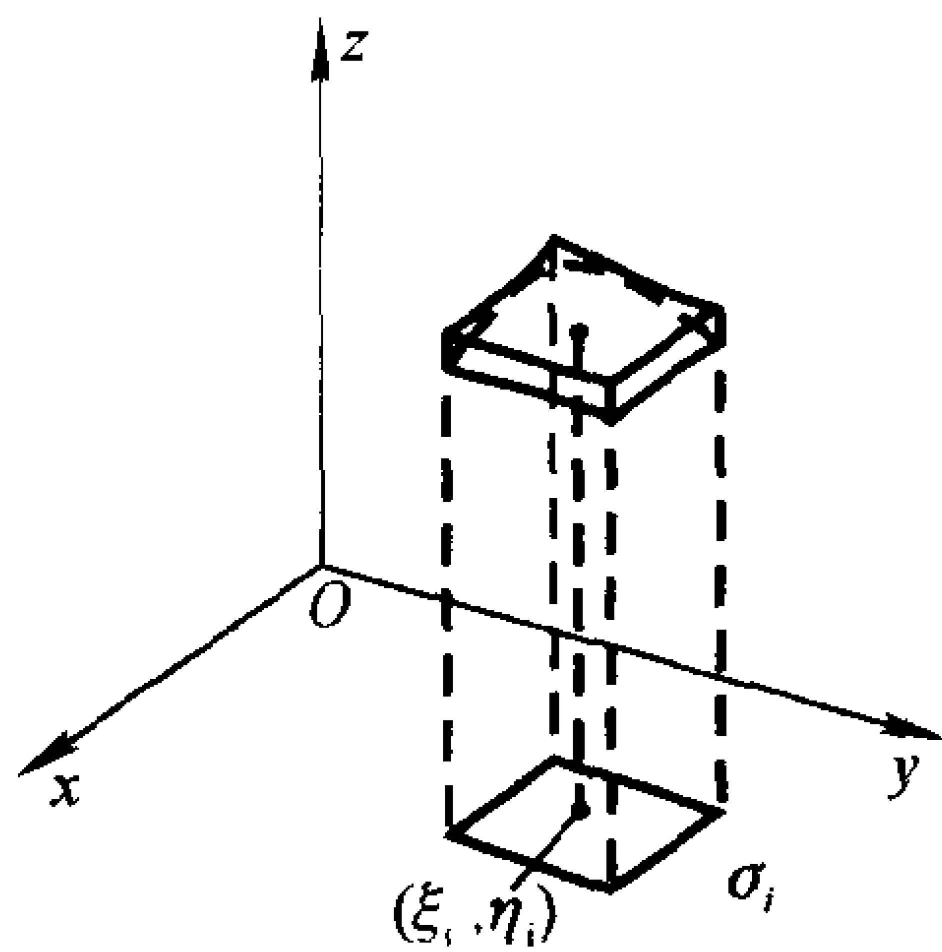


图 21-3

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

把这些小平顶柱体的体积加起来,就得到曲顶柱体体积 V 的近似值

$$V = \sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

当直线网 T 的网眼越来越细密,即分割 T 的**细度** $\|T\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} d_i$($d_i$ 为 σ_i 的直径)趋于零时,就有

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \to V.$$

至此,读者已经看到,求曲顶柱体的体积也与定积分概念一样,是通过"**分割、近似求和、取极限**"这三个步骤得到的,所不同的是现在讨论的对象为定义在平面区域上的二元函数.这类问题在物理学与工程技术中也常遇到,如求非均匀平面的质量、重心、转动惯量等等.这些都是所要讨论的二重积分的实际背景.

下面叙述定义在平面有界闭区域上函数 $f(x,y)$的二重积分的概念.

设 D 为xy 平面上可求面积的有界闭区域,$f(x,y)$为定义在 D 上的函数.用任意的曲线把 D 分成n 个可求面积的小区域

$$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n.$$

以 $\Delta\sigma_i$ 表示小区域σ_i 的面积,这些小区域构成 D 的一个分割T,以 d_i 表示小区域σ_i 的直径,称 $\|T\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} d_i$ 为分割 T 的**细度**.在每个 σ_i 上任取一点(ξ_i, η_i),作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

称它为函数 $f(x,y)$在 D 上属于分割T 的一个**积分和**.

定义 2 设 $f(x,y)$是定义在可求面积的有界闭区域D 上的函数.J 是一个确定的数,若对任给的正数 ε,总存在某个正数 δ,使对于 D 的任何分割 T,当它的细度 $\|T\| < \delta$ 时,属于 T 的所有积分和都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i - J\right| < \varepsilon, \tag{4}$$

则称 $f(x,y)$在 D 上**可积**,数 J 称为函数$f(x,y)$在 D 上的**二重积分**,记作

$$J = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma, \tag{5}$$

其中 $f(x,y)$称为二重积分的**被积函数**,x,y 称为**积分变量**,D 称为**积分区域**.

当 $f(x,y)\geqslant 0$ 时,二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 在几何上就表示以 $z=f(x,y)$为曲顶,D 为底的曲顶柱体的体积.当 $f(x,y)=1$ 时,二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的值

就等于积分区域D的面积.

由二重积分定义知道,若$f(x,y)$在区域D上可积,则与定积分情况一样,对任何分割T,只要当$\|T\|<\delta$时,(4)式都成立.因此为方便计算起见,常选取一些特殊的分割方法,如选用平行于坐标轴的直线网来分割D,则每一小网眼区域σ的面积$\Delta\sigma=\Delta x\Delta y$.此时通常把$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$记作

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{6}$$

首先可以像定积分那样类似地证明函数$f(x,y)$在有界可求面积区域D上可积的必要条件是它在D上有界.

设函数$f(x,y)$在D上有界,T为D的一个分割,它把D分成n个可求面积的小区域$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$.令

$$\begin{aligned} M_i &= \sup_{(x,y)\in\sigma_i} f(x,y), \\ m_i &= \inf_{(x,y)\in\sigma_i} f(x,y) \end{aligned} \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

作和式$S(T)=\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\Delta\sigma_i$,$s(T)=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\Delta\sigma_i$.

它们分别称为函数$f(x,y)$关于分割T的**上和**与**下和**.二元函数的上和与下和具有与一元函数的上和与下和同样的性质,这里就不再重复.下面列出有关二元函数的可积性定理.我们只给出定理21.7的证明,其余请读者自行证明.

定理21.4 $f(x,y)$在D上可积的充要条件是:

$$\lim_{\|T\|\to 0}S(T)=\lim_{\|T\|\to 0}s(T).$$

定理21.5 $f(x,y)$在D上可积的充要条件是:对于任给的正数ε,存在D的某个分割T,使得$S(T)-s(T)<\varepsilon$.

定理21.6 有界闭区域D上的连续函数必可积.

定理21.7 设$f(x,y)$是定义在有界闭区域D上的有界函数.若$f(x,y)$的不连续点都落在有限条光滑曲线上,则$f(x,y)$在D上可积.

证 不失一般性,可设$f(x,y)$的不连续点全部落在某一条光滑曲线L上.记L的长度为l.于是对任给的$\varepsilon>0$,把L等分成$n=\left[\frac{l}{\varepsilon}\right]+1$段:

$$L_1,L_2,\cdots,L_n.$$

在每段L_i上取一点P_i,使P_i与其一端点的弧长为$\frac{l}{2n}$.以P_i为中心作边长为ε的正方形Δ_i,则$L_i\subset\Delta_i$.从而有$L\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Delta_i$.记$\Delta=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Delta_i$,则$\Delta$为一多边形.设$\Delta$的面积为$W$,那么

$$W \leqslant n\varepsilon^2 = \left(\left[\frac{l}{\varepsilon}\right]+1\right)\varepsilon^2 \leqslant \left(\frac{l}{\varepsilon}+1\right)\varepsilon^2 = (l+\varepsilon)\varepsilon.$$

现在把区域 D 分成两部分．第一部分 $D_1 = D\cap\Delta$，第二部分 $D_2 = D - D_1$．由于 $f(x,y)$在 D_2 上连续，根据定理 21.6 与定理 21.5，存在 D_2 的分割 T_2，使得 $S(T_2)-s(T_2)<\varepsilon$．又记 $M_\Delta = \sup\limits_{(x,y)\in\Delta} f(x,y)$，$m_\Delta = \inf\limits_{(x,y)\in\Delta} f(x,y)$，以 T 表示由 T_2 与多边形 Δ 的边界所组成的区域 D 的分割，则有

$$\begin{aligned} S(T)-s(T) &= [S(T_2)-s(T_2)] + [M_\Delta W - m_\Delta W] < \varepsilon + \omega W \\ &\leqslant \varepsilon + (l+\varepsilon)\varepsilon\omega = (1 + l\omega + \varepsilon\omega)\varepsilon, \end{aligned}$$

其中 ω 是 $f(x,y)$在 D 上的振幅．由于 $f(x,y)$在 D 上有界，故 ω 是有限值．于是由定理 21.5 就证明了 $f(x,y)$在 D 上可积．　□

三　二重积分的性质

二重积分具有一系列与定积分完全相类似的性质，现列举如下：

1. 若 $f(x,y)$在区域 D 上可积，k 为常数，则 $kf(x,y)$在 D 上也可积，且

$$\iint_D kf(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

2. 若 $f(x,y)$，$g(x,y)$在 D 上都可积，则 $f(x,y)\pm g(x,y)$在 D 上也可积，且

$$\iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \pm \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

3. 若 $f(x,y)$在 D_1 和 D_2 上都可积，且 D_1 与 D_2 无公共内点，则 $f(x,y)$在 $D_1\cup D_2$ 上也可积，且

$$\iint_{D_1\cup D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

4. 若 $f(x,y)$与 $g(x,y)$在 D 上可积，且

$$f(x,y)\leqslant g(x,y),\quad (x,y)\in D,$$

则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

5. 若 $f(x,y)$在 D 上可积，则函数 $|f(x,y)|$ 在 D 上也可积，且

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma.$$

6. 若 $f(x,y)$在 D 上可积，且

$$m \leqslant f(x,y) \leqslant M,\quad (x,y)\in D,$$

则

$$mS_D \leqslant \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant MS_D,$$

这里 S_D 是积分区域D 的面积.

7.（中值定理） 若 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续,则存在$(\xi,\eta)\in D$,使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)S_D,$$

这里 S_D 是积分区域D 的面积.

中值定理的几何意义:以 D 为底,$z=f(x,y)$($f(x,y)\geqslant 0$)为曲顶的曲顶柱体体积等于一个同底的平顶柱体的体积,这个平顶柱体的高等于 $f(x,y)$在区域 D 中某点(ξ,η)的函数值 $f(\xi,\eta)$.

习　　题

1. 把重积分 $\iint_D xy\mathrm{d}\sigma$ 作为积分和的极限,计算这个积分值,其中 $D=[0,1]\times[0,1]$,并用直线网

$$x=\frac{i}{n}, y=\frac{j}{n} \quad (i,j=1,2,\cdots,n-1)$$

分割这个正方形为许多小正方形,每个小正方形取其右顶点作为其节点.

2. 证明:若函数 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上可积,则 $f(x,y)$在 D 上有界.

3. 证明二重积分中值定理(性质 7).

4. 若 $f(x,y)$为有界闭区域 D 上的非负连续函数,且在 D 上不恒为零,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma > 0.$$

5. 若 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续,且在 D 内任一子区域$D'\subset D$ 上有

$$\iint_{D'} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0,$$

则在 D 上$f(x,y)\equiv 0$.

---

6. 设 $D=[0,1]\times[0,1]$,证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\text{ 为 }D\text{ 内有理点(即 }x,y\text{ 皆为有理数)},\\ 0, & (x,y)\text{ 为 }D\text{ 内非有理点}\end{cases}$$

在 D 上不可积.

7. 证明:若 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续,$g(x,y)$在 D 上可积且不变号,则存在一点$(\xi,\eta)\in D$,使得

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

8. 应用中值定理估计积分

$$I = \iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10} \frac{\mathrm{d}\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$$

的值.

9. 证明:若平面曲线 $x=\varphi(t), y=\psi(t), \alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 光滑(即 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续的导数),则此曲线的面积为零.

§2 直角坐标系下二重积分的计算

本节首先讨论定义在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上二重积分计算问题,然后再把它扩展到较为一般的区域上.

定理 21.8 设 $f(x,y)$ 在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积,且对每个 $x\in[a,b]$,积分 $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 存在,则累次积分

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

也存在,且

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y. \tag{1}$$

证 令 $F(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$,定理要求证明 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,且积分的结果恰为二重积分. 为此,对区间 $[a,b]$ 与 $[c,d]$ 分别作分割

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_r = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_s = d.$$

按这些分点作两组直线

$$x = x_i \quad (i = 1,2,\cdots,r-1)$$

及

$$y = y_k \quad (k = 1,2,\cdots,s-1),$$

它把矩形 D 分为 rs 个小矩形(图 21-4).

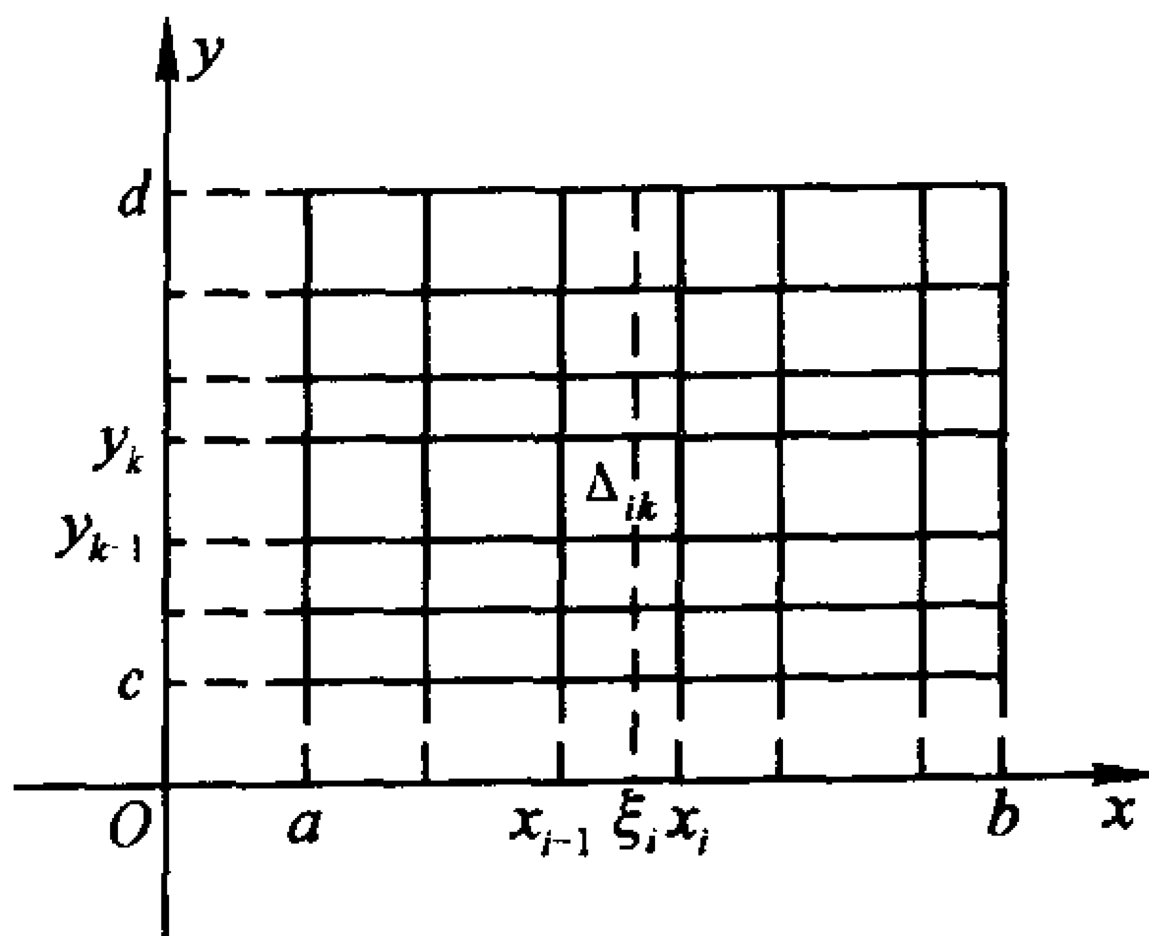


图 21-4

记 Δ_{ik} 为小矩形 $[x_{i-1},x_i]\times[y_{k-1},y_k]$ $(i=1,2,\cdots,r,k=1,2,\cdots,s)$;设 $f(x,y)$ 在 Δ_{ik} 上的上确界和下确界分别为 M_{ik} 和 m_{ik}. 在区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中任取一点 ξ_i,于是就有不等式

$$m_{ik}\Delta y_k \leqslant \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_i,y)\mathrm{d}y \leqslant M_{ik}\Delta y_k,$$

其中 $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$. 因此

$$\sum_{k=1}^{s} m_{ik}\Delta y_k \leqslant F(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y)\mathrm{d}y \leqslant \sum_{k=1}^{s} M_{ik}\Delta y_k,$$

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} m_{ik}\Delta y_k \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{r} F(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} M_{ik}\Delta y_k \Delta x_i, \tag{2}$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. 记 Δ_{ik} 的对角线长度为 d_{ik} 和

$$\| T \| = \max_{i,k} d_{ik}.$$

由于二重积分存在, 由定理 21. 4, 当 $\| T \| \to 0$ 时, $\sum\limits_{i,k} m_{ik}\Delta y_k \Delta x_i$ 和 $\sum\limits_{i,k} M_{ik}\Delta y_k \Delta x_i$ 有相同的极限,且极限值等于 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$. 因此当 $\| T \| \to 0$ 时,由不等式(2)可得:

$$\lim_{\| T \| \to 0} \sum_{i=1}^{r} F(\xi_i)\Delta x_i = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma. \tag{3}$$

由于当 $\| T \| \to 0$ 时,必有 $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} \Delta x_i \to 0$,因此由定积分定义,(3)式左边

$$\lim_{\| T \| \to 0} \sum_{i=1}^{r} F(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y. \qquad \square$$

定理 21.9 设 $f(x,y)$ 在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积,且对每个 $y\in[c,d]$,积分 $\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 存在,则累次积分

$$\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

也存在,且

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

定理 21.9 的证明与定理 21.8 相仿.

特别当 $f(x,y)$ 在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续时,则有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

例 1 计算 $\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=[0,1]\times[0,1]$.

解 应用定理 21.8(或定理 21.9),有

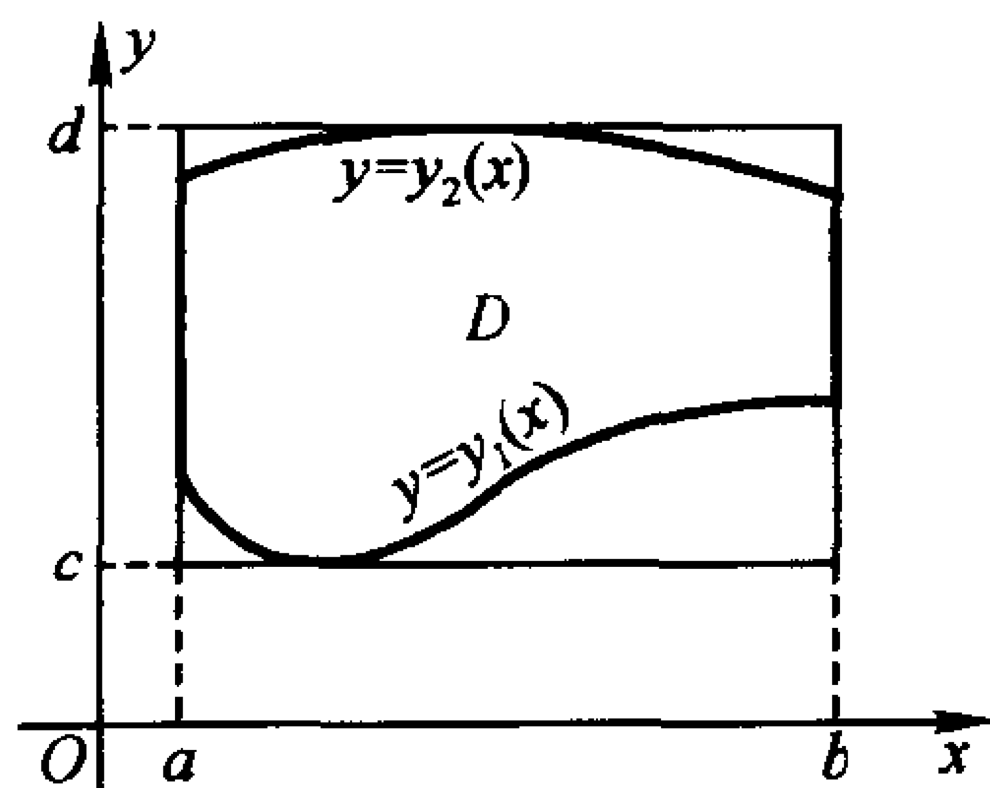
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 (x+y)^2\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{(x+1)^3}{3} - \frac{x^3}{3}\right]\mathrm{d}x = \frac{7}{6}. \qquad \square$$

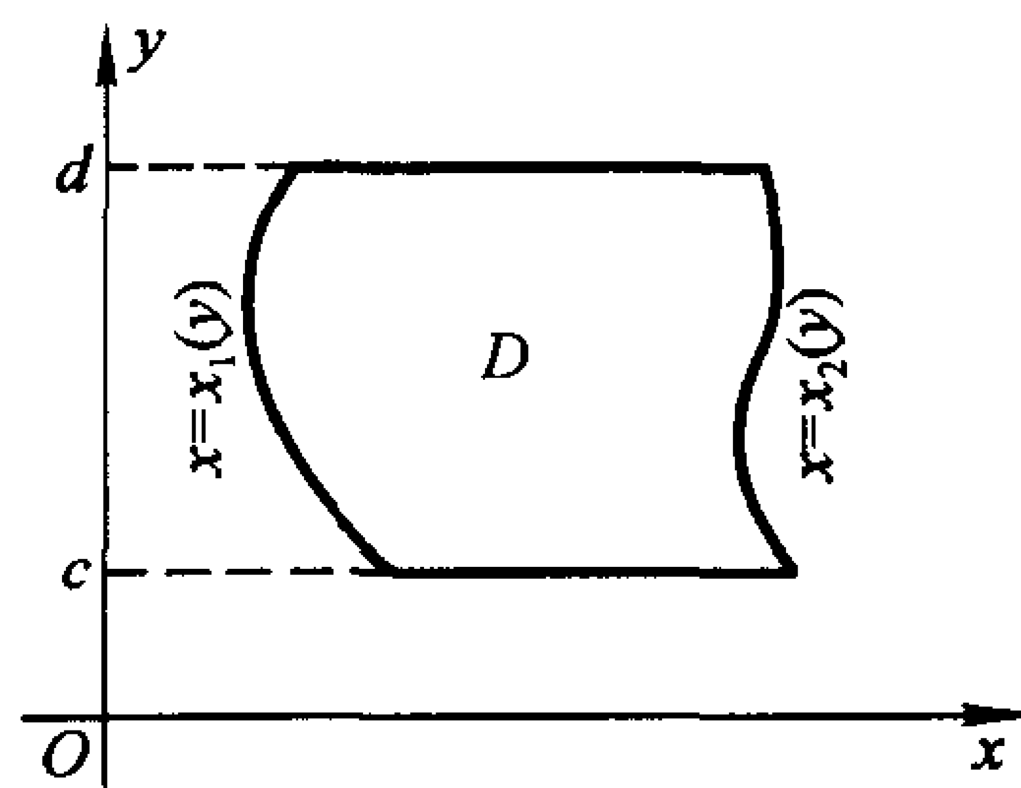
对于一般区域,通常可以分解为如下两类区域来进行计算.

称平面点集

$$D = \{(x,y) \mid y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), a \leqslant x \leqslant b\} \tag{4}$$



(a) x 型区域



(b) y 型区域

图 21－5

为 **x 型区域**(图 21－5(a));称平面点集

$$D = \{(x,y) \mid x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y), c \leqslant y \leqslant d\} \tag{5}$$

为 **y 型区域**(图 21－5(b)).

这些区域的特点是当 D 为 x 型区域时,垂直于 x 轴的直线 $x=x_0(a<x_0<b)$ 至多与区域 D 的边界交于两点;当 D 为 y 型区域时,直线 $y=y_0(c<y_0<d)$ 至多与 D 的边界交于两点.

许多常见的区域都可以分解成有限个除边界外无公共内点的 x 型区域或 y 型区域(如图 21－6 所示的区域 D 可分解成三个区域,其Ⅰ,Ⅲ为 x 型区域,Ⅱ为 y 型区域).因而解决了 x 型区域或 y 型区域上二重积分的计算问题,那么一般区域上二重积分的计算问题也就得到了解决.

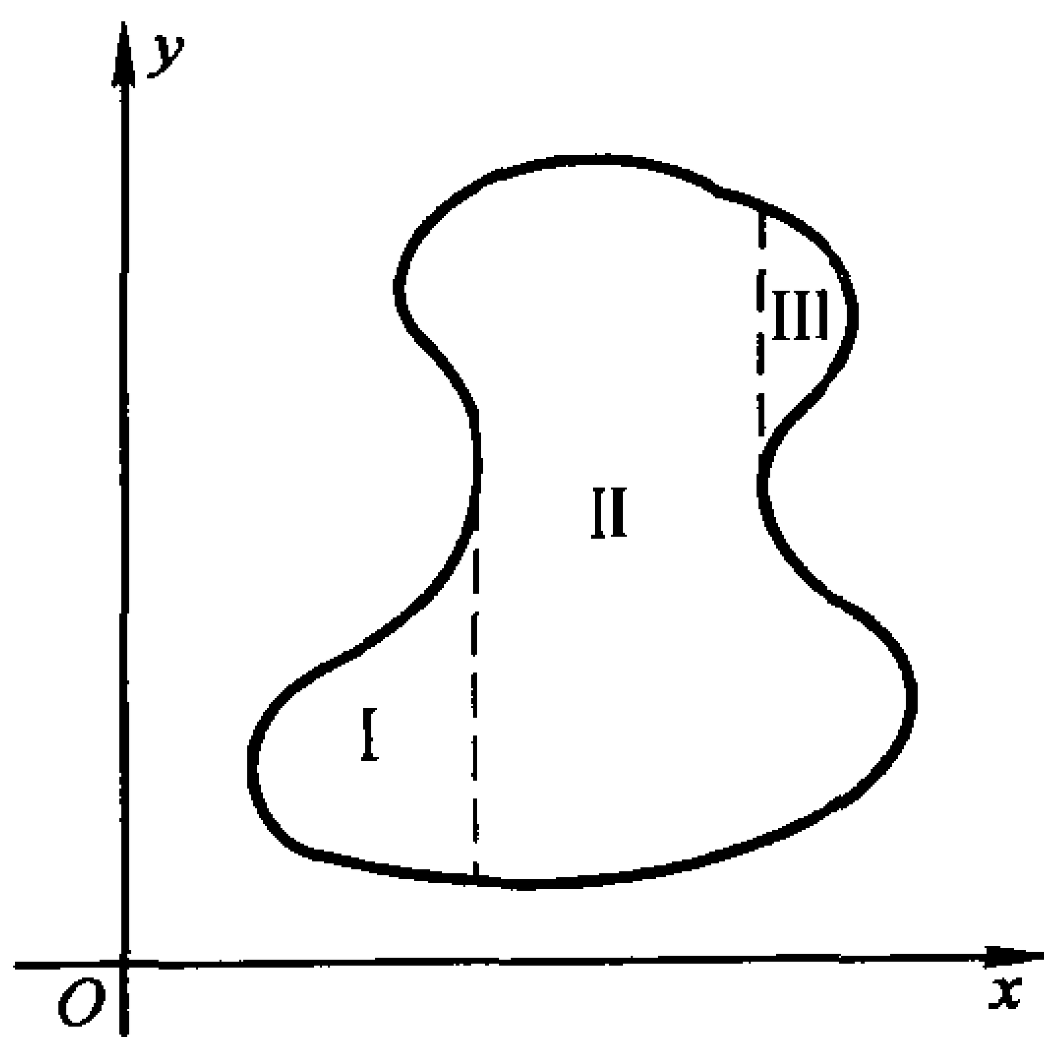


图 21－6

定理 21.10 若 $f(x,y)$ 在如(4)式所示的 x 型区域 D 上连续,其中 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

即二重积分可化为先对 y,后对 x 的累次积分.

证 由于 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,故总在矩形区域 $[a,b]\times[c,d]\supset D$(如图 21－5(a)),现作一定义在 $[a,b]\times[c,d]$ 上的函数

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \overline{\in} D. \end{cases}$$

可以验证,函数 $F(x,y)$在$[a,b]\times[c,d]$上可积,而且

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]}F(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d F(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}F(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_2(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.\qquad\square$$

类似可证,若 D 为(5)式所示的 y 型区域,其中 $x_1(y),x_2(y)$在$[c,d]$上连续,则二重积分可化为先对 x,后对 y 的累次积分

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

例 2 设 D 是由直线 $x=0,y=1$ 及 $y=x$ 围成的区域(图 21－7),试计算:$I=\iint\limits_D x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}\sigma$ 的值.

解 若用先对 y 后对 x 的积分,则

$$I=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y.$$

由于函数 e^{-y^2}的原函数无法用初等函数形式表示,因此改用另一种顺序的累次积分,则有

$$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 y^3\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y.$$

由分部积分法,即可算得:

$$I=\frac{1}{6}-\frac{1}{3\mathrm{e}}.\qquad\square$$

例 3 计算二重积分 $\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma$,其中 D 为由直线 $y=2x,x=2y$ 及 $x+y=3$ 所围的三角形区域(图 21－8).

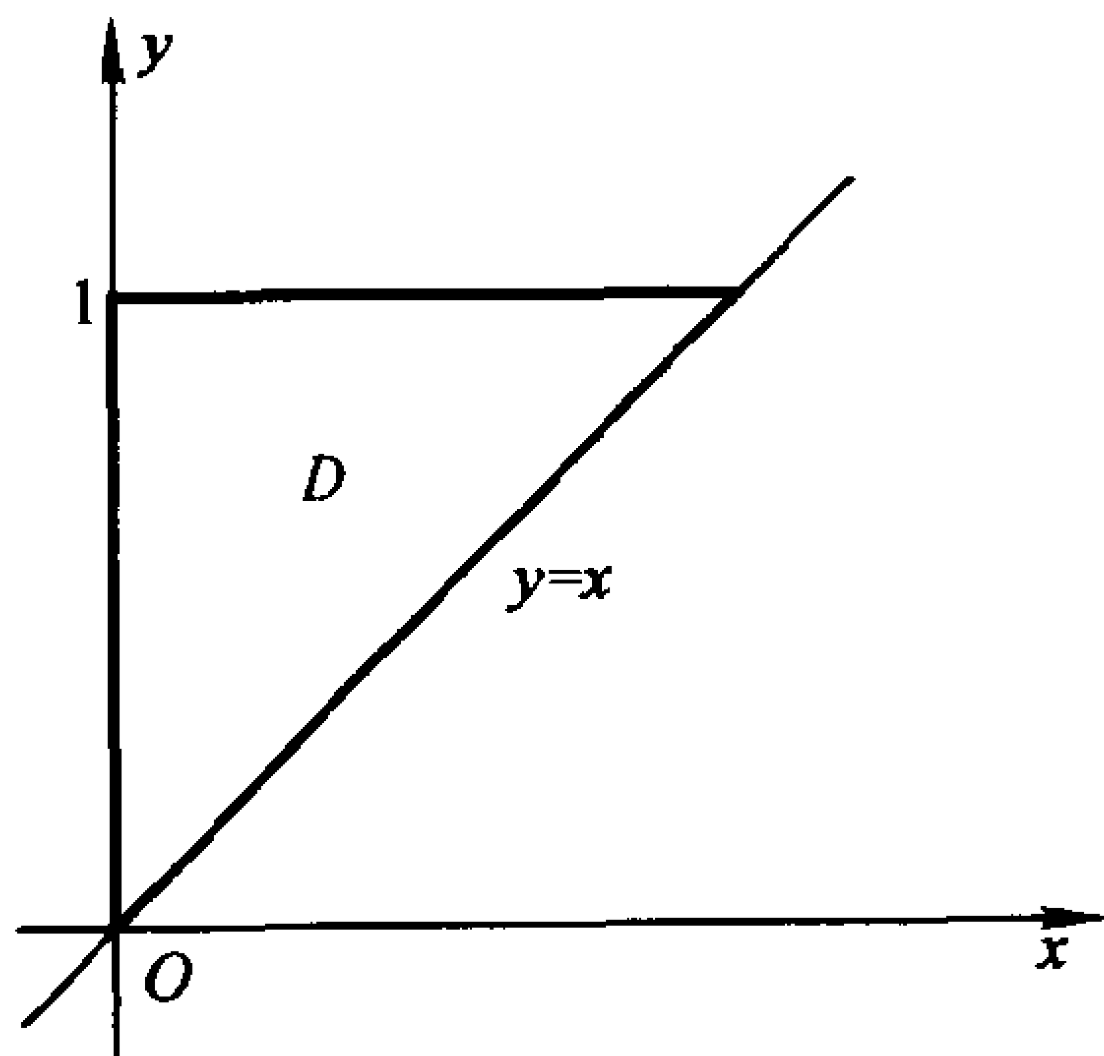


图 21－7

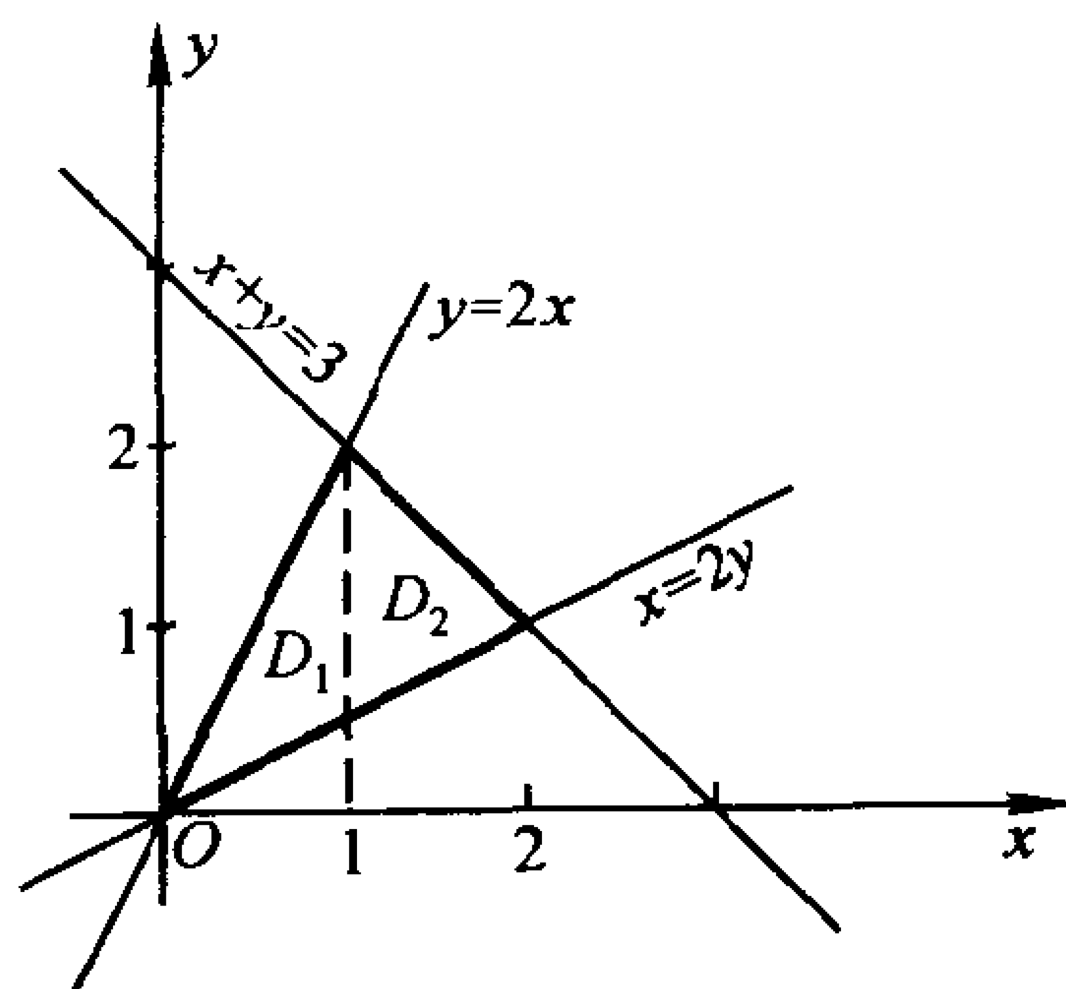


图 21－8

解　当把 D 看作 x 型区域时,相应的

$$y_2(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 3-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}\quad y_1(x)=\frac{x}{2}.$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_D \mathrm{d}\sigma &= \iint_{D_1}\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{2x}\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{3-x}\mathrm{d}y\\ &=\int_0^1\left(2x-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_1^2\left(3-x-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\\ &=\left[\frac{3}{4}x^2\right]_0^1+\left[3x-\frac{3}{4}x^2\right]_1^2=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

□

例 4　求两个底面半径相同的直交圆柱所围立体的体积 V.

解　设圆柱底面半径为 a,两个圆柱方程为

$$x^2+y^2=a^2\quad 与\quad x^2+z^2=a^2.$$

利用对称性,只要求出在第一卦限(即 $x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$)部分(见第十章图 10-9)的体积,然后再乘以 8 即得所求的体积.第一卦限部分的立体是以 $z=\sqrt{a^2-x^2}$ 为曲顶,以四分之一圆域 D:

$$\begin{cases}0\leqslant y\leqslant\sqrt{a^2-x^2},\\ 0\leqslant x\leqslant a,\end{cases}$$

为底的曲顶柱体,所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}V &= \iint_D\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}y\\ &=\int_0^a(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}a^3.\end{aligned}$$

于是 $V=\dfrac{16}{3}a^3$.

习　　题

1. 设 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续,试将二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 化为不同顺序的累次积分:

(1) D 由不等式 $y\leqslant x, y\geqslant a, x\leqslant b\,(0<a<b)$ 所确定的区域;

(2) D 由不等式 $y\leqslant x, y\geqslant 0, x^2+y^2\leqslant 1$ 所确定的区域;

(3) D 由不等式 $x^2+y^2\leqslant 1$ 与 $x+y\geqslant 1$ 所确定的区域;

(4) $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$.

2. 在下列积分中改变累次积分的顺序:

(1) $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^{2x} f(x,y)\mathrm{d}y$； (2) $\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$；

(3) $\int_0^{2a} \mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\mathrm{d}y$；

(4) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^3 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\mathrm{d}y$.

3. 计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由抛物线 $y^2=2px$ 与直线 $x=\frac{p}{2}(p>0)$ 所围成的区域；

(2) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中

$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\sqrt{x}\leqslant y\leqslant 2\sqrt{x}\}$；

(3) $\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{2a-x}}\ (a>0)$，其中 D 为图 21－9 中阴影部分；

(4) $\iint\limits_D \sqrt{x}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x\}$.

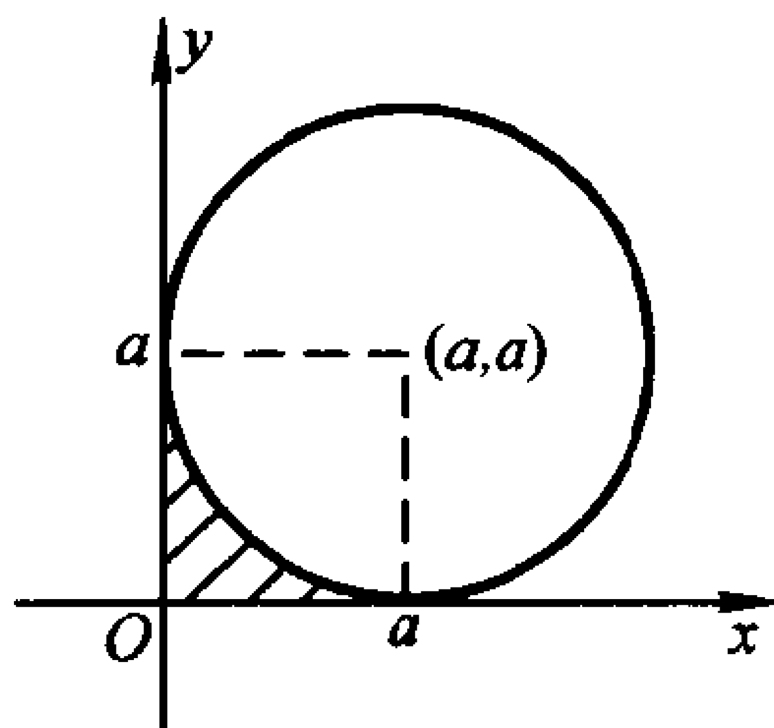


图 21－9

4. 求由坐标平面及 $x=2, y=3, x+y+z=4$ 所围的角柱体的体积.

---

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明不等式

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x,$$

其中等号仅在 $f(x)$ 为常量函数时成立.

6. 设平面区域 D 在 x 轴和 y 轴的投影长度分别为 l_x 和 l_y，D 的面积为 S_D，(α,β) 为 D 内任一点，证明：

(1) $\left|\iint\limits_D (x-\alpha)(y-\beta)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant l_x l_y S_D$；

(2) $\left|\iint\limits_D (x-\alpha)(y-\beta)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \frac{1}{4} l_x^2 l_y^2$.

7. 设 $D=[0,1]\times[0,1]$，

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{q_x}+\dfrac{1}{q_y}, & \text{当}(x,y)\text{为}D\text{中有理点}, \\ 0, & \text{当}(x,y)\text{为}D\text{中非有理点}, \end{cases}$$

其中 q_x 表示有理数 x 化成既约分数后的分母. 证明 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分存在而两个累次积分不存在.

8. 设 $D=[0,1]\times[0,1]$，

$$f(x,y)=\begin{cases} 1, & \text{当}(x,y)\text{为}D\text{中有理点，且}q_x\neq q_y\text{时}, \\ 0, & \text{当}(x,y)\text{为}D\text{中其他点时}, \end{cases}$$

其中 q_x 意义同第 7 题. 证明 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分不存在而两个累次积分存在.

§3 格林公式·曲线积分与路线的无关性

一 格林(Green)公式

本节讨论区域 D 上的二重积分与 D 的边界曲线 L 上的第二型曲线积分之间的联系.

设区域 D 的边界 L 是由一条或几条光滑曲线所组成.边界曲线的正方向规定为:当人沿边界行走时,区域 D 总在它的左边,如图 21-10 所示.与上述规定的方向相反的方向称为负方向,记为 $-L$.

定理 21.11 若函数 $P(x,y),Q(x,y)$在闭区域 D 上连续,且有连续的一阶偏导数,则有

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y, \tag{1}$$

这里 L 为区域 D 的边界曲线,并取正方向.

公式(1)称为**格林公式**.

证 根据区域 D 的不同形状,分三种情形来证明:

(i) 若区域 D 既是 x 型区域又是 y 型区域,即平行于坐标轴的直线和 L 至多交于两点(图 21-11).这时区域 D 可表示为

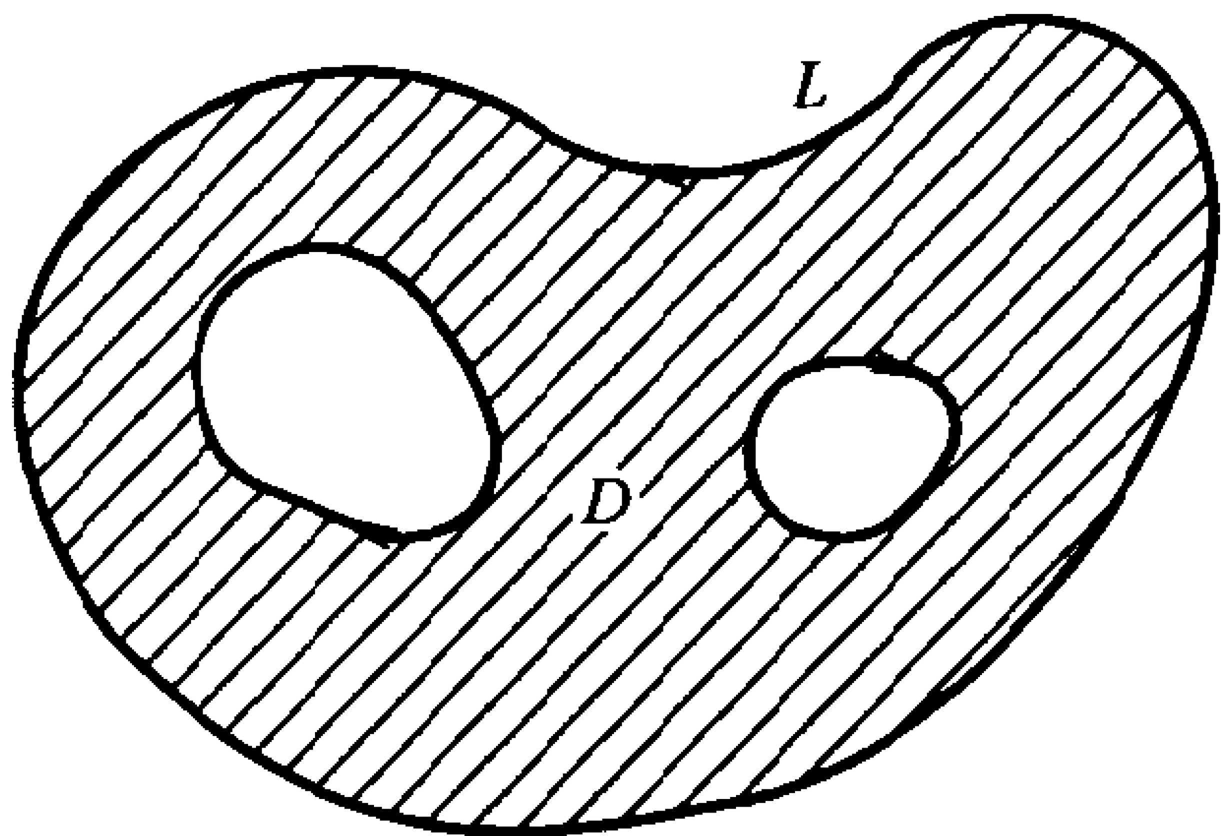


图 21-10

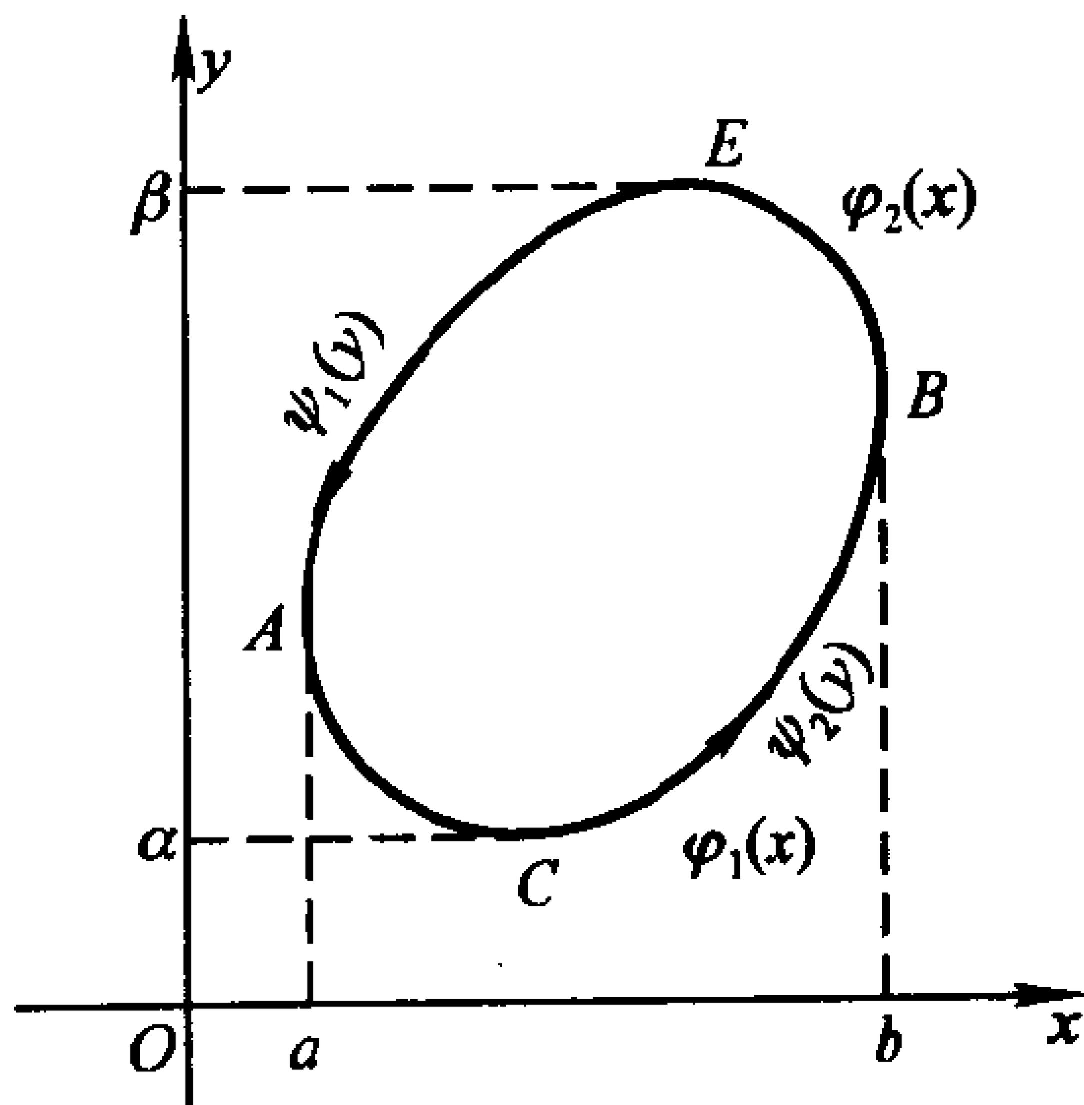


图 21-11

$$\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x),a\leqslant x\leqslant b$$

或

$$\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y),\alpha\leqslant y\leqslant\beta.$$

这里 $y=\varphi_1(x)$和 $y=\varphi_2(x)$分别为曲线$\overset{\frown}{ACB}$和$\overset{\frown}{AEB}$的方程.而 $x=\psi_1(y)$和 $x=\psi_2(y)$则分别是曲线$\overset{\frown}{CAE}$和$\overset{\frown}{CBE}$的方程.于是

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_\alpha^\beta Q(\psi_2(y),y)\mathrm{d}y - \int_\alpha^\beta Q(\psi_1(y),y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\widehat{CBE}} Q(x,y)\mathrm{d}y - \int_{\widehat{CAE}} Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\widehat{CBE}} Q(x,y)\mathrm{d}y + \int_{\widehat{EAC}} Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \oint_L Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

同理可以证得

$$-\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}\sigma = \oint_L P(x,y)\mathrm{d}x.$$

将上述两个结果相加即得

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

(ii) 若区域 D 是由一条按段光滑的闭曲线围成,如图 21－12 所示.则先用几段光滑曲线将 D 分成有限个既是 x 型又是 y 型的子区域,然后逐块按(i)得到它们的格林公式,并相加即可.

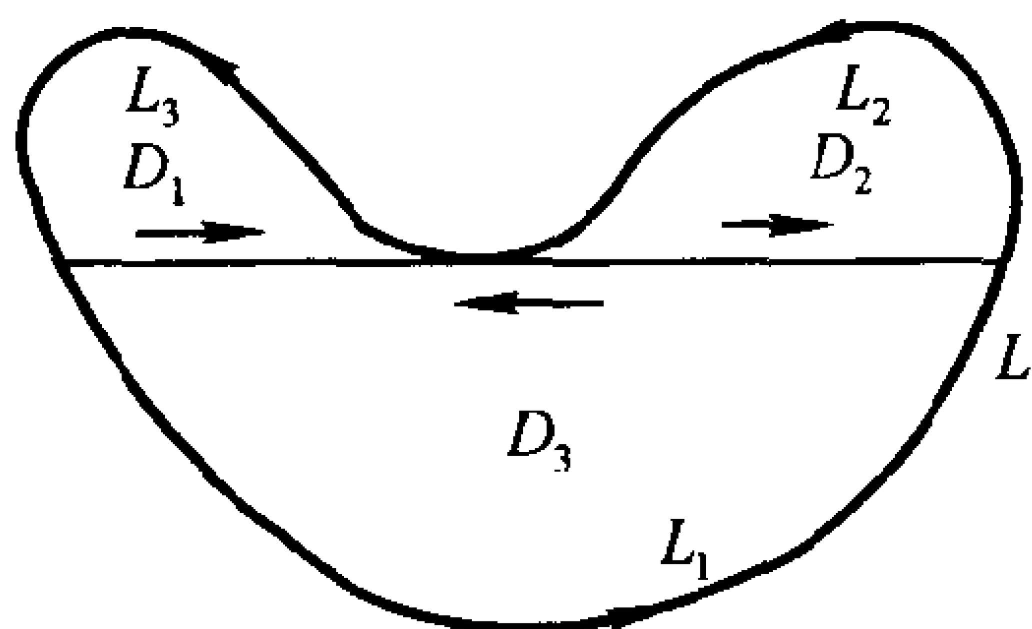


图 21－12

如图 21－12 所示的区域 D.可将 D 分成三个既是 x 型又是 y 型的区域 D_1,D_2,D_3.于是

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_3} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \oint_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \oint_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \oint_{L_3} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$= \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

(iii) 若区域 D 由几条闭曲线所围成,如图 21－13 所示,这时可适当添加直线段 AB,CE,把区域转化为(ii)的情况来处理.在图 21－13 中连结了 AB,CE 后,则 D 的边界曲线由 AB,L_2,BA,AFC,CE,L_3,EC 及 CGA 构成.由(ii)知

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma$$

$$= \left\{\int_{AB} + \int_{L_2} + \int_{BA} + \int_{AFC} + \int_{CE} + \int_{L_3} + \int_{EC} + \int_{CGA}\right\}(P dx + Q dy)$$

$$= \left(\oint_{L_2} + \oint_{L_3} + \oint_{L_1}\right)(P dx + Q dy)$$

$$= \oint_L P dx + Q dy. \qquad \Box$$

格林公式沟通了沿闭曲线的积分与二重积分之间的联系. 为便于记忆, 格林公式(1)也可写成下述形式:

$$\iint\limits_D \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} d\sigma = \oint_L P dx + Q dy.$$

应用格林公式可以简化某些曲线积分的计算.

例 1 计算 $\int_{AB} x dy$, 其中曲线 AB 是半径为 r 的圆在第一象限部分(图 21－14).

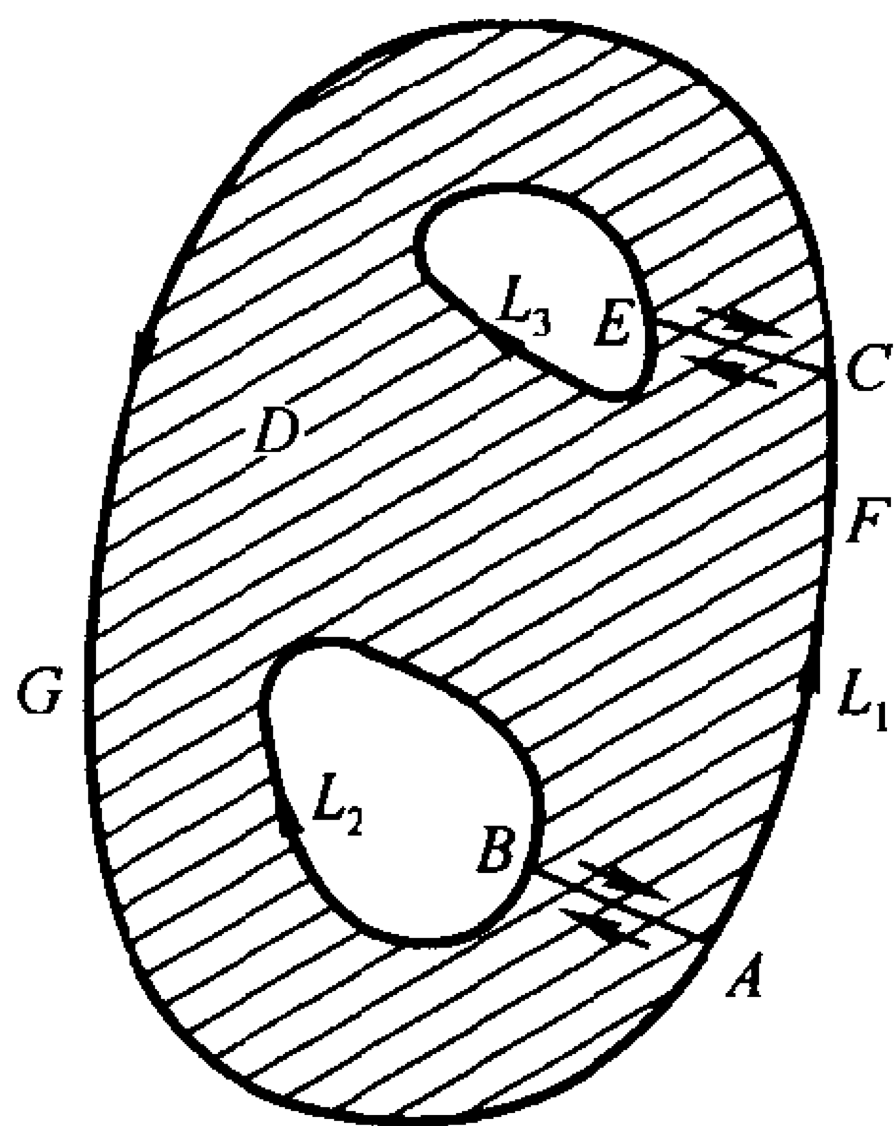


图 21－13

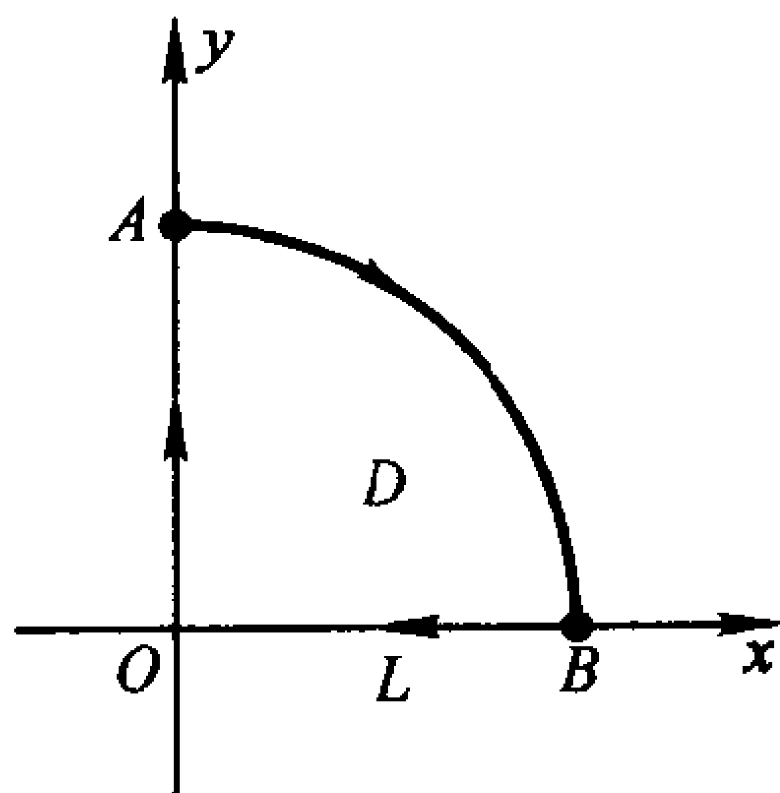


图 21－14

解 对半径为 r 的四分之一圆域 D, 应用格林公式有

$$-\iint\limits_D d\sigma = \oint_{-L} x dy$$

$$= \int_{OA} x dy + \int_{AB} x dy + \int_{BO} x dy.$$

由于 $\int_{OA} x dy = 0$, $\int_{BO} x dy = 0$, 所以

$$\int_{AB} x\mathrm{d}y = -\iint_D \mathrm{d}\sigma = -\frac{1}{4}\pi r^2. \qquad \square$$

例2 计算 $I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$,其中 L 为任一不包含原点的闭区域的边界线.

解 因为$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

在上述区域 D 上连续且相等,于是

$$\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\right]\mathrm{d}\sigma=0,$$

所以由格林公式立即可得

$$I=0. \qquad \square$$

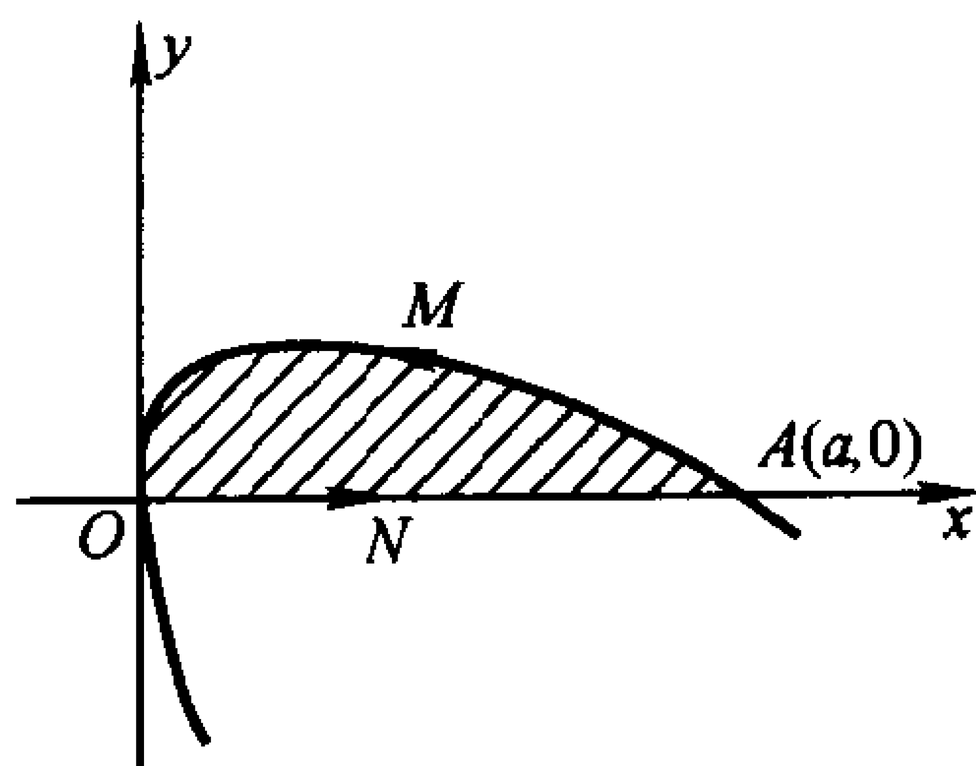


图 21-15

在格林公式中,令 $P=-y,Q=x$,则得到一个计算平面区域 D 的面积 S_D 的公式:

$$S_D=\iint_D \mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

例3 计算抛物线$(x+y)^2=ax(a>0)$与 x 轴所围的面积(图 21-15).

解 曲线$\widehat{AMO}$由函数$y=\sqrt{ax}-x, x\in[0,a]$表示,$\widehat{ONA}$为直线$y=0$,于是

$$\begin{aligned}S_D&=\frac{1}{2}\oint x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\widehat{ONA}} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\widehat{AMO}} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{\widehat{AMO}} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^0\left[x\left(\frac{a}{2\sqrt{ax}}-1\right)-(\sqrt{ax}-x)\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_a^0-\frac{1}{2}\sqrt{ax}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{a}}{4}\int_0^a\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}a^2. \qquad \square\end{aligned}$$

二 曲线积分与路线的无关性

在第二十章§2中计算第二型曲线积分的开始两个例子中,读者可能已经看到,在例1中,以 A 为起点 B 为终点的曲线积分,若所沿的路线不同,则其积分值也不同,但在例2中的曲线积分值只与起点和终点有关,与路线的选取无关.本段将讨论曲线积分在什么条件下,它的值与所沿路线的选取无关.

首先,介绍单连通区域的概念.

若对于平面区域 D 内一封闭曲线,皆可不经过 D 以外的点而连续收缩于

属于D的某一点，则称此平面区域为**单连通区域**；否则称为**复连通区域**. 如图21－16中，D_1与D_2是单连通区域，而D_3与D_4则是复连通区域. 单连通区域也可以这样叙述：D内任一封闭曲线所围成的区域内只含有D中的点. 更通俗地说，单连通区域是没有"洞"的区域，复连通区域是有"洞"的区域.

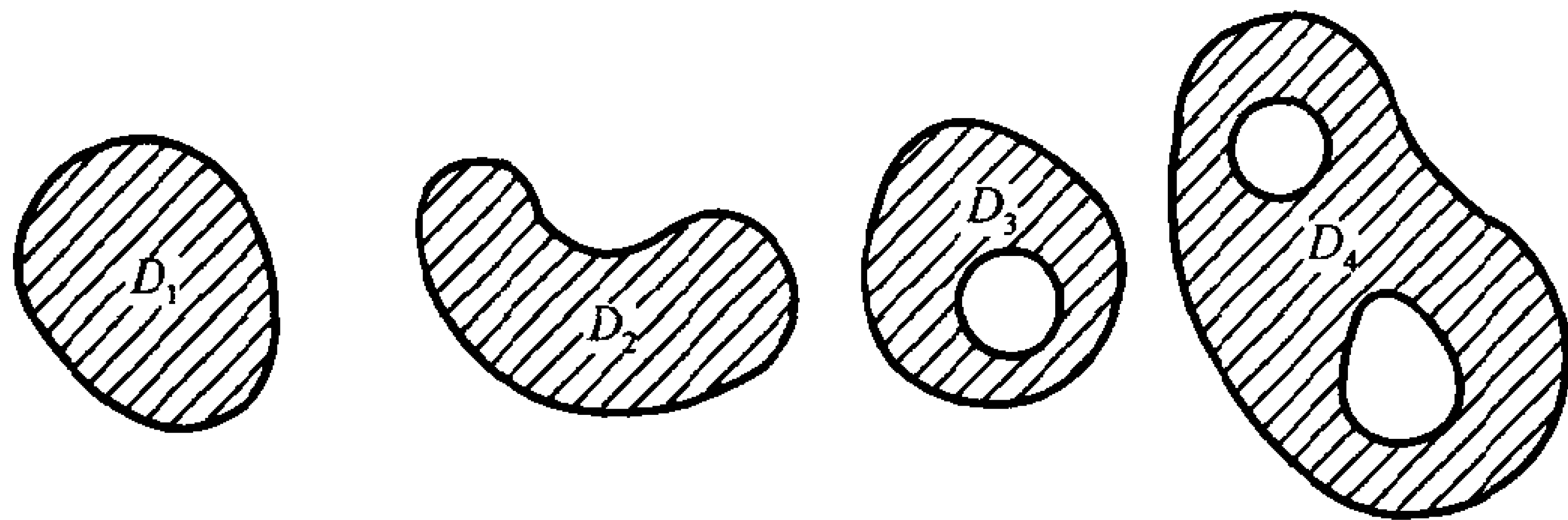


图 21－16

定理 21.12 设D是单连通闭区域. 若函数$P(x,y)$，$Q(x,y)$在D内连续，且具有一阶连续偏导数，则以下四个条件等价：

(i) 沿D内任一按段光滑封闭曲线L，有

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0;$$

(ii) 对D中任一按段光滑曲线L，曲线积分

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

与路线无关，只与L的起点及终点有关；

(iii) $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$是$D$内某一函数$u(x,y)$的全微分，即在$D$内有

$$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y;$$

(iv) 在D内处处成立

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

证 (i)⇒(ii) 如图21－17，设$\widehat{ARB}$与$\widehat{ASB}$为联结点A，B的任意两条按段光滑曲线，由(i)可推得

$$\begin{aligned}&\int_{\widehat{ARB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \int_{\widehat{ASB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \\ &= \int_{\widehat{ARB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{\widehat{BSA}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \\ &= \oint_{\widehat{ARBSA}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0,\end{aligned}$$

所以

$$\int_{\widehat{ARB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{\widehat{ASB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

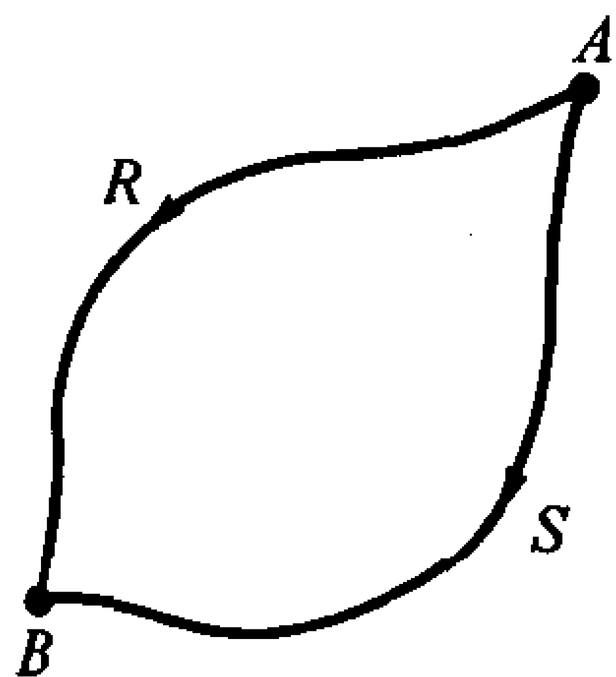


图 21-17

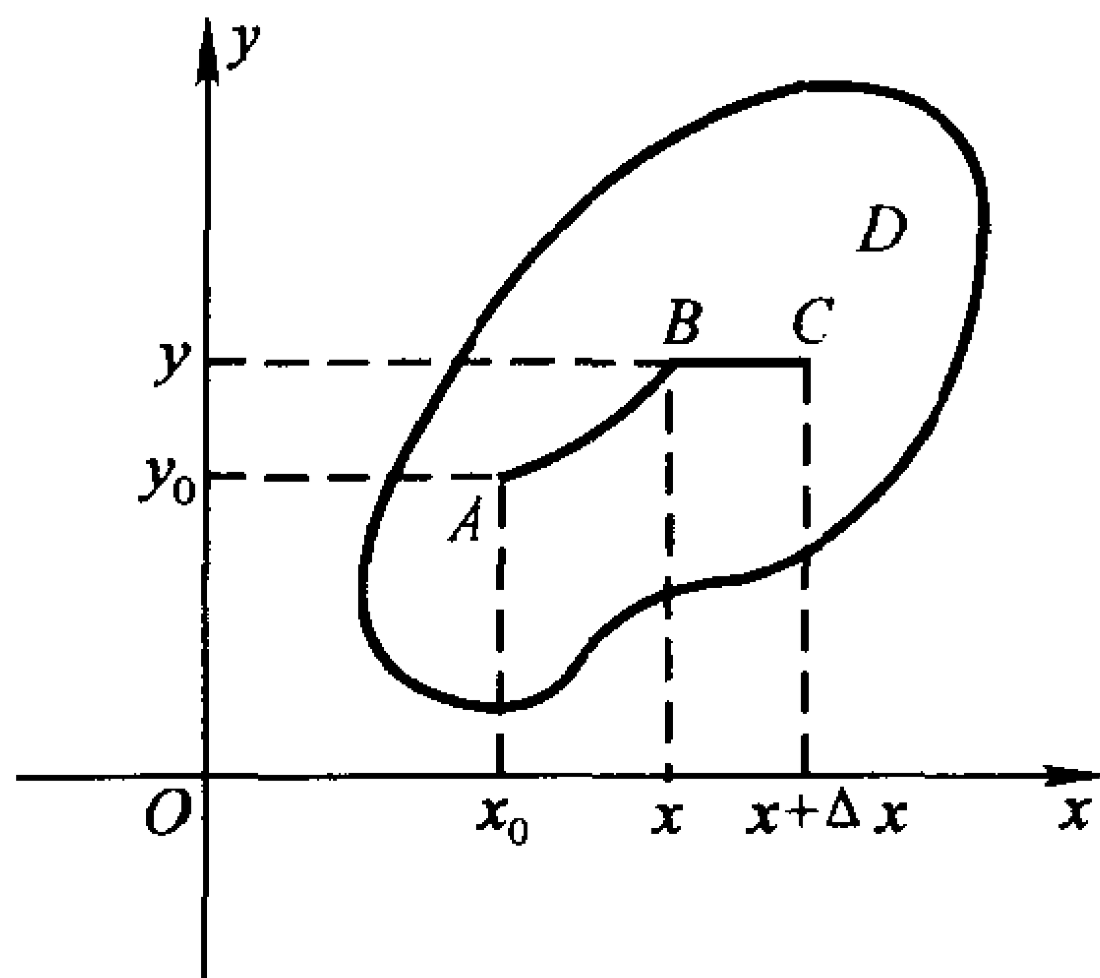


图 21-18

(ii)⇒(iii) 设 $A(x_0,y_0)$为 D 内某一定点，$B(x,y)$为 D 内任意一点. 由(ii)，曲线积分

$$\int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

与路线的选择无关，故当 $B(x,y)$在 D 内变动时，其积分值是 $B(x,y)$的函数，即有

$$u(x,y) = \int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

取 Δx 充分小，使$(x+\Delta x,y)\in D$，则函数 $u(x,y)$对于 x 的偏增量(图 21-18)

$$\begin{aligned} &u(x+\Delta x,y) - u(x,y) \\ &= \int_{AC} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

因为在 D 内曲线积分与路线无关，所以

$$\int_{AC} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{BC} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

由于直线段 BC 平行于 x 轴，所以 $\mathrm{d}y=0$，从而由积分中值定理可得

$$\begin{aligned} \Delta u = u(x+\Delta x,y) - u(x,y) &= \int_{BC} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \\ &= \int_x^{x+\Delta x} P(x,y)\mathrm{d}x = P(x+\theta\Delta x,y)\Delta x, \end{aligned}$$

其中 $0<\theta<1$. 根据 $P(x,y)$在 D 上连续，于是有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} P(x+\theta\Delta x,y) = P(x,y).$$

同理可证$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$. 因此

$$du = Pdx + Qdy.$$

(iii)⇒(iv) 设存在函数 $u(x,y)$,使得

$$du = Pdx + Qdy,$$

所以 $P(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}u(x,y), Q(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)$. 因此

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

因为 $P(x,y), Q(x,y)$在区域 D 内具有一阶连续偏导数,所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

从而在 D 内每一点处都有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

(iv)⇒(i) 设 L 为 D 内任一按段光滑封闭曲线,记 L 所围的区域为 σ. 由于 D 为单连通区域,所以区域 σ 含在 D 内. 应用格林公式及在 D 内恒有 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 的条件,就得到

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma = 0.$$

上面我们将四个条件循环推导了一遍,这就证明了它们是相互等价的. □

应用定理 21.12 中的条件(iv)考察第二十章§2 中的例 1 与例 2. 在例 1 中 $P(x,y)=xy, Q(x,y)=y-x$. 由于 $\frac{\partial P}{\partial y}=x, \frac{\partial Q}{\partial x}=-1, \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$,故积分与路线有关. 在例 2 中 $P(x,y)=y, Q(x,y)=x$,由于

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1,$$

所以积分与路线无关.

定理 21.12 中要求 D 为单连通区域是重要的. 如本节例 2,对任何不包含原点的单连通区域 D,已证得在这个 D 内的任何封闭曲线 L 上,皆有

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0. \tag{3}$$

倘若 L 为绕原点一周的封闭曲线,则函数 $P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}, Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ 只在剔除原点外的任何区域 D 上有定义,所以 L 必含在某个复连通区域内. 这时它不满足定理 21.12 的条件,因而就不能保证(3)式成立. 事实上,设 L 为绕原点一周的圆

$$L: x = a\cos\theta, y = a\sin\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

则有

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}{a^2}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

若 $P(x,y)$, $Q(x,y)$满足定理 21.12 的条件,则由上述证明可看到二元函数

$$u(x,y) = \int_{AB} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$
$$= \int_{A(x_0,y_0)}^{B(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

具有性质

$$\mathrm{d}u(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

它与一元函数的原函数相仿.所以我们也称 $u(x,y)$为 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 的一个**原函数**.

例 4 试应用曲线积分求

$$(2x + \sin y)\mathrm{d}x + (x\cos y)\mathrm{d}y$$

的原函数.

解 这里 $P(x,y) = 2x + \sin y$, $Q(x,y) = x\cos y$,所以在整个平面上成立

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y.$$

由定理 21.12,曲线积分

$$\int_{AB}(2x + \sin y)\mathrm{d}x + (x\cos y)\mathrm{d}y$$

只与起点 A 和终点 B 有关,而与路线的选择无关.为此,取 $A(0,0)$, $B(x,y)$,取路线为图 21-19 中的折线段 ACB.于是有

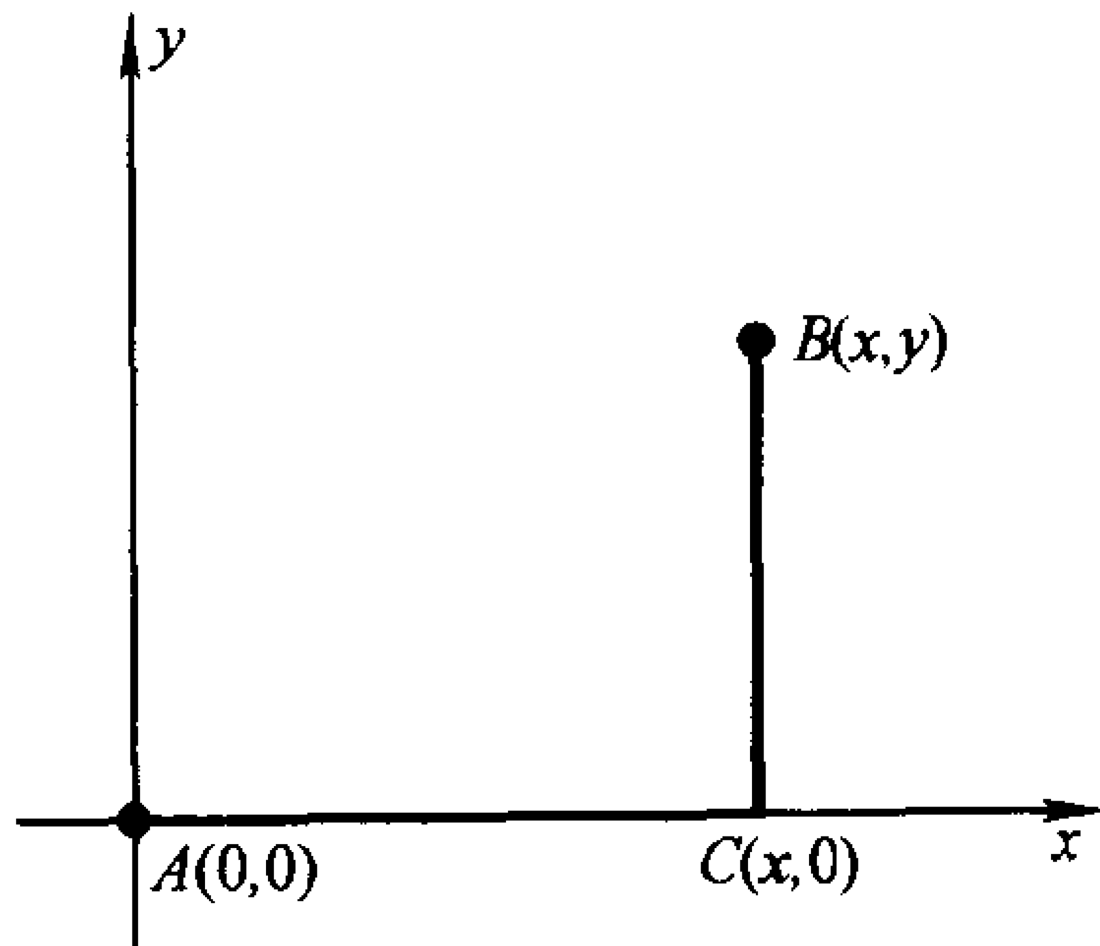


图 21-19

$$u(x,y) = \int_0^x 2x\mathrm{d}x + \int_0^y x\cos y\mathrm{d}y$$
$$= x^2 + x\sin y.$$

□

习　题

1. 应用格林公式计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L (x+y)^2\mathrm{d}x - (x^2+y^2)\mathrm{d}y$,其中 L 是以 $A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(2,5)$为顶点的三角形,方向取正向;

(2) $\int_{AB}(e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy$，其中 m 为常数，AB 为由 $(a,0)$ 到 $(0,0)$ 经过圆 $x^2+y^2=ax$ 上半部的路线.

2. 应用格林公式计算下列曲线所围的平面面积：

(1) **星形线**：$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$；

(2) **双纽线**：$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

3. 证明：若 L 为平面上封闭曲线，$\boldsymbol{l}$ 为任意方向向量，则

$$\oint_L \cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})ds = 0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲线 L 的外法线方向.

4. 求积分值 $I=\oint_L[x\cos(\boldsymbol{n},x)+y\cos(\boldsymbol{n},y)]ds$，其中 L 为包围有界区域的封闭曲线，$\boldsymbol{n}$ 为 L 的外法线方向.

5. 验证下列积分与路线无关，并求它们的值：

(1) $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)$；

(2) $\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x\cos y - y^2\sin x)dx + (2y\cos x - x^2\sin y)dy$；

(3) $\int_{(2,1)}^{(1,2)}\frac{ydx-xdy}{x^2}$，沿在右半平面的路线；

(4) $\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$，沿不通过原点的路线；

(5) $\int_{(2,1)}^{(1,2)}\varphi(x)dx+\psi(y)dy$，其中 $\varphi(x)$，$\psi(y)$ 为连续函数.

6. 求下列全微分的原函数：

(1) $(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$；

(2) $e^x[e^y(x-y+2)+y]dx+e^x[e^y(x-y)+1]dy$；

(3) $f(\sqrt{x^2+y^2})xdx+f(\sqrt{x^2+y^2})ydy$.

7. 为了使曲线积分

$$\int_L F(x,y)(ydx+xdy)$$

与积分路线无关，可微函数 $F(x,y)$ 应满足怎样的条件？

---

8. 计算曲线积分

$$\int_{AMB}[\varphi(y)e^x - my]dx + [\varphi'(y)e^x - m]dy,$$

其中 $\varphi(y)$ 和 $\varphi'(y)$ 为连续函数；AMB 为连接点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $B(x_2,y_2)$ 的任何路线，但与直线段 AB 围成已知大小为 S 的面积.

9. 设函数 $f(u)$ 具有一阶连续导数，证明对任何光滑封闭曲线 L，有

$$\oint_L f(xy)(ydx+xdy)=0.$$

10. 设函数 $u(x,y)$ 在由封闭的光滑曲线 L 所围的区域 D 上具有二阶连续偏导数,证明

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}\sigma = \oint_L \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s,$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 是 $u(x,y)$ 沿 L 外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

§4 二重积分的变量变换

一 二重积分的变量变换公式

在定积分的计算中,我们得到了如下结论:设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,$x=\varphi(t)$ 当 t 从 α 变到 β 时,严格单调地从 a 变到 b,且 $\varphi(t)$ 连续可导,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{1}$$

当 $\alpha<\beta$(即 $\varphi'(t)>0$)时,记 $X=[a,b]$,$Y=[\alpha,\beta]$,则 $X=\varphi(Y)$,$Y=\varphi^{-1}(X)$.利用这些记号,公式(1)又可写成

$$\int_X f(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(X)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{2}$$

当 $\alpha>\beta$(即 $\varphi'(t)<0$)时,(1)式可写成

$$\int_X f(x)\mathrm{d}x = -\int_{\varphi^{-1}(X)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{3}$$

故当 $\varphi(t)$ 为严格单调且连续可微时,(2)式和(3)式可统一写成如下的形式:

$$\int_X f(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(X)} f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

下面我们把公式(4)推广到二重积分的场合.为此,先给出下面的引理.

引理 设变换 $T:x=x(u,v)$,$y=y(u,v)$ 将 uv 平面上由按段光滑封闭曲线所围的闭区域 Δ,一对一地映成 xy 平面上的闭区域 D,函数 $x(u,v)$,$y(u,v)$ 在 Δ 内分别具有一阶连续偏导数且它们的函数行列式

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0, \quad (u,v)\in\Delta,$$

则区域 D 的面积

$$\mu(D) = \iint_\Delta |J(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{5}$$

证 下面给出当 $y(u,v)$ 在 Δ 内具有二阶连续偏导数时的证明.对 $y(u,v)$ 具有一阶连续偏导数条件下的证明在本章§9 中给出.

由于 T 是一对一变换,且 $J(u,v)\neq 0$,因而 T 把 Δ 的内点变为 D 的内点,

所以 Δ 的按段光滑边界曲线 L_{Δ} 变换到 D 时,其边界曲线 L_D 也是按段光滑的.

设曲线 L_{Δ} 的参数方程为

$$u = u(t), v = v(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta).$$

由于 L_{Δ} 按段光滑,所以 $u'(t), v'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上至多除去有限个第一类间断点外,在其他的点上都连续.因为 $L_D = T(L_{\Delta})$,所以 L_D 的参数方程为

$$\begin{aligned} x &= x(t) = x(u(t), v(t)), \\ y &= y(t) = y(u(t), v(t)) \end{aligned} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta).$$

若规定 t 从 α 变到 β 时,对应于 L_D 的正向,则根据格林公式,取 $P(x,y) = 0, Q(x,y) = x$,有

$$\begin{aligned} \mu(D) &= \oint_{L_D} x\mathrm{d}y = \int_{\alpha}^{\beta} x(t) y'(t) \mathrm{d}t \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} x(u(t), v(t)) \left[\frac{\partial y}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial y}{\partial v} v'(t) \right] \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{6}$$

另一方面,在 uv 平面上

$$\begin{aligned} &\oint_{L_{\Delta}} x(u,v) \left[\frac{\partial y}{\partial u} \mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v} \mathrm{d}v \right] \\ &\quad = \pm \int_{\alpha}^{\beta} x(u(t), v(t)) \left[\frac{\partial y}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial y}{\partial v} v'(t) \right] \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{7}$$

其中正号及负号分别由 t 从 α 变到 β 时,是对应于 L_{Δ} 的正方向或负方向所决定.由(6)及(7)式得到

$$\begin{aligned} \mu(D) &= \pm \oint_{L_{\Delta}} x(u,v) \left[\frac{\partial y}{\partial u} \mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v} \mathrm{d}v \right] \\ &= \pm \oint_{L_{\Delta}} x(u,v) \frac{\partial y}{\partial u} \mathrm{d}u + x(u,v) \frac{\partial y}{\partial v} \mathrm{d}v. \end{aligned}$$

令 $P(u,v) = x(u,v)\frac{\partial y}{\partial u}, Q(u,v) = x(u,v)\frac{\partial y}{\partial v}$,在 uv 平面上对上式应用格林公式,得到

$$\mu(D) = \pm \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) \mathrm{d}u \mathrm{d}v.$$

由于函数 $y(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,即有 $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$,因此,$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = J(u,v)$,于是

$$\mu(D)=\pm\iint\limits_{\Delta}J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

又因为 $\mu(D)$ 总是非负的，而 $J(u,v)$ 在 Δ 上不为零且连续，故其函数值在 Δ 上不变号，所以

$$\mu(D)=\iint\limits_{\Delta}|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \qquad \square$$

定理 21.13 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积，变换 $T: x=x(u,v), y=y(u,v)$ 将 uv 平面由按段光滑封闭曲线所围成的闭区域 Δ 一对一地映成 xy 平面上的闭区域 D，函数 $x(u,v), y(u,v)$ 在 Δ 内分别具有一阶连续偏导数且它们的函数行列式

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0,\quad (u,v)\in\Delta,$$

则
$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Delta}f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

证 用曲线网把 Δ 分成 n 个小区域 Δ_i，在变换 T 作用下，区域 D 也相应地被分成 n 个小区域 D_i. 记 Δ_i 及 D_i 的面积为 $\mu(\Delta_i)$ 及 $\mu(D_i)(i=1,2,\cdots,n)$. 由引理及二重积分中值定理，有

$$\mu(D_i)=\iint\limits_{\Delta_i}|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=|J(\bar{u}_i,\bar{v}_i)|\mu(\Delta_i),$$

其中 $(\bar{u}_i,\bar{v}_i)\in\Delta_i(i=1,2,\cdots,n)$.

令 $\xi_i=x(\bar{u}_i,\bar{v}_i), \eta_i=y(\bar{u}_i,\bar{v}_i)$，则 $(\xi_i,\eta_i)\in D_i(i=1,2,\cdots,n)$. 作二重积分 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的积分和

$$\begin{aligned}\sigma&=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\mu(D_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}f(x(\bar{u}_i,\bar{v}_i),y(\bar{u}_i,\bar{v}_i))|J(\bar{u}_i,\bar{v}_i)|\mu(\Delta_i).\end{aligned}$$

上式右边的和式是 Δ 上可积函数 $f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|$ 的积分和. 又由变换 T 的连续性可知，当区域 Δ 的分割 $T_\Delta:\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}$ 的细度 $\|T_\Delta\|\to 0$ 时，区域 D 相应的分割 $T_D:\{D_1,D_2,\cdots,D_n\}$ 的细度 $\|T_D\|$ 也趋于零. 因此得到

$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Delta}f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \qquad \square$$

例 1 求 $\iint\limits_{D}\mathrm{e}^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围区域（图 21

-20).

解 为了简化被积函数,令 $u=x-y, v=x+y$. 为此作变换 $T: x=\frac{1}{2}(u+v), y=\frac{1}{2}(v-u)$,则

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}>0.$$

在变换 T 的作用下,区域 D 的原象 Δ 如图 21-21 所示. 所以

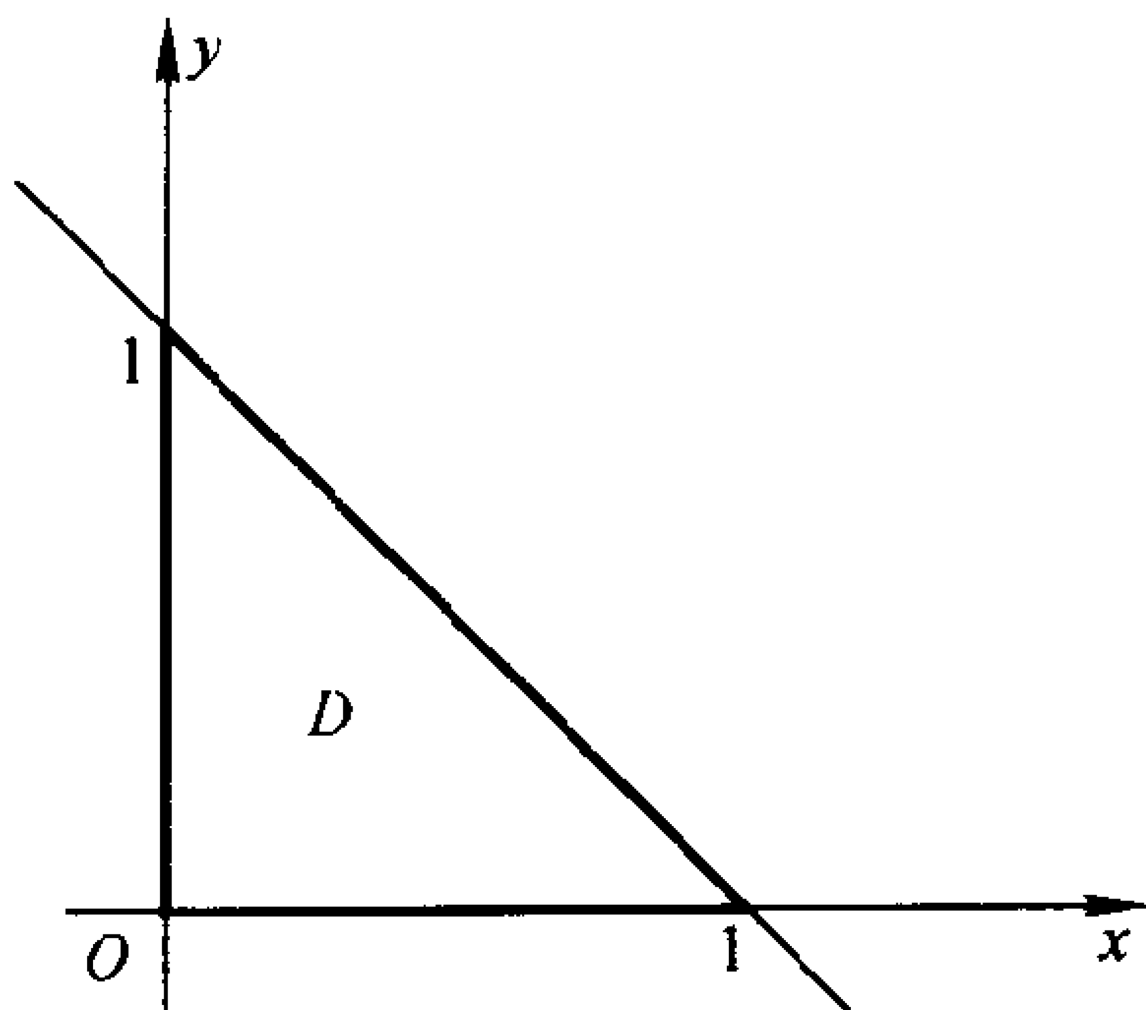


图 21-20

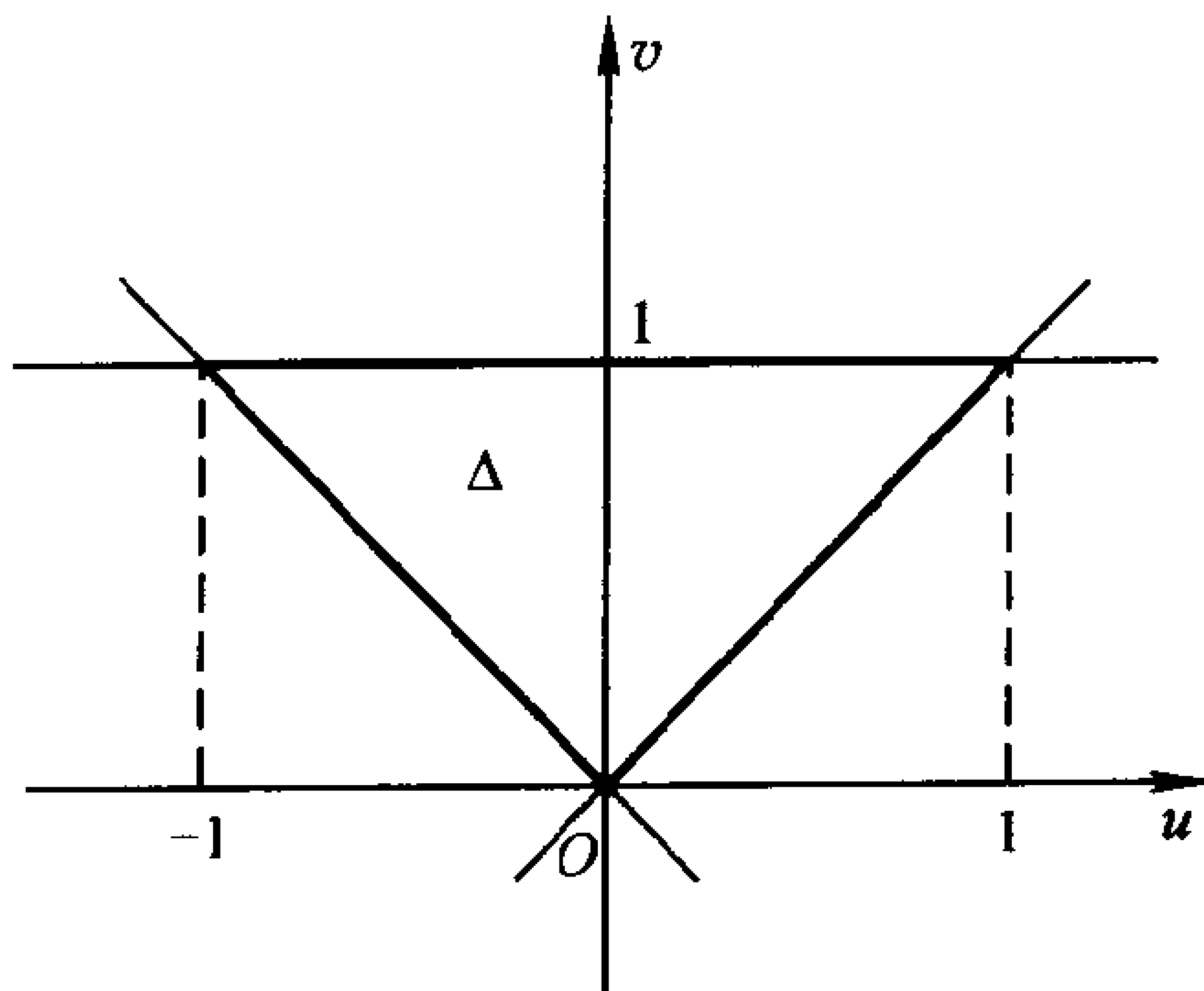


图 21-21

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy=\iint_\Delta e^{\frac{u}{v}}\cdot\frac{1}{2}dudv=\frac{1}{2}\int_0^1 dv\int_{-v}^{v}e^{\frac{u}{v}}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 v(e-e^{-1})dv=\frac{e-e^{-1}}{4}.$$ □

例 2 求抛物线 $y^2=mx, y^2=nx$ 和直线 $y=\alpha x, y=\beta x$ 所围区域 D 的面积 $\mu(D)$ $(0<m<n, 0<\alpha<\beta)$.

解 D 的面积

$$\mu(D)=\iint_D dxdy.$$

为了简化积分区域,作变换

$$x=\frac{u}{v^2}, y=\frac{u}{v}.$$

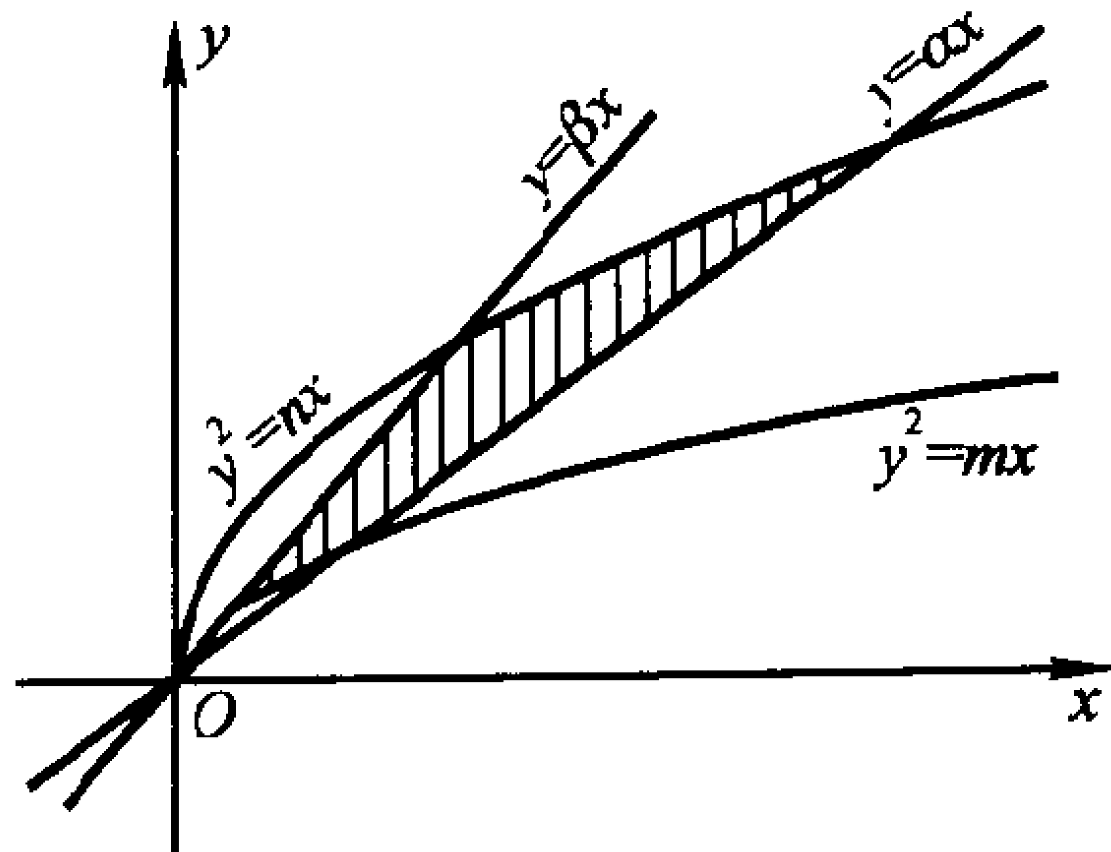


图 21-22

它把 xy 平面上的区域 D(图 21-22 中的阴影部分)对应到 uv 平面上的矩形区域 $\Delta=[m,n]\times[\alpha,\beta]$. 由于

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{1}{v^2} & -\frac{2u}{v^3}\\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2}\end{vmatrix}=\frac{u}{v^4}>0,\quad (u,v)\in\Delta,$$

所以

$$\mu(D)=\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\iint\limits_\Delta \frac{u}{v^4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}v}{v^4}\cdot\int_m^n u\mathrm{d}u=\frac{(n^2-m^2)(\beta^3-\alpha^3)}{6\alpha^3\beta^3}.\qquad\square$$

二 用极坐标计算二重积分

当积分区域是圆域或圆域的一部分,或者被积函数的形式为 $f(x^2+y^2)$时,采用极坐标变换

$$T:\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}\quad 0\leqslant r<+\infty, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\tag{8}$$

往往能达到简化积分区域或被积函数的目的.此时,变换 T 的函数行列式为

$$J(r,\theta)=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r.$$

容易知道,极坐标变换 T 把 $r\theta$ 平面上的矩形$[0,R]\times[0,2\pi]$变换成 xy 平面上的圆域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$.但对应不是一对一的.例如,$xy$ 平面上原点 $O(0,0)$与 $r\theta$ 平面上直线$r=0$ 相对应,x 轴上线段AA'对应于 $r\theta$ 平面上两条线段CD 和EF(图 21-23).又当 $r=0$ 时,$J(r,\theta)=0$,因此不满足定理 21.13 的条件.但是,我们仍然有下面的结论.

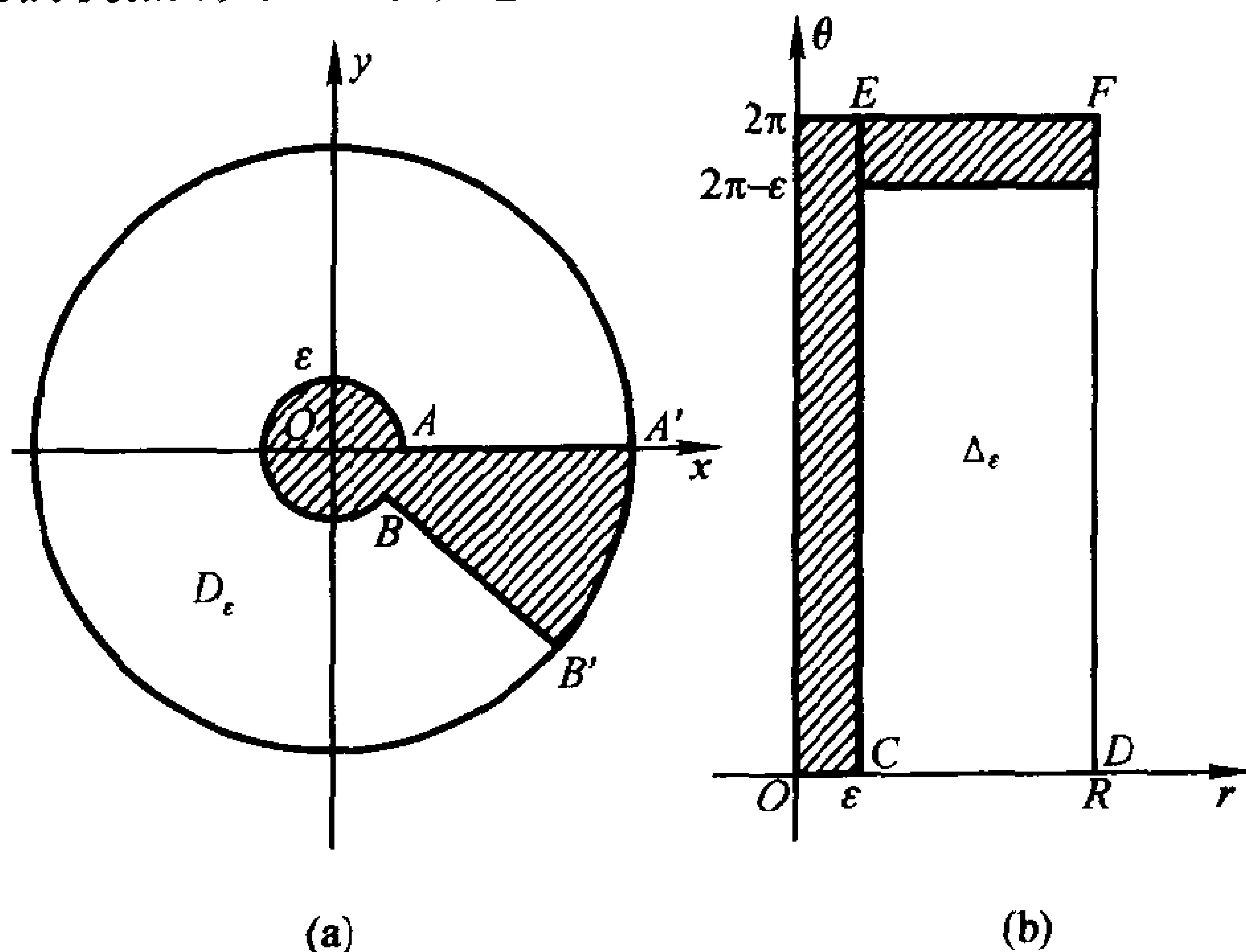


图 21-23

定理 21.14 设 $f(x,y)$ 满足定理 21.13 的条件,且在极坐标变换(8)下,xy 平面上有界闭区域 D 与 $r\theta$ 平面上区域 Δ 对应,则成立

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta. \tag{9}$$

证 若 D 为圆域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$,则 Δ 为 $r\theta$ 平面上矩形区域 $[0,R]\times[0,2\pi]$. 设 D_ε 为在圆环 $\{(x,y)\mid 0<\varepsilon^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2\}$ 中除去中心角为 ε 的扇形 $BB'A'A$ 所得的区域(图 21-23(a)),则在变换(8)下,D_ε 对应于 $r\theta$ 平面上的矩形区域 $\Delta_\varepsilon=[\varepsilon,R]\times[0,2\pi-\varepsilon]$(图 21-23(b)). 但极坐标变换(8)在 D_ε 与 Δ_ε 之间是一对一变换,且在 Δ_ε 上函数行列式 $J(r,\theta)>0$. 于是由定理 21.13,有

$$\iint_{D_\varepsilon} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Delta_\varepsilon} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

因为 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上有界,在上式中令 $\varepsilon\to0$,即得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

若 D 是一般的有界闭区域,则取足够大的 $R>0$,使 D 包含在圆域 $D_R=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$ 内,并且在 D_R 上定义函数

$$f(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\overline{\in} D.\end{cases}$$

函数 $F(x,y)$ 在 D_R 内至多在有限条按段光滑曲线上间断,因此,对函数 $F(x,y)$,由前述有

$$\iint_{D_R} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Delta_R} F(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

其中 Δ_R 为 $r\theta$ 平面上矩形区域 $[0,R]\times[0,2\pi]$. 由函数 $F(x,y)$ 的定义,即得(9)式. □

由定理 21.14 看到,用极坐标变换计算二重积分,除变量作相应的替换外,还须把"面积微元"$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 换成 $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

下面介绍二重积分在极坐标系下如何化为累次积分计算.

(i) 若原点 $O\overline{\in}D$,且 xy 平面上射线 $\theta=$ 常数与 D 的边界至多交于两点(图 21-24),则 Δ 必可表示成

$$r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta),\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,$$

于是有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r. \tag{10}$$

类似地，若 xy 平面上的圆 $r=$ 常数与 D 的边界至多交于两点(图 21－25)，则 Δ 必可表示成

$$\theta_1(r)\leqslant\theta\leqslant\theta_2(r),r_1\leqslant r\leqslant r_2,$$

所以

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{r_1}^{r_2}r\mathrm{d}r\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{11}$$

(ii) 若原点为 D 的内点(图 21－26)，D 的边界的极坐标方程为 $r=r(\theta)$，则 Δ 可表示成

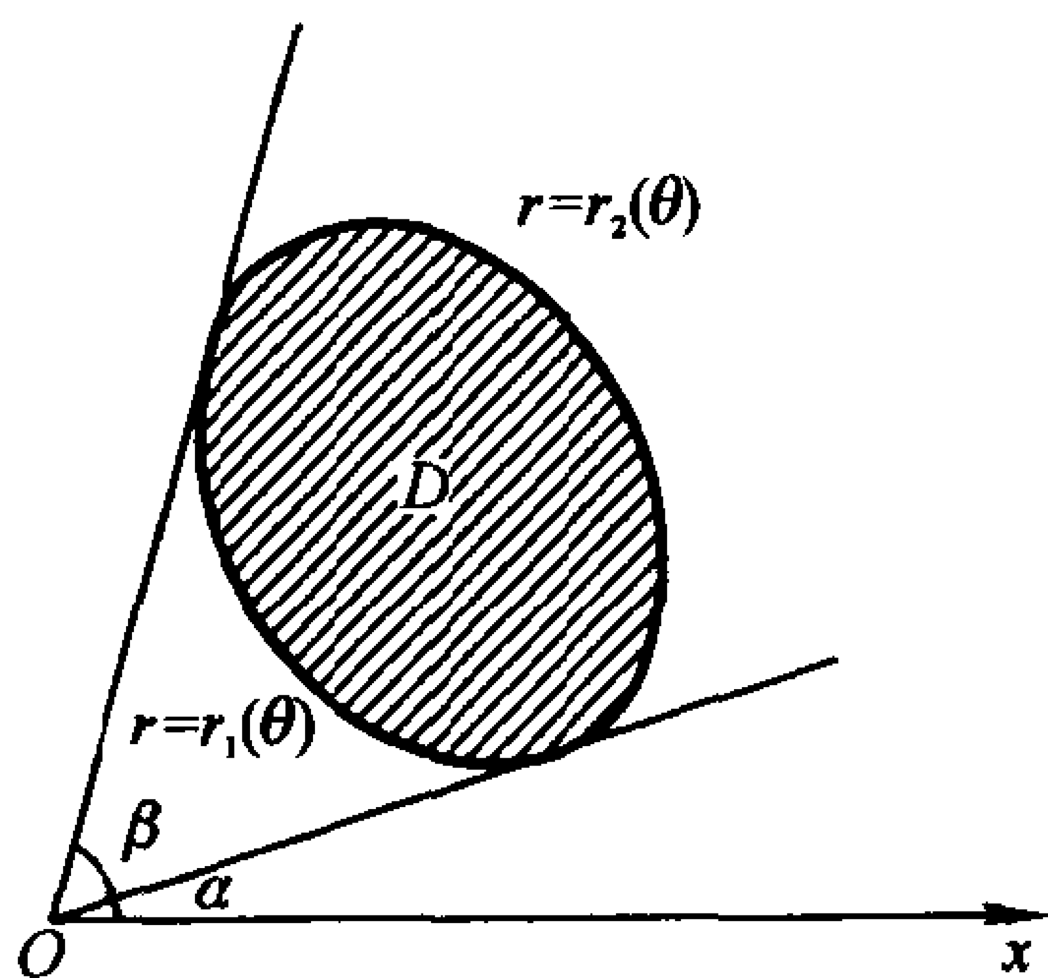


图 21－24

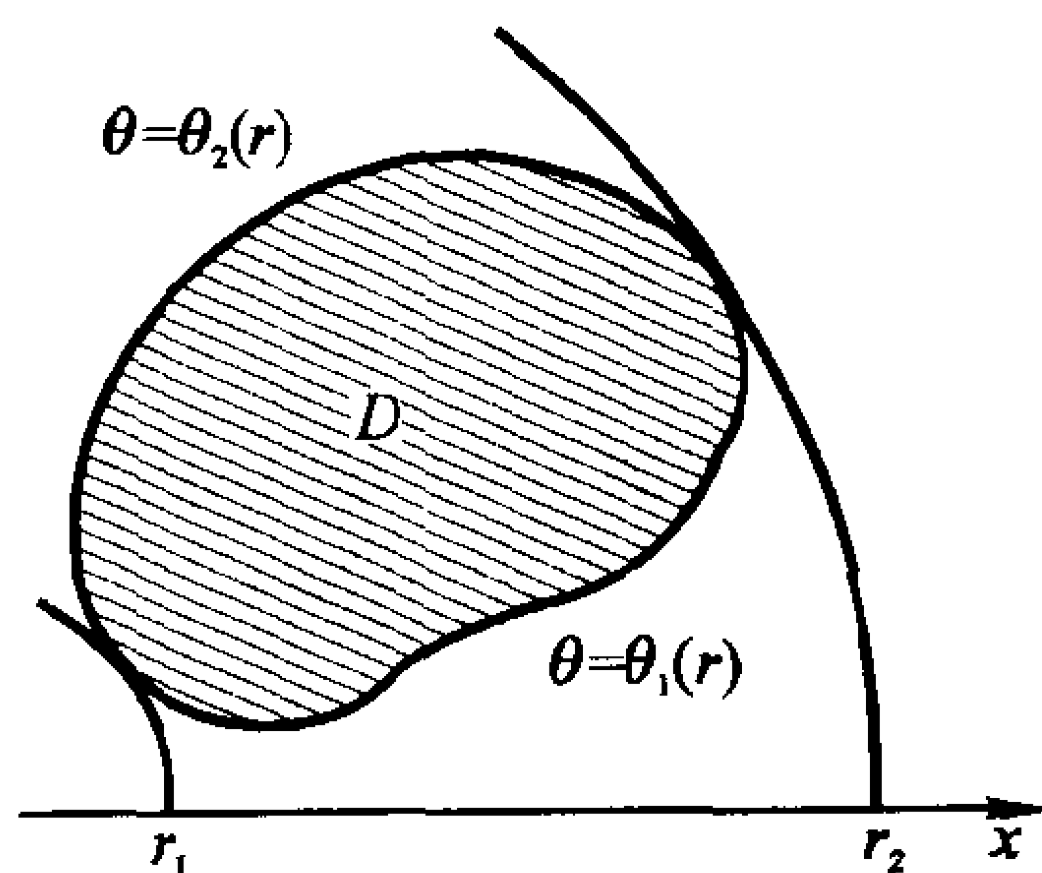


图 21－25

$$0\leqslant r\leqslant r(\theta),0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

所以

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r. \tag{12}$$

(iii) 若原点 O 在 D 的边界上(图 21－27)，则 Δ 为

$$0\leqslant r\leqslant r(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,$$

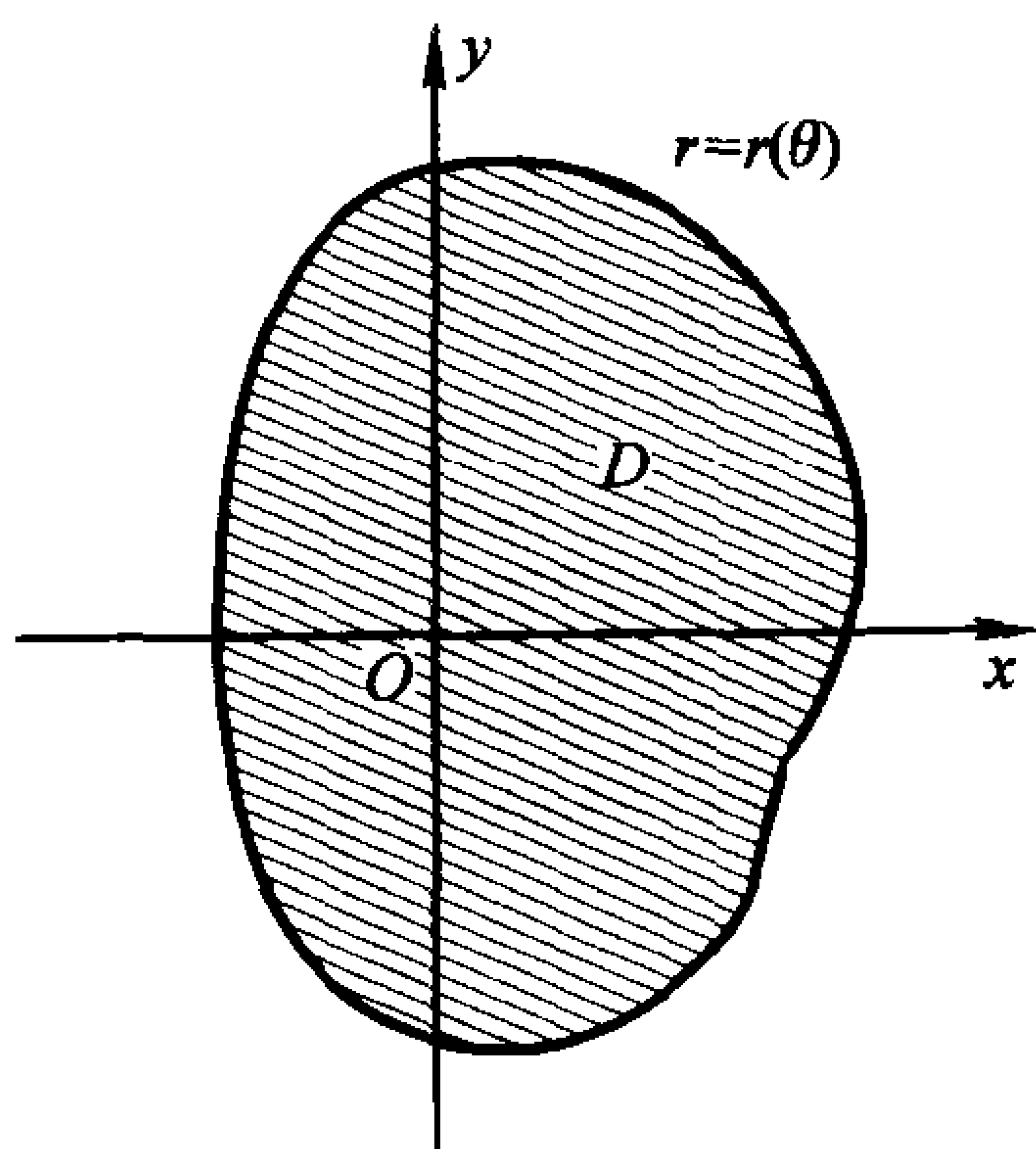


图 21－26

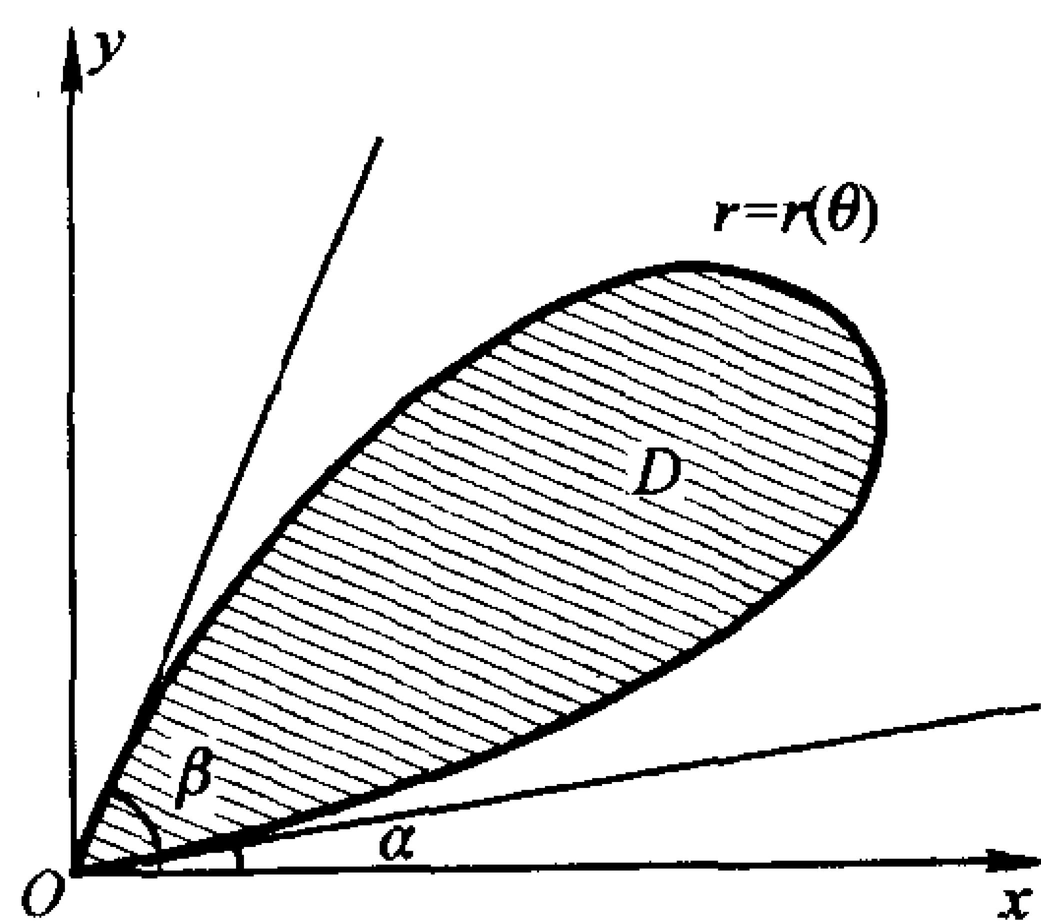


图 21－27

于是

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r. \tag{13}$$

例 3　计算

$$I = \iint_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

其中 D 为圆域：$x^2+y^2\leqslant 1$.

解　由于原点为 D 的内点，故由(12)式，有

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{1-x^2-y^2}} &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{2\pi}\left[-\sqrt{1-r^2}\right]_0^1 \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi.\end{aligned}$$ □

例 4　求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=Rx$ 所割下部分的体积(称为维维安尼(Viviani)体).

解　由所求立体的对称性(图 21－28)，我们只要求出在第一卦限内的部分体积后乘以 4，即得所求立体的体积．在第一卦限内的立体是一个曲顶柱体，其底为 xy 平面内由 $y\geqslant 0$ 和 $x^2+y^2\leqslant Rx$ 所确定的区域，曲顶的方程为 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$．所以

$$V = 4\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $D=\{(x,y)\mid y\geqslant 0, x^2+y^2\leqslant Rx\}$(图 21－29)．用极坐标变换后，由(13)式，有

$$\begin{aligned}V &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}\,r\mathrm{d}r \\ &= \frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).\end{aligned}$$ □

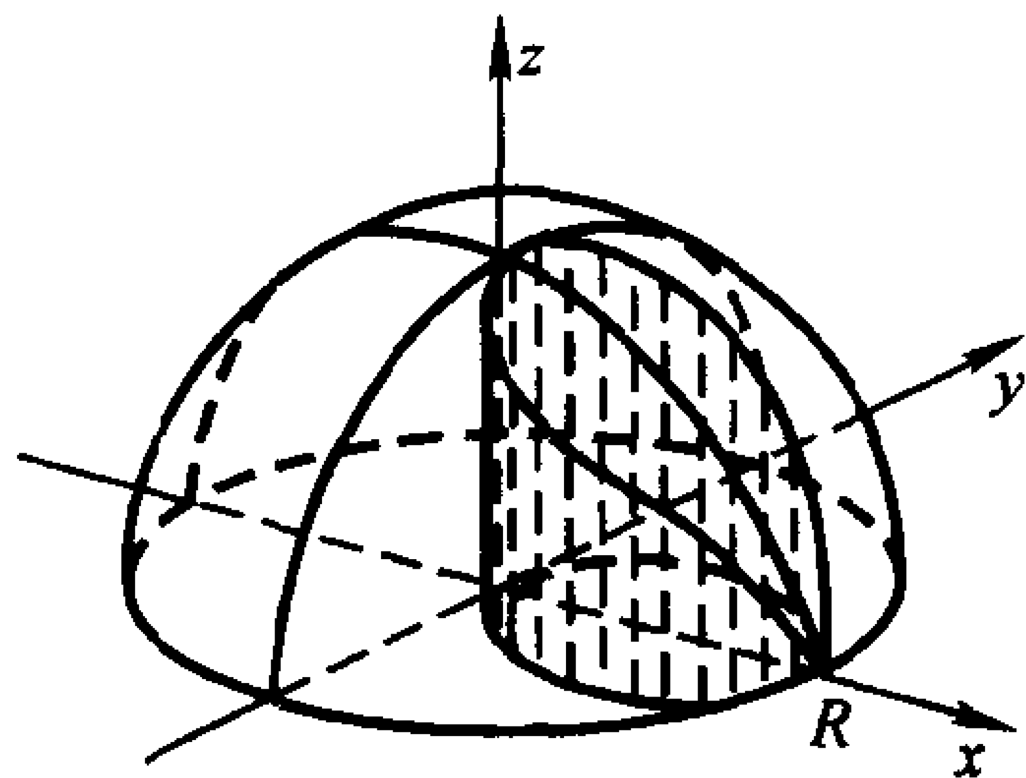


图 21－28

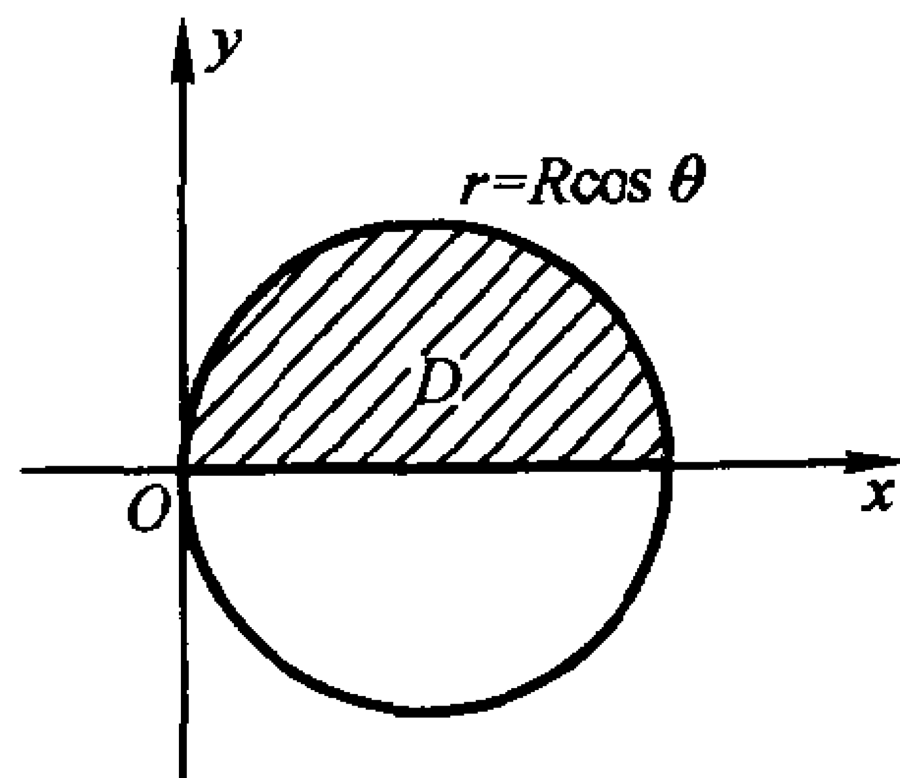


图 21－29

例5 计算 $I=\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}d\sigma$,其中 D 为圆域:$x^2+y^2\leqslant R^2$.

解 利用极坐标变换,由公式(12),有

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R re^{-r^2}dr=\pi(1-e^{-R^2}).$$ □

由例5可见,若不用极坐标变换计算,而用直角坐标系下化为累次积分计算,就会遇到计算 $\int e^{-y^2}dy$ 的问题,但我们不能把 $\int e^{-y^2}dy$ 表示成初等函数.

与极坐标相类似,我们也可以作下面的广义极坐标变换:

$$T:\begin{cases}x=ar\cos\theta,\\ y=br\sin\theta,\end{cases}\quad 0\leqslant r<+\infty,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

并计算得

$$J(r,\theta)=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -ar\sin\theta\\ b\sin\theta & br\cos\theta\end{vmatrix}=abr.$$

对广义极坐标变换也有与定理21.14相应的定理,这里不再赘述了.

例6 求椭球体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$$

的体积.

解 由对称性,椭球体的体积 V 是第一卦限部分体积的8倍,这一部分是以 $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ 为曲顶,

$$D=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant y\leqslant b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},0\leqslant x\leqslant a\right\}$$

为底的曲顶柱体,所以

$$V=8\iint\limits_D c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy.$$

应用广义极坐标变换,由于 $z=c\sqrt{1-r^2}$,因此

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 c\sqrt{1-r^2}abrdr$$

$$=8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr=\frac{4\pi}{3}abc.$$ □

当 $a=b=c=R$ 时,得到球的体积为 $\frac{4\pi}{3}R^3$.

习 题

1. 对积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$进行极坐标变换并写出变换后不同顺序的累次积分：

(1) 当 D 为由不等式$a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2,y\geqslant 0$所确定的区域；

(2) $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant y,x\geqslant 0\}$；

(3) $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant x+y\leqslant 1\}$.

2. 用极坐标计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid \pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2\}$；

(2) $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x+y\}$；

(3) $\iint\limits_D |xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为圆域：$x^2+y^2\leqslant a^2$；

(4) $\iint\limits_D f'(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为圆域：$x^2+y^2\leqslant R^2$.

3. 在下列积分中引入新变量 u,v 后，试将它化为累次积分：

(1) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{1-x}^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y$，若 $u=x+y,v=x-y$；

(2) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid \sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant\sqrt{a},x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，若 $x=u\cos^4 v$，$y=u\sin^4 v$；

(3) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x+y\leqslant a,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，若 $x+y=u,y=uv$.

4. 试作适当变换，计算下列积分：

(1) $\iint\limits_D (x+y)\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x+y\leqslant\pi,0\leqslant x-y\leqslant\pi\}$；

(2) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

5. 求由下列曲面所围立体 V 的体积：

(1) V 是由 $z=x^2+y^2$ 和 $z=x+y$ 所围的立体；

(2) V 是由曲面 $z^2=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$ 和 $2z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$ 所围的立体.

6. 求由下列曲线所围的平面图形面积：

(1) $x+y=a,x+y=b,y=\alpha x,y=\beta x\ (a<b,\alpha<\beta)$；

(2) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=x^2+y^2$；

(3) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)\quad (x^2+y^2\geqslant a^2)$.

7. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，且 $f(x,y)=f(y,x)$. 证明：

$$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dx\int_0^x f(1-x,1-y)dy.$$

8. 试作适当变换，把下列二重积分化为单重积分：

(1) $\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$，其中 D 为圆域：$x^2+y^2\leqslant 1$；

(2) $\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid |y|\leqslant|x|,|x|\leqslant 1\}$；

(3) $\iint\limits_D f(x+y)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$；

(4) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid x\leqslant y\leqslant 4x, 1\leqslant xy\leqslant 2\}$.

§5 三重积分

一 三重积分的概念

类似于第一型曲线积分，求一个空间立体 V 的质量 M 就可导出三重积分. 设密度函数为 $f(x,y,z)$，为了求 V 的质量，我们把 V 分割成 n 个小块 V_1，$V_2,\cdots,V_n$，在每个小块 V_i 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，则

$$M=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i,$$

其中 ΔV_i 为小块 V_i 的体积，$\|T\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{V_i \text{ 的直径}\}$.

设 $f(x,y,z)$ 是定义在三维空间**可求体积**的有界区域 V[①]上的有界函数. 现用若干光滑曲面所组成的曲面网 T 来分割 V，它把 V 分成 n 个小区域 V_1，$V_2,\cdots,V_n$. 记 V_i 的体积为 $\Delta V_i(i=1,2,\cdots,n)$，$\|T\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{V_i \text{ 的直径}\}$. 在每个 V_i 中任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，作积分和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i.$$

定义 1 设 $f(x,y,z)$ 为定义在三维空间可求体积的有界闭区域 V 上的函数，J 是一个确定的数. 若对任给的正数 ε，总存在某一正数 δ，使得对于 V 的任何分割 T，只要 $\|T\|<\delta$，属于分割 T 的所有积分和都有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i - J\right|<\varepsilon,$$

则称 $f(x,y,z)$ 在 V 上**可积**，数 J 称为函数 $f(x,y,z)$ 在 V 上的**三重积分**，

① 读者可仿照 §1 定义平面图形可求面积的方法建立空间立体可求体积的概念. 有界闭区域 V 可求体积. 今后我们总假定 V 的边界由光滑曲面组成，以保证积分区域是可求体积的.

记作

$$J=\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V \quad 或 \quad J=\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $f(x,y,z)$称为**被积函数**,x,y,z 称为**积分变量**,V 称为**积分区域**.

当 $f(x,y,z)\equiv 1$ 时,$\iiint\limits_V \mathrm{d}V$ 在几何上表示 V 的体积.

三重积分具有与二重积分相应的可积条件和有关性质(参见§1),这里不一一细述了.例如,类似于二重积分,有

(i) 有界闭区域 V 上的连续函数必可积;

(ii) 如果有界闭区域 V 上的有界函数$f(x,y,z)$的间断点集中在有限多个零体积(可类似于零面积那样来定义)的曲面上,则 $f(x,y,z)$在 V 上必可积.

二 化三重积分为累次积分

定理 21.15 若函数 $f(x,y,z)$在长方体 $V=[a,b]\times[c,d]\times[e,h]$上的三重积分存在,且对任何 $x\in[a,b]$,二重积分

$$I(x)=\iint\limits_D f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

存在,其中 $D=[c,d]\times[e,h]$,则积分

$$\int_a^b \mathrm{d}x\iint\limits_D f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

也存在,且

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b \mathrm{d}x\iint\limits_D f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{1}$$

证 用平行于坐标面的平面网 T 作分割,它把 V 分成有限个小长方体

$$v_{ijk}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\times[z_{k-1},z_k].$$

设 M_{ijk},m_{ijk}分别为$f(x,y,z)$在 v_{ijk}上的上、下确界.对于$[x_{i-1},x_i]$上任一点ξ_i,在 $D_{jk}=[y_{j-1},y_j]\times[z_{k-1},z_k]$上有

$$m_{ijk}\Delta y_j\Delta z_k\leqslant\iint\limits_{D_{jk}} f(\xi_i,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\leqslant M_{ijk}\Delta y_j\Delta z_k.$$

现按下标 j,k 相加,则有

$$\sum_{j,k}\iint\limits_{D_{jk}} f(\xi_i,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_D f(\xi_i,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=I(\xi_i)$$

及

$$\sum_{i,j,k} m_{ijk}\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k\leqslant\sum_i I(\xi_i)\Delta x_i\leqslant\sum_{i,j,k} M_{ijk}\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k. \tag{2}$$

上述不等式两边是分割 T 的下和与上和.由于 $f(x,y,z)$在 V 上可积,当 $\|T\|\to 0$ 时,下和与上和具有相同的极限,所以由(2)式得 $I(x)$在$[a,b]$上可

积,且

$$\int_a^b I(x)\mathrm{d}x = \iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \qquad \square$$

由§2知道,(1)式右端中的二重积分 $\iint_D f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 可化为累次积分来计算,于是我们就能把(1)式左边的三重积分化为三次积分来计算.如化为先对 z,然后对 y,最后对 x 来求积分,则为

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d \mathrm{d}y\int_e^h f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

有时为了计算上的方便,也可采用其他的计算顺序.

为了讨论一般区域上的三重积分的计算,先研究一类简单区域上的积分.设积分区域 V 由集合

$$V = \{(x,y,z) \mid z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y), y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), a \leqslant x \leqslant b\}$$

所确定(图21-30),这里 V 在 xy 平面上的投影区域

$$D = \{(x,y) \mid y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), a \leqslant x \leqslant b\}$$

是一个 x 型区域,它对于平行于 z 轴且通过 D 内点的直线与 V 的边界至多交于两点.

现设 $f(x,y,z)$ 在 V 上连续,$z_1(x,y)$,$z_2(x,y)$ 在 D 上连续,$y_1(x)$,$y_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则有

$$\begin{aligned}\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \\ &= \int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z. \qquad (3)\end{aligned}$$

同样地,当把区域 V 投影到 zx 平面或 yz 平面上时,也可写出相应的累次积分公式.

对于一般区域上的三重积分,常可把它分解成有限个简单区域上的积分和来计算.

例1 计算 $\iiint_V \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2}$,其中 V 为由平面 $x=1$,$x=2$,$z=0$,$y=x$ 与 $z=y$ 所围的区域(图21-31).

解 V 在 xy 平面上的投影区域

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant x, 1 \leqslant x \leqslant 2\}$$

是 x 型区域,这里 $z_1(x,y)=0$,$z_2(x,y)=y$.所以由公式(3),有

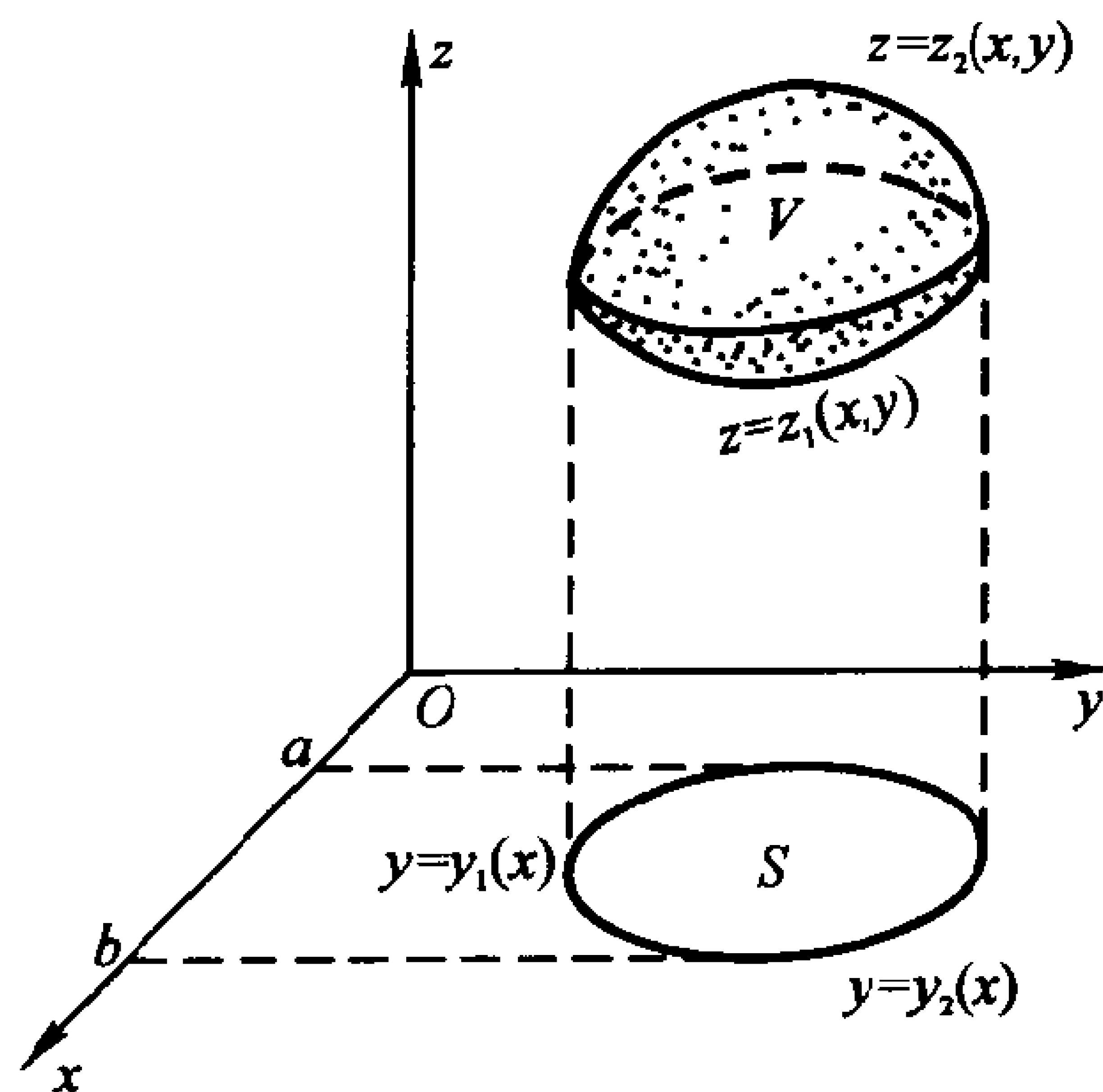


图 21－30

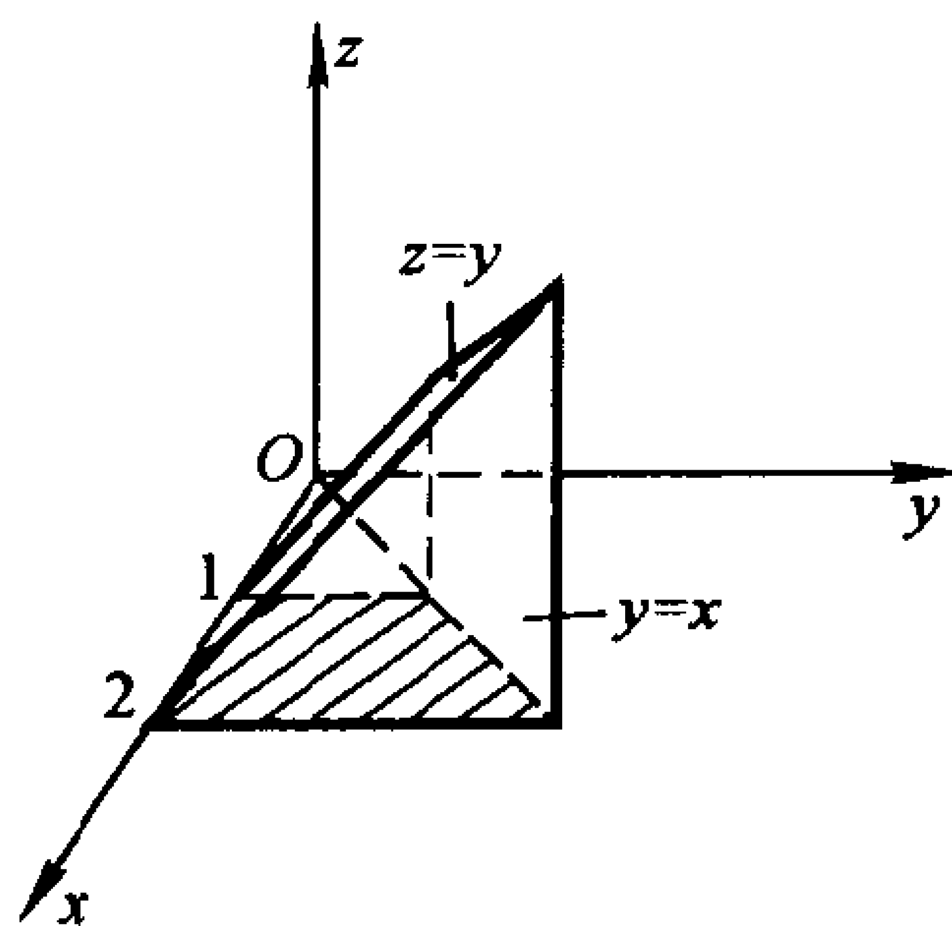


图 21－31

$$\iiint_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2} = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \int_0^y \frac{\mathrm{d}z}{x^2+y^2} = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^x \frac{y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big|_0^x \mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{2}\ln 2\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2.$$

□

例 2 求

$$I = \iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V 是椭球体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1.$$

解 由于

$$I = \iiint_V \frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint_V \frac{y^2}{b^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint_V \frac{z^2}{c^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中

$$\iiint_V \frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-a}^{a} \frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}x \iint_{R_x} \mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

这里 R_x 表示椭圆面：

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1-\frac{x^2}{a^2}$$

或

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} \leqslant 1.$$

它的面积为

$$\pi\left[b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]\left[c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

于是

$$\iiint\limits_V \frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-a}^{a}\frac{\pi bc}{a^2}x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{15}\pi abc.$$

同理可得

$$\iiint\limits_V \frac{y^2}{b^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc,$$

$$\iiint\limits_V \frac{z^2}{c^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc.$$

所以

$$I=3\left(\frac{4}{15}\pi abc\right)=\frac{4}{5}\pi abc.$$ □

三　三重积分换元法

和二重积分一样,某些类型的三重积分作适当的变量变换后能使计算方便.

设变换 $T:x=x(u,v,w),y=y(u,v,w),z=z(u,v,w)$,把 uvw 空间中的区域 V' 一对一地映成 xyz 空间中的区域 V,并设函数 $x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)$ 及它们的一阶偏导数在 V' 内连续且函数行列式

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0,(u,v,w)\in V'.$$

于是与二重积分换元法一样,可以证明(用本章 §9 中证明二重积分类似的方法)成立下面的三重积分换元公式:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,\tag{4}$$

其中 $f(x,y,z)$ 为 V 上可积.

下面介绍几个常用的变换公式:

1. **柱面坐标变换**

$$T:\begin{cases} x = r\cos\theta, & 0 \leqslant r < +\infty, \\ y = r\sin\theta, & 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \\ z = z, & -\infty < z < +\infty. \end{cases}$$

由于变换 T 的函数行列式

$$J(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

按(4)式,三重积分的柱面坐标换元公式为

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z, \tag{5}$$

这里 V'为 V 在柱面坐标变换下的原象.

与极坐标变换一样,柱面坐标变换并非是一对一的,并且当 $r=0$ 时,$J(u,v,w)=0$,但我们仍可证明(5)式成立.

在柱面坐标系中,用 $r=$常数,$\theta=$常数,$z=$常数的平面分割 V'时,变换后在 xyz 直角坐标系中,$r=$常数是以 z 轴为中心轴的圆柱面,$\theta=$常数是过 z 轴的半平面,$z=$常数是垂直于 z 轴的平面(图 21－32).

用柱面坐标计算三重积分,通常是找出 V 在 xy 平面上的投影区域 D,即当

$$V = \{(x,y,z) \mid z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y), (x,y) \in D\}$$

时,

$$\iiint\limits_V f(x,y,z) = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z,$$

其中二重积分部分应用极坐标计算.

例 3 计算

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V 是由曲面 $2(x^2+y^2)=z$ 与 $z=4$ 为界面的区域(图 21－33).

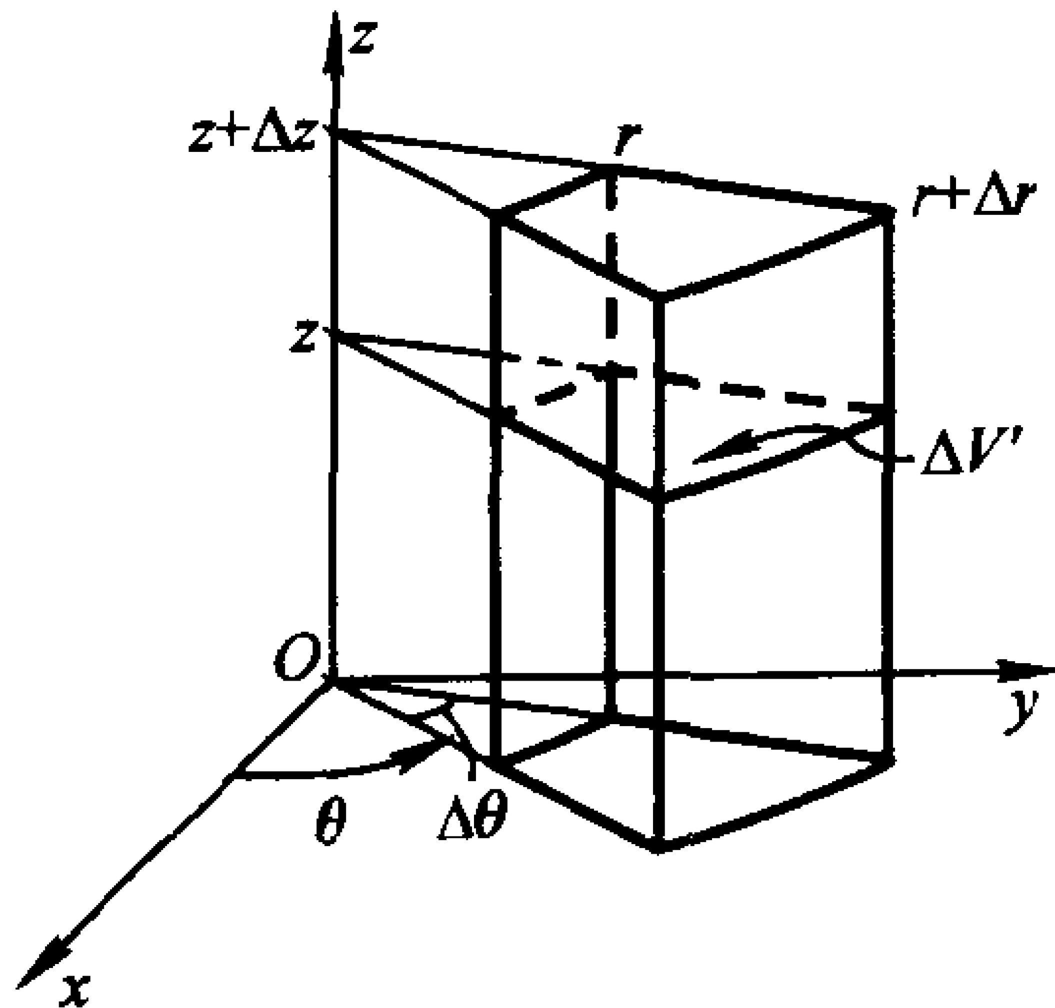


图 21－32

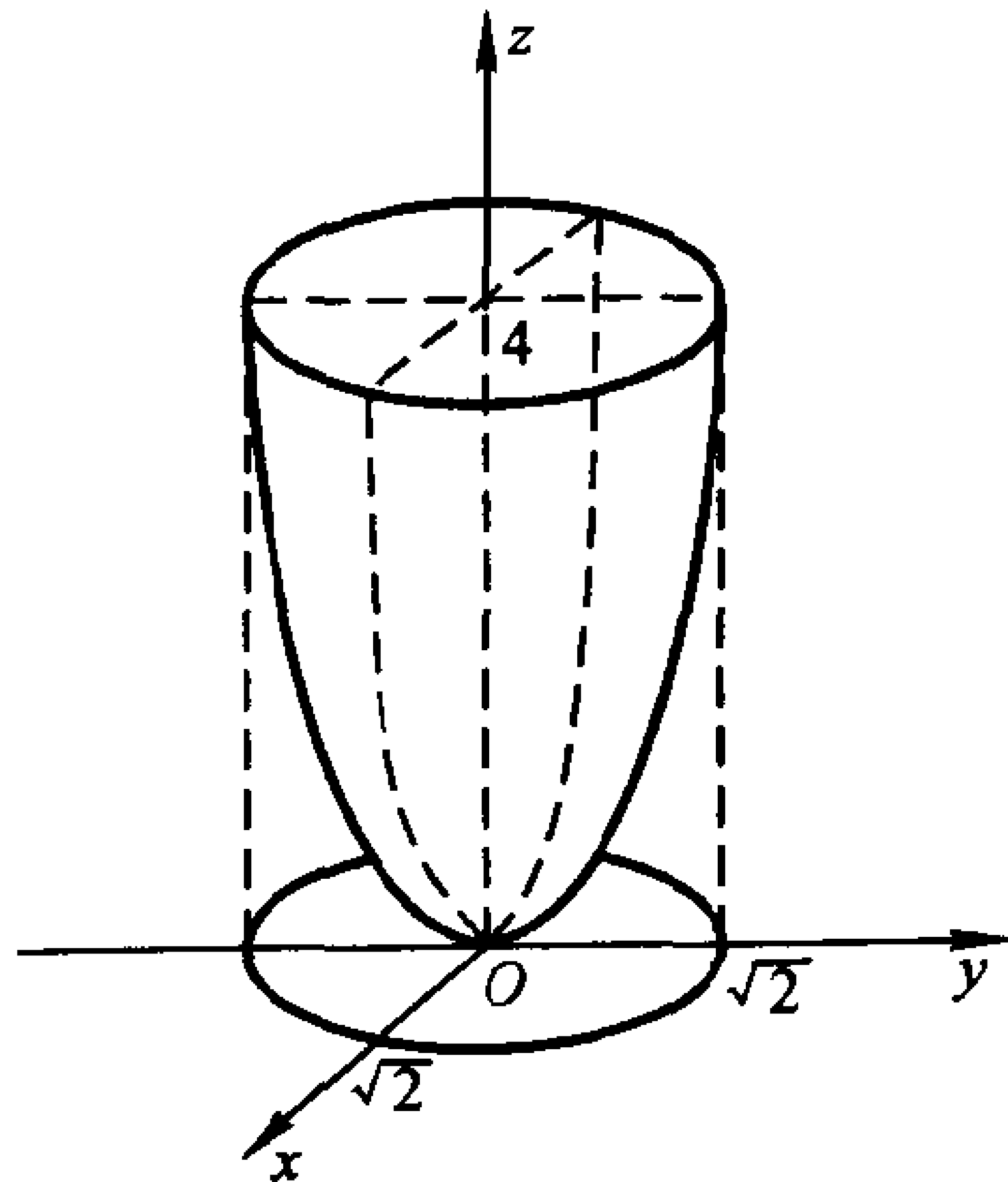


图 21－33

解 V 在 xy 平面上的投影区域 D 为 $x^2+y^2\leqslant 2$. 按柱坐标变换,区域 V' 可表为

$$V'=\{(r,\theta,z)\mid 2r^2\leqslant z\leqslant 4, 0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}.$$

所以由公式(5),有

$$\iiint_V(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{V'}r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_{2r^2}^4 r^3\mathrm{d}z=\frac{8\pi}{3}.$$ □

2. 球坐标变换

$$T:\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta, & 0\leqslant r<+\infty,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta, & 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\\ z=r\cos\varphi, & 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

由于

$$J(r,\varphi,\theta)=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\end{vmatrix}$$

$$=r^2\sin\varphi,$$

当 φ 在 $[0,\pi]$ 上取值时, $\sin\varphi\geqslant 0$, 所以在球坐标变换下,按公式(4),三重积分的球坐标换元公式为

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_{V'}f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta, \tag{6}$$

这里 V 为 V' 在球坐标变换 T 下的原象.

类似地,球坐标变换并不是一对一的,并且当 $r=0$ 或 $\varphi=0$ 或 π 时, $J(r,\varphi,\theta)=0$. 但我们仍然可以证明(6)式成立.

在球坐标系中,用 $r=$ 常数, $\varphi=$ 常数, $\theta=$ 常数的平面分割 V' 时,变换后在 xyz 直角坐标系中, $r=$ 常数是以原点为心的球面, $\varphi=$ 常数是以原点为顶点, z 轴为中心轴的圆锥面, $\theta=$ 常数是过 z 轴的半平面(图 21-34).

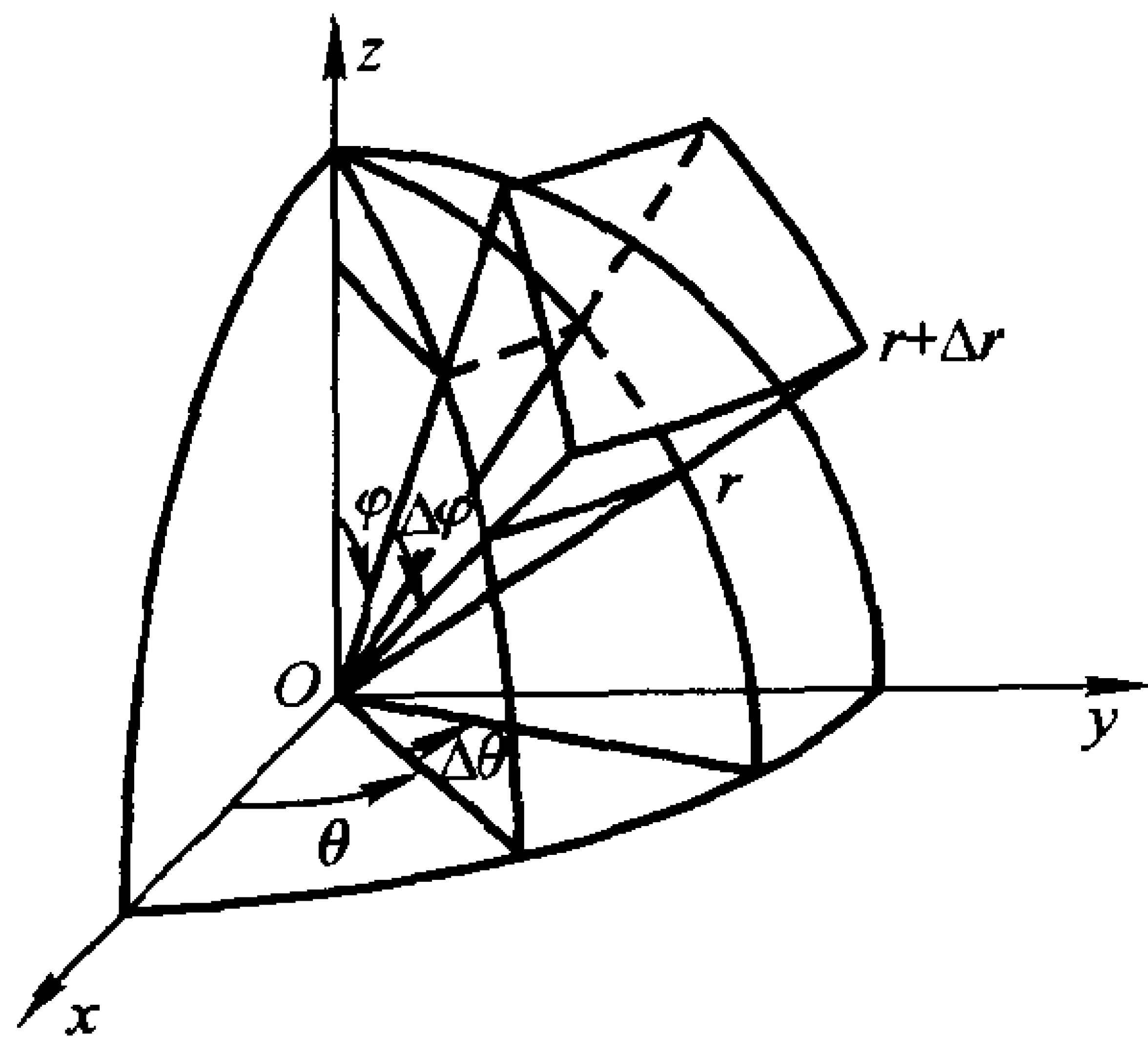


图 21-34

在球坐标系下,当区域 V' 为集合

$$V'=\{(r,\varphi,\theta)\mid r_1(\varphi,\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\varphi,\theta),$$

$$\varphi_1(\theta)\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2(\theta),\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2\}$$

时,(6)式可化为累次积分

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\mathrm{d}\varphi\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r. \tag{7}$$

例 4 求由圆锥体 $z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}\cot\beta$ 和球体 $x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2$ 所确定的立体体积(图 21-35),其中 $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $a(>0)$为常数.

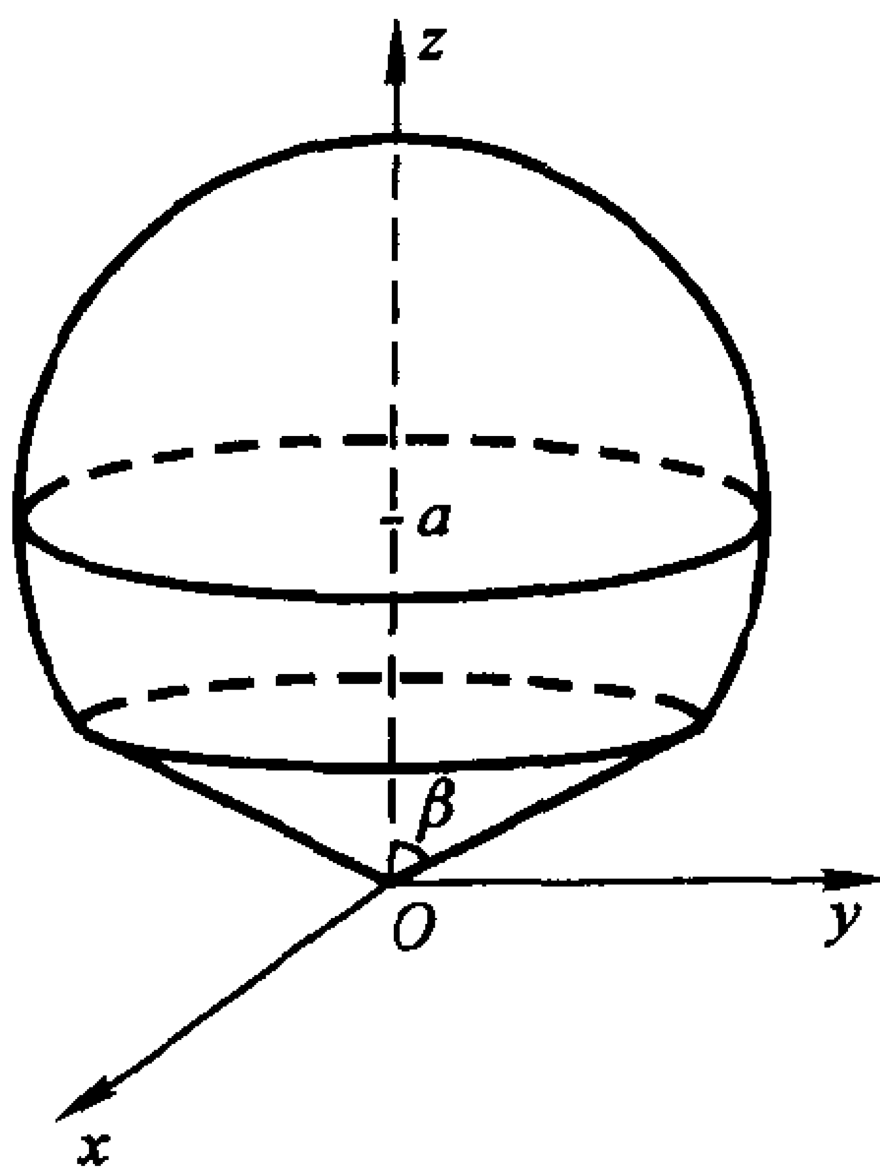


图 21-35

解 在球坐标变换下,球面方程 $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ 可表示成 $r=2a\cos\varphi$,锥面方程 $z=\sqrt{x^2+y^2}\cot\beta$ 可表示成 $\varphi=\beta$. 因此

$$V'=\{(r,\varphi,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant 2a\cos\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\beta,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}.$$

由公式(7)求得 V 的体积为

$$\iiint_V \mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\beta}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\sin\varphi\ \mathrm{d}r$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^3(1-\cos^4\beta).$$

□

除上述介绍的两种变换外,下面我们再举一个例子,进一步说明如何根据被积函数或积分区域的特点来选择其他不同的变换.

例 5 求 $I=\iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 V 为由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ 与 $z\geqslant 0$ 所围区域.

解 作广义球坐标变换

$$T:\begin{cases}x=ar\sin\varphi\cos\theta,\\ y=br\sin\varphi\sin\theta,\\ z=cr\cos\varphi,\end{cases}$$

于是 $J=abcr^2\sin\varphi$. 在上述广义球坐标变换下,V 的原象为

$$V'=\{(r,\varphi,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}.$$

由公式(7),有

$$\iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{V'}abc^2r^3\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 abc^2r^3\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi abc^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi abc^2}{4}.$$ □

习 题

1. 计算下列积分：

(1) $\iiint\limits_V(xy+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $V=[-2,5]\times[-3,3]\times[0,1]$；

(2) $\iiint\limits_V x\cos y\cos z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $V=[0,1]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$；

(3) $\iiint\limits_V\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$，其中 V 是由 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围成的区域；

(4) $\iiint\limits_V y\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 V 是由 $y=\sqrt{x}$，$y=0$，$z=0$ 及 $x+y=\frac{\pi}{2}$ 所围成的区域.

2. 试改变下列累次积分的顺序：

(1) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{x+y}f(x,y,z)\mathrm{d}z$；

(2) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z$.

3. 计算下列三重积分与累次积分：

(1) $\iiint\limits_V z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 V 由 $x^2+y^2+z^2\leqslant r^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2rz$ 所确定；

(2) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^2\mathrm{d}z$.

4. 利用适当的坐标变换，计算下列各曲面所围成的体积：

(1) $z=x^2+y^2$，$z=2(x^2+y^2)$，$y=x$，$y=x^2$；

(2) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1\quad(x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0,a>0,b>0,c>0)$.

5. 设球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2x$ 上各点的密度等于该点到坐标原点的距离，求这球体的质量.

---

6. 设 $f(x,y,z)$ 在长方体 $V=[a,b]\times[c,d]\times[e,h]$ 上可积. 若对任何 $(y,z)\in D=[c,d]\times[e,h]$，定积分

$$F(y,z)=\int_a^b f(x,y,z)\mathrm{d}x$$

存在，证明 $F(y,z)$ 在 D 上可积，且

$$\iint_D F(y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

7. 设 $V=\left\{(x,y,z)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\right\}$,计算下列积分:

(1) $\iiint_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;

(2) $\iiint_V e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

§6 重积分的应用

重积分的应用除前面提到的可用以求空间立体的体积及空间物体的质量外,这里再举几个它在几何与力学方面的应用.

一 曲面的面积

设 D 为可求面积的平面有界区域,函数 $f(x,y)$ 在 D 上具有连续的一阶偏导数,讨论由方程

$$z = f(x,y),(x,y)\in D$$

所确定的曲面 S 的面积.

为了定义曲面 S 的面积,对区域 D 作分割 T,它把 D 分成 n 个小区域 $\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$.根据这个分割相应地将曲面 S 也分成 n 个小曲面片 $S_i(i=1,2,\cdots,n)$.在每个 S_i 上任取一点 M_i,作曲面在这一点的切平面 π_i,并在 π_i 上取出一小块 A_i,使得 A_i 与 S_i 在 xy 平面上的投影都是 σ_i,如图 21-36 所示.现在点 M_i 附近,用切平面 A_i 代替小曲面片 S_i,从而当 $\|T\|$ 充分小时,有

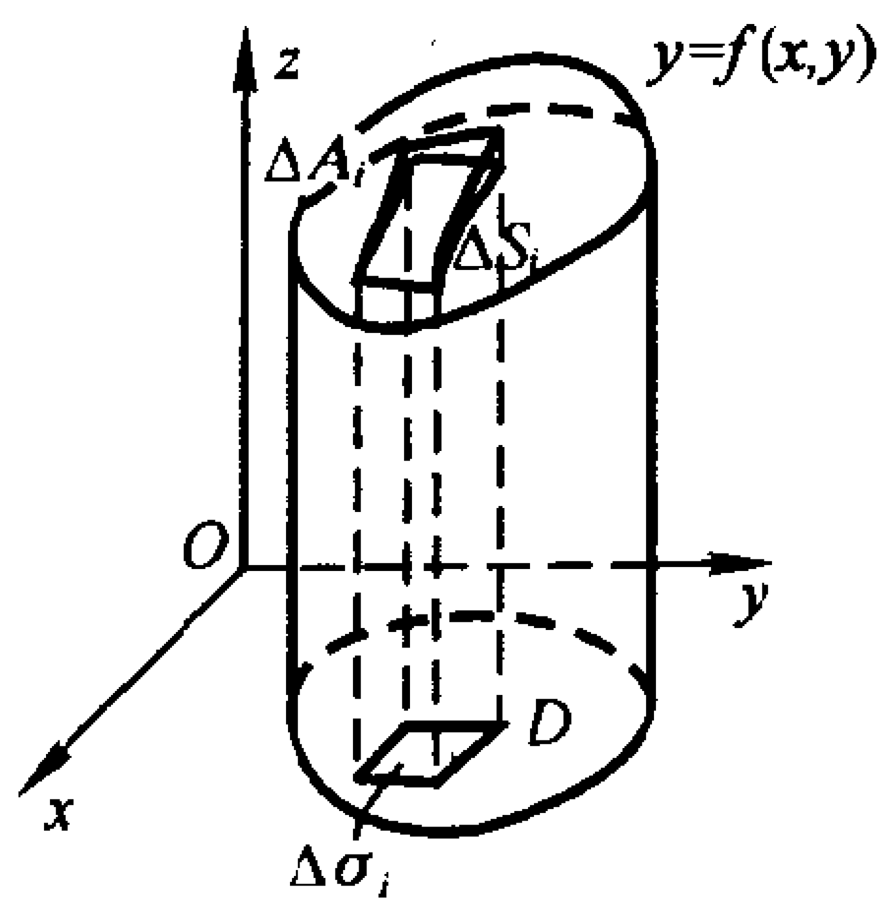


图 21-36

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{n}\Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n}\Delta A_i,$$

这里 $\Delta S,\Delta S_i,\Delta A_i$ 分别表示曲面 S,小曲面片 S_i,小切平面块 A_i 的面积.所以当 $\|T\|\to 0$ 时,可用和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta A_i$ 的极限作为 S 的面积.

现在按照上述给出的曲面面积的概念,来建立曲面面积的计算公式.

首先计算 A_i 的面积.由于切平面 π_i 的法向量就是曲面 S 在点 $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 处的法向量,记它与 z 轴的夹角为 γ_i,则

$$|\cos\gamma_i| = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(\xi_i,\eta_i)+f_y^2(\xi_i,\eta_i)}}.$$

因为 A_i 在 xy 平面上的投影为 σ_i，所以

$$\Delta A_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\cos\gamma_i} = \sqrt{1+f_x^2(\xi_i,\eta_i)+f_y^2(\xi_i,\eta_i)}\Delta\sigma_i.$$

其次，由于和数

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f_x^2(\xi_i,\eta_i)+f_y^2(\xi_i,\eta_i)}\Delta\sigma_i$$

是连续函数 $\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}$ 在有界闭区域 D 上的积分和. 于是当 $\|T\|\to 0$ 时，就得到

$$\begin{aligned}\Delta S &= \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f_x^2(\xi_i,\eta_i)+f_y^2(\xi_i,\eta_i)}\Delta\sigma_i \\ &= \iint_D \sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (1)\end{aligned}$$

或

$$\Delta S = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta\sigma_i}{|\cos\gamma_i|} = \iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|\cos(\boldsymbol{n},z)|}, \qquad (2)$$

其中 $\cos(\boldsymbol{n},z)$ 为曲面的法向量与 z 轴正向夹角的余弦.

例 1 求圆锥 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在圆柱体 $x^2+y^2\leqslant x$ 内那一部分的面积.

解 据曲面面积公式(1)，

$$\Delta S = \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 是 $x^2+y^2\leqslant x$. 所求曲面方程为

$$z = \sqrt{x^2+y^2},$$

故

$$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

因此

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2},$$

所以

$$\Delta S = \iint_D \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\Delta D = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$ □

若空间曲面 S 由参量方程

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v) \in D \tag{3}$$

确定,其中 $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$在 D 上具有连续的一阶偏导数,且

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$$

中至少有一个不等于零,则曲面 S 在点(x,y,z)的法线方向数为

$$\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right),$$

它与 z 轴的夹角的余弦的绝对值为

$$|\cos(\boldsymbol{n},z)| = \left| \frac{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) - (x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)}} \right|$$

$$= \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}, \tag{4}$$

其中

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,$$
$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$
$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

当$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ 时,对(2)作变换 $x = x(u,v), y = y(u,v)$,则有

$$\Delta S = \iint\limits_D \frac{1}{|\cos(\boldsymbol{n},z)|} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{D'} \frac{1}{|\cos(\boldsymbol{n},z)|} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

由(4),得到由参量方程(3)所表示的曲面面积公式:

$$\Delta S = \iint\limits_{D'} \sqrt{EG - F^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{5}$$

例 2　求球面上两条纬线和两条经线之间的曲面的面积(图 21-37 中阴影部分).

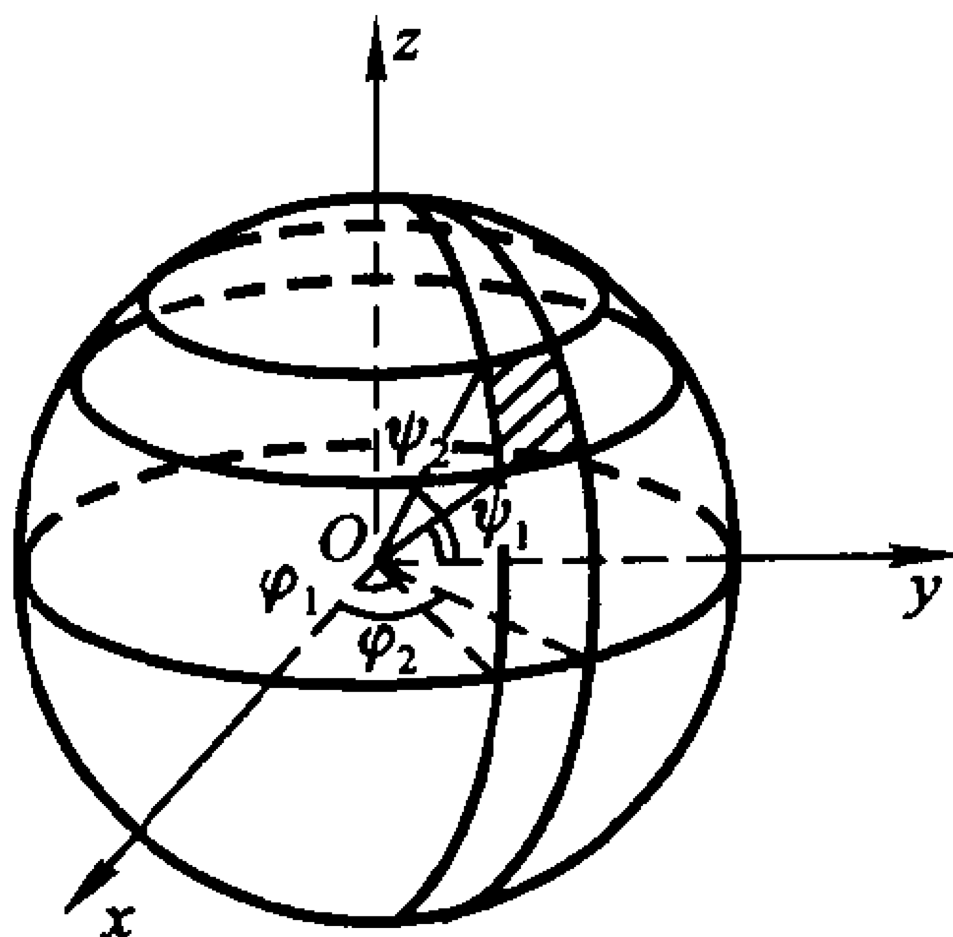


图 21-37

解　设球面方程为

$$x = R\cos\psi\cos\varphi,$$
$$y = R\cos\psi\sin\varphi,$$
$$z = R\sin\psi,$$

其中 R 为球的半径. 本例是求当 $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2, \psi_1 \leqslant \psi \leqslant \psi_2$ 时的球面部分面积. 由于

$$E = x_\psi^2 + y_\psi^2 + z_\psi^2 = R^2,$$
$$F = 0, G = R^2\cos^2\psi,$$

所以

$$\sqrt{EG-F^2}=R^2\cos\psi.$$

由公式(5)即得所求曲面的面积.

$$\Delta S=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{d}\varphi\int_{\psi_1}^{\psi_2}R^2\cos\psi\mathrm{d}\psi=R^2(\varphi_2-\varphi_1)(\sin\psi_2-\sin\psi_1).\qquad\square$$

在讨论曲线弧长时,我们曾用弧内接折线的长,在其各段的长趋于零时的极限来定义.但是能否类似地用曲面的内接多面形的面积,在其各个面积的直径趋于零时的极限来定义呢?施瓦茨(Schwarz)曾举出一个反例说明这样的定义方法是不可行的.对此读者可参见有关的数学分析教程(如菲赫金哥尔茨《微积分学教程》中译本第三卷第二分册).

二 重心

设 V 是密度函数为 $\rho(x,y,z)$ 的空间物体,$\rho(x,y,z)$ 在 V 上连续.为求得 V 的重心坐标公式,先对 V 作分割 T,在属于分割 T 的每一小块 v_i 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i),于是小块 v_i 的质量可以 $\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$ 近似代替.若把每一小块看作质量集中在 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的质点时,整个物体就可用这 n 个质点的质点系来近似代替.由于质点系的重心坐标公式为

$$\bar{x}_n=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i},\quad \bar{y}_n=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i},$$

$$\bar{z}_n=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\zeta_i\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i}.$$

当 $\|T\|\to0$ 时,我们很自然地把 $\bar{x}_n,\bar{y}_n,\bar{z}_n$ 的极限 $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ 定义为 V 的重心坐标,即

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{\iiint\limits_V\rho(x,y,z)\mathrm{d}V},\quad \bar{y}=\frac{\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{\iiint\limits_V\rho(x,y,z)\mathrm{d}V},$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{\iiint\limits_V\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}.$$

当物体 V 的密度均匀即 ρ 为常数时,则有

$$\bar{x}=\frac{1}{\Delta V}\iiint\limits_V x\mathrm{d}V,\quad \bar{y}=\frac{1}{\Delta V}\iiint\limits_V y\mathrm{d}V,\quad \bar{z}=\frac{1}{\Delta V}\iiint\limits_V z\mathrm{d}V,$$

这里 ΔV 为 V 的体积.

读者同样可以得到,密度分布为 $\rho(x,y)$的平面薄板 D 的重心坐标是

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma},\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}.$$

当平面薄板 D 的密度均匀时,即 ρ 是常数时,则有

$$\bar{x}=\frac{1}{\Delta D}\iint\limits_D x\mathrm{d}\sigma,\quad \bar{y}=\frac{1}{\Delta D}\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma,$$

这里 ΔD 为平面薄板 D 的面积.

例 3 求密度均匀的上半椭球体的重心.

解 设椭球体由不等式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$$

表示. 由对称性知 $\bar{x}=0,\bar{y}=0$. 又由 ρ 为常数,所以

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_V \rho z\mathrm{d}V}{\iiint\limits_V \rho\mathrm{d}V}=\frac{\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\frac{2}{3}\pi abc}.$$

由 §5 例 5 得

$$\bar{z}=\frac{3c}{8}.$$

□

三 转动惯量

质点 A 对于轴 l 的转动惯量 J 是质点 A 的质量 m 和 A 与转动轴 l 的距离 r 的平方的乘积,即 $J=mr^2$.

现在讨论空间物体 V 的转动惯量问题. 我们仍然采用第二段中的办法,把 V 看作由 n 个质点组成的质点系,然后用取极限的方法求得 V 的转动惯量.

设 $\rho(x,y,z)$为空间物体 V 的密度分布函数,它在 V 上连续. 对 V 作分割 T,在属于 T 的每一小块 v_i 上任取一点(ξ_i,η_i,ζ_i),于是 v_i 的质量可以 $\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$ 近似替代. 当以质点系$\{(\xi_i,\eta_i,\zeta_i),i=1,2,\cdots,n\}$近似替代 V 时,质点系对于 x 轴的转动惯量则是

$$J_{x_n}=\sum_{i=1}^{n}(\eta_i^2+\zeta_i^2)\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i.$$

当 $\|T\|\to 0$ 时,上述积分和的极限就是物体 V 对于 x 轴的转动惯量

$$J_x=\iiint\limits_V (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V.$$

类似可得物体 V 对于 y 轴与 z 轴的转动惯量分别为

$$J_y = \iiint\limits_V (z^2 + x^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,$$

$$J_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V.$$

同理,物体 V 对于坐标平面的转动惯量分别为

$$J_{xy} = \iiint\limits_V z^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,$$

$$J_{yz} = \iiint\limits_V x^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,$$

$$J_{zx} = \iiint\limits_V y^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}V.$$

据此,读者也容易建立平面薄板对于坐标轴的转动惯量:

$$J_x = \iint\limits_D y^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma,\quad J_y = \iint\limits_D x^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

以及

$$J_l = \iint\limits_D r^2(x,y)\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

这里 l 为转动轴,$r(x,y)$为 D 中点(x,y)到 l 的距离函数.

例 4 求密度均匀的圆环 D 对于垂直于圆环面中心轴的转动惯量(图 21-38).

解 设圆环 D 为

$$R_1^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R_2^2,$$

密度为 ρ,则 D 中任一点(x,y)与转轴的距离平方为 x^2+y^2. 于是转动惯量

$$J = \iint\limits_D \rho\cdot(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma = \rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2} r^3\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi\rho}{2}(R_2^4 - R_1^4) = \frac{m}{2}(R_2^2 + R_1^2),$$

其中 m 为圆环的质量. □

例 5 求均匀圆盘 D 对于其直径的转动惯量(图 21-39).

解 设圆盘 D 为 $x^2+y^2\leqslant R^2$,密度为 ρ,求对于 y 轴的转动惯量. 由于 D 内任一点(x,y)与 y 轴的距离为$|x|$,故

$$J = \iint\limits_D \rho x^2\mathrm{d}\sigma = \rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R (r\cos\theta)^2\cdot r\mathrm{d}r$$

$$= \rho\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^R r^3\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\rho \pi R^4}{4} = \frac{1}{4} m R^2,$$

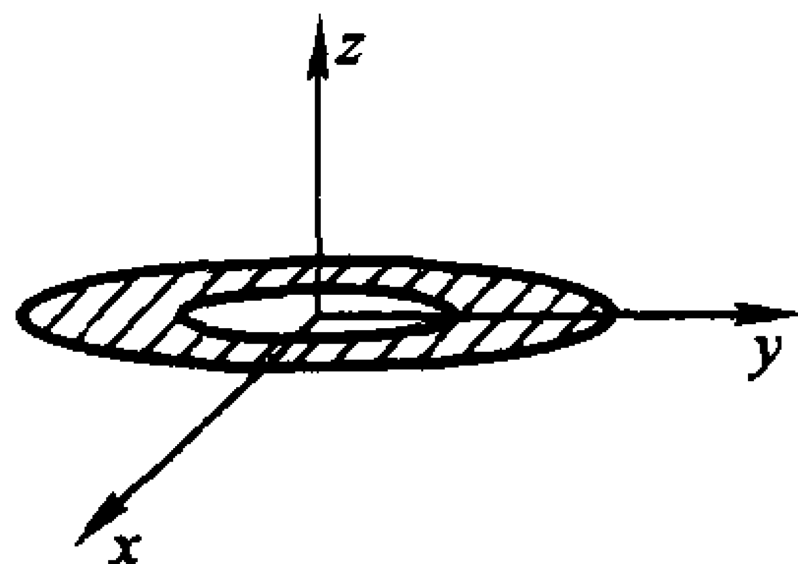


图 21 - 38

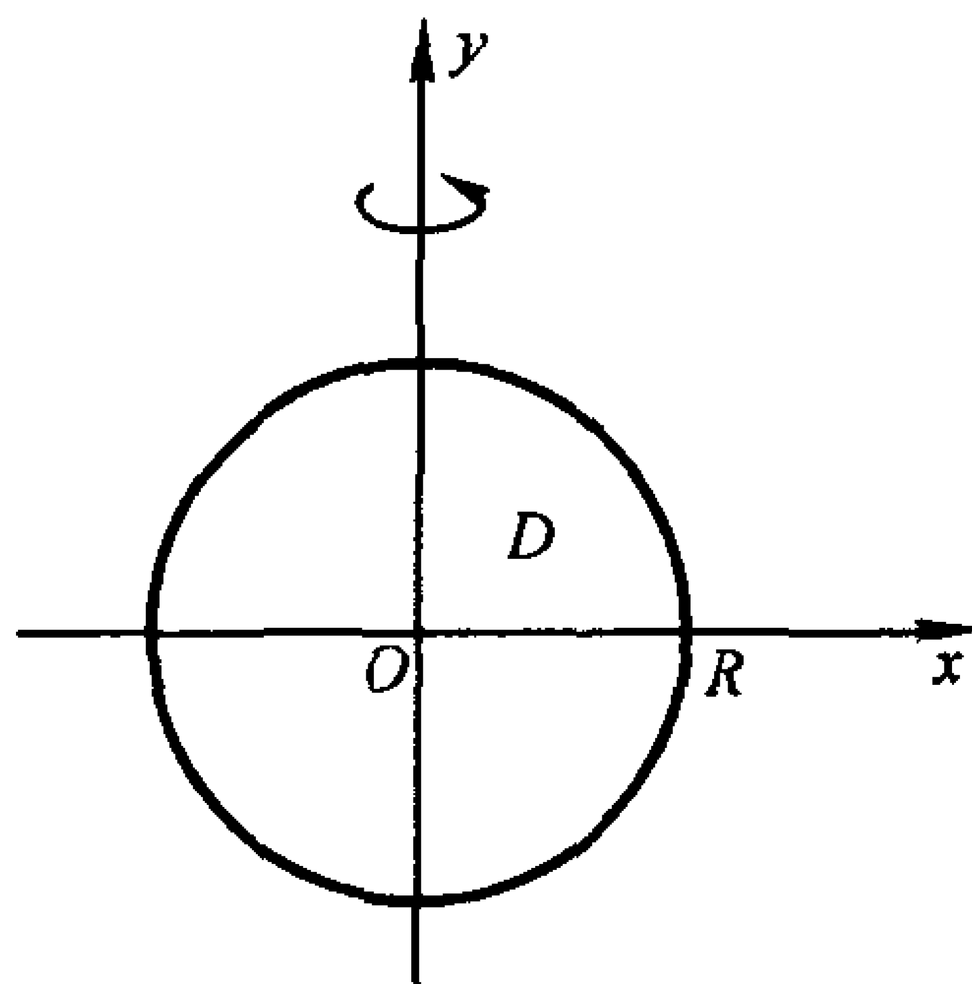


图 21 - 39

其中 m 为圆盘的质量. □

例 6 设某球体的密度与球心的距离成正比,求它对于切平面的转动惯量.

解 设球体由不等式 $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ 表示,密度函数为 $k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,这里 k 为比例常数.切平面方程为 $x=R$,则球体对于平面 $x=R$ 的转动惯量为

$$J = k \iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}(R-x)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= k\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R (R - r\sin\varphi\cos\theta)^2 r^3 \sin\varphi \mathrm{d}r$$

$$= kR^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R r^3 \mathrm{d}r \int_0^{\pi} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi - 2kR\int_0^{2\pi} \cos\theta \mathrm{d}\theta \cdot$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2\varphi \mathrm{d}\varphi + k\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \mathrm{d}\theta \int_0^R r^5 \mathrm{d}r \int_0^{\pi} \sin^3\varphi \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{11}{9} k\pi R^6.$$

□

四 引力

求密度为 $\rho(x,y,z)$ 的立体对立体外质量为 1 的质点 A 的引力.

设 A 的坐标为 (ξ,η,ζ),V 中点的坐标用 (x,y,z) 表示.我们使用微元法来求 V 对 A 的引力.V 中质量微元 $\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}V$ 对 A 的引力在坐标轴上的投影为

$$\mathrm{d}F_x = k\frac{x-\xi}{r^3}\rho\mathrm{d}V, \mathrm{d}F_y = k\frac{y-\eta}{r^3}\rho\mathrm{d}V, \mathrm{d}F_z = k\frac{z-\zeta}{r^3}\rho\mathrm{d}V,$$

其中 k 为引力系数,

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

是 A 到 $\mathrm{d}V$ 的距离.于是力 $\boldsymbol{F}$ 在三个坐标轴上的投影分别为

$$F_x = k\iiint\limits_V \frac{x-\xi}{r^3}\rho \mathrm{d}V, \quad F_y = k\iiint\limits_V \frac{y-\eta}{r^3}\rho \mathrm{d}V,$$

$$F_z = k\iiint\limits_V \frac{z-\zeta}{r^3}\rho \mathrm{d}V,$$

所以

$$\boldsymbol{F} = F_x \boldsymbol{i} + F_y \boldsymbol{j} + F_z \boldsymbol{k}.$$

例7 设球体 V 具有均匀的密度 ρ，求 V 对球外一点 A(质量为 1)的引力(引力系数为 k).

解 设球体为 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，球外一点 A 的坐标为 $(0,0,a)(R<a)$. 显然有 $F_x=F_y=0$，现在计算 F_z. 由上述公式，

$$\begin{aligned}F_z &= k\iiint\limits_V \frac{(z-a)}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}\rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= k\rho\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}z\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}},\end{aligned}$$

其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2-z^2\}$. 用柱坐标计算：

$$\begin{aligned}F_z &= k\rho\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{r}{[r^2+(z-a)^2]^{3/2}}\mathrm{d}r \\ &= 2\pi k\rho\int_{-R}^{R}\left(-1-\frac{z-a}{\sqrt{R^2-2az+a^2}}\right)\mathrm{d}z \\ &= -\frac{4}{3a^2}\pi R^3\rho k.\end{aligned}$$

□

上面我们只讨论了重积分在力学中的应用. 实际上，也可用第一型曲线积分(包括在下一章中将要讨论的第一型曲面积分)来计算空间曲线(曲面)的重心，关于转动轴或坐标平面的转动惯量以及曲线(曲面)对其外一质点的引力. 这里就不再一一细述了，读者可仿照上面的方法建立相应的计算公式.

习 题

1. 求曲面 $az=xy$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=a^2$ 内那部分的面积.

2. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所截部分的曲面面积.

3. 求下列均匀密度的平面薄板重心：

(1) 半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1, y\geqslant 0$;

(2) 高为 h，底分别为 a 和 b 的等腰梯形.

4. 求下列均匀密度物体的重心：

(1) $z\leqslant 1-x^2-y^2, z\geqslant 0$;

(2) 由坐标面及平面 $x+2y-z=1$ 所围的四面体.

5. 求下列均匀密度的平面薄板的转动惯量:

(1) 半径为 R 的圆关于其切线的转动惯量;

(2) 边长为 a 和 b,且夹角为 φ 的平行四边形,关于底边 b 的转动惯量.

6. 计算下列引力:

(1) 均匀薄片 $x^2+y^2\leqslant R^2, z=0$ 对于轴上一点 $(0,0,c)(c>0)$ 处的单位质量的引力;

(2) 均匀柱体 $x^2+y^2\leqslant a^2, 0\leqslant z\leqslant h$ 对于点 $P(0,0,c)(c>h)$ 处的单位质量的引力;

(3) 均匀密度的正圆锥体(高 h,底半径 R)对于在它的顶点处质量为 m 的质点的引力.

---

7. 求曲面

$$\begin{cases} x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi, \\ y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi, \\ z=a\sin\psi, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, \\ 0\leqslant\psi\leqslant 2\pi \end{array}$$

的面积,其中常数 a,b 满足 $0\leqslant a\leqslant b$.

8. 求螺旋面

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi, \\ z=b\varphi, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0\leqslant r\leqslant a, \\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi \end{array}$$

的面积.

9. 求边长为 a 密度均匀的立方体关于其任一棱边的转动惯量.

* §7 n 重积分

对于 n 重积分,我们先介绍一个物理模型,即两个物体 V_1 与 V_2 之间的引力问题.

设物体 V_1 中点的坐标为 (x_1,y_1,z_1), V_2 中点的坐标为 (x_2,y_2,z_2),它们的密度函数分别为连续函数 $\rho_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $\rho_2(x_2,y_2,z_2)$,且设它们之间的引力系数为 1. 我们用微元法求它们之间的引力. 为此,在 V_1 中取质量微元 $\rho_1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\mathrm{d}z_1$,在 V_2 中取质量微元 $\rho_2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}y_2\mathrm{d}z_2$. 由万有引力定律知道, V_1 的微元对 V_2 的微元的吸引力在 x 轴上的投影为

$$\frac{\rho_1\rho_2(x_1-x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\mathrm{d}z_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}y_2\mathrm{d}z_2}{r^3},$$

其中 $r=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$. 把两个物体的所有微元间的吸引力在 x 轴上投影的量相加,就得到物体 V_1 与 V_2 间的引力在 x 轴上投影的值. 它是一个六重积分,即

$$F_x = \iiiint\!\!\iint_V \frac{\rho_1(x_1,y_1,z_1)\rho_2(x_2,y_2,z_2)(x_1-x_2)}{r^3}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\mathrm{d}z_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}y_2\mathrm{d}z_2.$$

这个积分是在由六维数组$(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2)$构成的六维空间中的六维区域$V=V_1\times V_2$上的积分.吸引力在$y$和$z$轴上的投影也同样可由六个自变量的积分形式来表示,这就是n重积分$(n=6)$的一个例子.

建立n重积分概念,首先必须像定义平面图形面积一样定义n维空间区域的体积问题.最简单的n维区域——n维长方体

$$V=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$$

的体积规定为$(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n)$.在仿照可求面积概念那样建立$n$维区域的可求体积概念之后,可以证明$n$维单纯形

$$x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0,x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant h$$

和n维球体

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant R^2$$

的体积是存在的.

设n元函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$定义在n维可求体积的区域V上.像二重积分概念那样,通过对V的分割、近似求和、取极限的过程,便得到n重积分的概念:

$$I=\overbrace{\int\cdots\int_V}^{n} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n. \qquad (1)$$

与二重积分相仿,n重积分也有如下一些结论:

若$f(x_1,\cdots,x_n)$在n维有界闭区域V上连续,则n重积分(1)必存在.

计算n重积分的办法是把它化为重数较低的积分来计算.如当积分区域是长方体$[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$时,则有

$$I=\int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x_1\int_{a_2}^{b_2}\mathrm{d}x_2\cdots\int_{a_n}^{b_n}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_n.$$

当V由不等式组$a_1\leqslant x_1\leqslant b_1,a_2(x_1)\leqslant x_2\leqslant b_2(x_1),\cdots,a_n(x_1,\cdots,x_{n-1})\leqslant x_n\leqslant b_n(x_1,\cdots,x_{n-1})$表示时,则有

$$I=\int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x_1\int_{a_1(x_1)}^{b_2(x_1)}\mathrm{d}x_2\cdots\int_{a_n(x_1,\cdots,x_{n-1})}^{b_n(x_1,\cdots,x_{n-1})}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_n.$$

设变换

$$T:\begin{cases}x_1=x_1(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\\ x_2=x_2(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n=x_n(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\end{cases}$$

把 n 维 $\xi_1\xi_2\cdots\xi_n$ 空间区域 V' 一对一地映射成 n 维 $x_1x_2\cdots x_n$ 空间中的区域 V，且在 V' 上函数行列式

$$J=\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial\xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial\xi_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial\xi_n}\\ \frac{\partial x_2}{\partial\xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial\xi_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial\xi_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial x_n}{\partial\xi_1} & \frac{\partial x_n}{\partial\xi_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial\xi_n}\end{vmatrix}$$

恒不为零，则成立下列 n 重积分的换元公式：

$$I=\overbrace{\int\cdots\int_V}^{n}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\overbrace{\int\cdots\int_{V'}}^{n}f(x_1(\xi_1,\cdots,\xi_n),x_2(\xi_1,\cdots,\xi_n),\cdots,x_n(\xi_1,\cdots,\xi_n))\mid J\mid\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n.$$

例 1 求 n 维单纯形 $T_n:x_1\geqslant0,x_2\geqslant0,\cdots,x_n\geqslant0,x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant h$ 的体积 ΔT_n.

解 $\Delta T_n=\overbrace{\int\cdots\int_{T_n}}^{n}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$. 作变换

$$x_1=h\xi_1,x_2=h\xi_2,\cdots,x_n=h\xi_n.$$

这时 $J=h^n$，因此有

$$\Delta T_n=h^n\overbrace{\int\cdots\int_{D_1}}^{n}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n=h^n\alpha_n,$$

其中

$$D_1=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\mid\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n\leqslant1,\xi_1\geqslant0,\xi_2\geqslant0,\cdots,\xi_n\geqslant0\},$$

$$\alpha_n=\int_0^1\mathrm{d}\xi_n\overbrace{\int\cdots\int_{T_{n-1}}}^{n-1}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_{n-1},\tag{2}$$

这里

$$T_{n-1}=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1})\mid\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{n-1}\leqslant1-\xi_n,\xi_1\geqslant0,\xi_2\geqslant0,\cdots,\xi_{n-1}\geqslant0\}.$$

对积分(2)作变换

$$\xi_1=(1-\xi_n)\zeta_1,\cdots,\xi_{n-1}=(1-\xi_n)\zeta_{n-1}.$$

这时 $J=(1-\xi_n)^{n-1}$，因此有

$$\alpha_n = \int_0^1 (1-\xi_n)^{n-1} d\xi_n \overbrace{\int \cdots \int_{D_2}}^{n-1} d\zeta_1 d\zeta_2 \cdots d\zeta_{n-1}$$

$$= \alpha_{n-1} \int_0^1 (1-\xi_n)^{n-1} d\xi_n = \frac{\alpha_{n-1}}{n},$$

其中 $D_2 = \{(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{n-1}) \mid \zeta_1 + \cdots + \zeta_{n-1} \leqslant 1, \zeta_1 \geqslant 0, \cdots, \zeta_{n-1} \geqslant 0\}$. 这是一个递推公式. 由于当 $n=1$ 时, $\alpha_1 = 1$, 因此

$$\alpha_n = \frac{1}{n!}.$$

于是 $\Delta T_n = \dfrac{h^n}{n!}$. □

例 2 求 n 维球体 $V_n: x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant R^2$ 的体积 ΔV_n.

解 $\Delta V_n = \overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant R^2} dx_1 \cdots dx_n$.

作变换 $x_1 = R\xi_1, \cdots, x_n = R\xi_n$.

这时 $J = R^n$, 因此有

$$\Delta V_n = R^n \overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 \leqslant 1} d\xi_1 \cdots d\xi_n = R^n \beta_n,$$

其中

$$\beta_n = \int_{-1}^1 d\xi_n \overbrace{\int \cdots \int}^{n-1}_{\xi_1^2 + \cdots + \xi_{n-1}^2 \leqslant 1 - \xi_n^2} d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1}.$$

它是 n 维单位球体的体积. 注意 β_n 中右端的 $n-1$ 重积分表示以 $\sqrt{1-\xi_n^2}$ 为半径的 $n-1$ 维球体的体积. 因而它应等于 $\beta_{n-1}(1-\xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}}$, 其中 β_{n-1} 为 $n-1$ 维单位球体的体积. 于是有

$$\beta_n = \int_{-1}^1 (1-\xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}} d\xi_n \cdot \beta_{n-1}.$$

令 $\xi_n = \cos\theta$, 又得一递推公式

$$\beta_n = 2\beta_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta.$$

由于

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta d\theta = \begin{cases} \dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n = 2m, \\ \dfrac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n = 2m+1 \end{cases}$$

和 $\beta_1 = 2$,所以

$$\Delta V_n = R^n \beta_n = \begin{cases} \dfrac{R^{2m}}{m!}\pi^m, & n = 2m, \\ \dfrac{2R^{2m+1}(2\pi)^m}{(2m+1)!!}, & n = 2m+1. \end{cases}$$

特别当 $n = 1,2,3$ 时,有

$$\Delta V_1 = 2R, \Delta V_2 = \pi R^2, \Delta V_3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

本题也可用 n 维球坐标变换求得. n 维球坐标变换为

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi_1, \\ x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ x_3 &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, \\ x_n &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}. \end{aligned}$$

因此有

$$J = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin^2\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2}.$$

因为积分区域为

$$0 \leqslant r \leqslant R, 0 \leqslant \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-2} \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi_{n-1} \leqslant 2\pi,$$

所以

$$\begin{aligned} \Delta V_n &= \int_0^R dr\int_0^\pi d\varphi_1\cdots\int_0^\pi d\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi} r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-2}d\varphi_{n-1} \\ &= \frac{1}{n}R^n\left(\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1 d\varphi_1\right)\left(\int_0^\pi \sin^{n-3}\varphi_2 d\varphi_2\right)\cdots\left(\int_0^\pi \sin\varphi_{n-2}d\varphi_{n-2}\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1}\right). \end{aligned}$$

这与上面的结果完全一致. □

例 3 求 n 维单位球面 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ 的面积.

解 设 $x_n = f(x_1, \cdots, x_{n-1}), (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Delta \subset \boldsymbol{R}^{n-1}$ 为 n 维空间中的曲面,则其面积为

$$\overbrace{\int\cdots\int_\Delta}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}\right)^2} dx_1\cdots dx_{n-1}.$$

因 n 维单位球面的上半部可由方程

$$x_n = \sqrt{1-(x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2)} \quad (x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2 \leqslant 1)$$

确定，又由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}\right)^2} = \frac{1}{x_n},$$

所以上半球面面积

$$\frac{1}{2}\Delta S = \overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}}{x_n}$$

$$= \overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n}{\sqrt{1-(x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2)}}$$

$$= \overbrace{\int\cdots\int}^{n-2}_{x_1^2+\cdots+x_{n-2}^2\leqslant 1} \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-2}\int_{-\sqrt{1-(x_1^2+\cdots+x_{n-2}^2)}}^{\sqrt{1-(x_1^2+\cdots+x_{n-2}^2)}} \frac{\mathrm{d}x_{n-1}}{\sqrt{1-(x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2)}}.$$

由于对变量 x_{n-1} 的积分等于 π，从而有

$$\frac{1}{2}\Delta S = \pi \overbrace{\int\cdots\int}^{n-2}_{x_1^2+\cdots+x_{n-2}^2\leqslant 1} \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-2} = \pi\beta_{n-2},$$

其中 $\beta_{n-2} = \overbrace{\int\cdots\int}^{n-2}_{x_1^2+\cdots+x_{n-2}^2\leqslant 1} \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-2}$ 为 $n-2$ 维空间中单位球体体积. 因此由例 2 得 n 维球面面积为

$$\Delta S_n = 2\pi\beta_{n-2} = \begin{cases} \dfrac{2\pi^m}{(m-1)!}, & n=2m, \\ \dfrac{2(2\pi)^m}{(2m-1)!!}, & n=2m+1. \end{cases}$$

特别当 $n=1,2,3$ 时，它们分别为 $\Delta S_1=2, \Delta S_2=2\pi, \Delta S_3=4\pi$. □

习　　题

1. 计算五重积分

$$\iiiint\!\!\int_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中 $V: x^2+y^2+z^2+u^2+v^2\leqslant r^2$.

2. 计算四重积分

$$\iiiint\limits_V \sqrt{\frac{1-x^2-y^2-z^2-u^2}{1+x^2+y^2+z^2+u^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}u,$$

其中 $V: x^2+y^2+z^2+u^2\leqslant 1$.

3. 求 n 维角锥 $x_i\geqslant 0, \frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}\leqslant 1, a_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的体积.

4. 把 $\Omega: x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant R^2$ 上的 $n(n\geqslant 2)$ 重积分

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\Omega} f(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2})\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

化为单重积分,其中 $f(u)$ 为连续函数.

* §8 反常二重积分

前面我们是在有界区域上讨论有界函数的二重积分.本节将研究无界区域或无界函数的二重积分.

一 无界区域上的二重积分

定义 1 设 $f(x,y)$ 为定义在无界区域 D 上的二元函数.若对于平面上任一包围原点的光滑封闭曲线 γ, $f(x,y)$ 在曲线 γ 所围的有界区域 E_γ 与 D 的交集 $E_\gamma\cap D=D_\gamma$(图 21-40)上恒可积.令 $d_\gamma=\min\{\sqrt{x^2+y^2}\mid(x,y)\in\gamma\}$.若极限

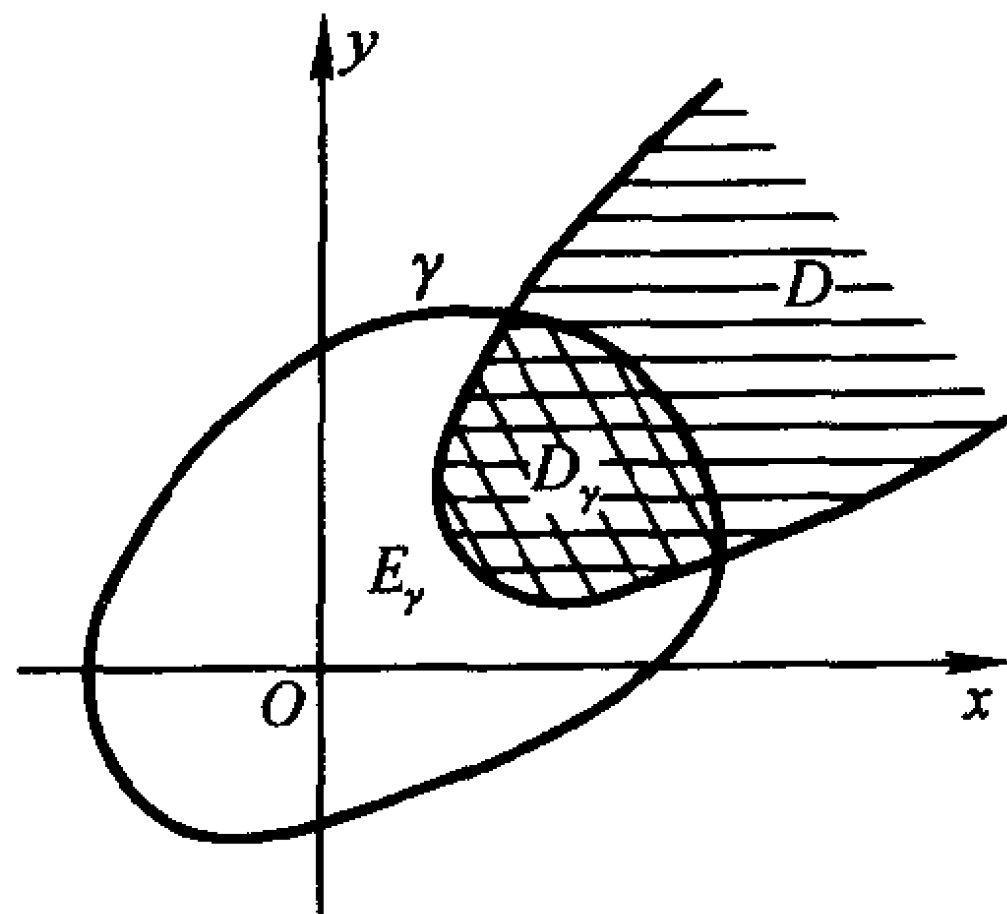


图 21-40

$$\lim_{d_\gamma\to\infty}\iint\limits_{D_\gamma} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

存在有限,且与 γ 的取法无关,则称 $f(x,y)$ 在 D 上的反常二重积分**收敛**,并记

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\lim_{d_\gamma\to 0}\iint\limits_{D_\gamma} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma, \tag{1}$$

否则称 $f(x,y)$ 在 D 上的反常二重积分**发散**,或简称 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 发散.

定理 21.16 设在无界区域 D 上 $f(x,y)\geqslant 0$, $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n,\cdots$ 为一列包围原点的光滑封闭曲线序列,满足

(i) $d_n=\inf\{\sqrt{x^2+y^2}\mid(x,y)\in\gamma_n\}\to+\infty\ (n\to\infty)$;

(ii) $I=\sup\limits_n\iint\limits_{D_n} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma<+\infty$,

其中 D_n 为 γ_n 所围的有界区域 E_n 与 D 的交集,则反常二重积分(1)收敛,并且

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = I.$$

证 设 γ'为任何包围原点的光滑封闭曲线,这曲线所围的区域记为 E',并记 $D' = E' \cap D$. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = +\infty$,因此存在 n,使得 $D' \subset D_n \subset D$. 由于 $f(x,y) \geqslant 0$,所以有

$$\iint_{D'} f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_{D_n} f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant I.$$

另一方面,因为

$$I = \sup_n \iint_{D_n} f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

对于任给的 $\varepsilon > 0$,总有 n_0,使得

$$\iint_{D_{n_0}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma > I - \varepsilon.$$

对于充分大的 d',区域 D'又可包含D_{n_0},因而

$$\iint_{D'} f(x,y)\mathrm{d}\sigma > I - \varepsilon.$$

由

$$I - \varepsilon < \iint_{D'} f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant I$$

知 $f(x,y)$在 D 上的反常二重积分存在,且等 I. □

由定理 21.16 容易看到:若在 D 上 $f(x,y) \geqslant 0$,且它在 D 的任何有界子区域上可积且积分值有界,则 $f(x,y)$在 D 上的反常二重积分存在. 反过来,若 $f(x,y)$在 D 上的反常二重积分存在,则 $f(x,y)$在 D 的任何有界子区域上的积分有上界.

定理 21.17 若在无界区域 D 上 $f(x,y) \geqslant 0$,则反常二重积分(1)收敛的充要条件是:在 D 的任何有界子区域上 $f(x,y)$可积,且积分值有上界.

例 1 证明反常二重积分

$$\iint_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma$$

收敛,其中 D 为第一象限部分,即 $D = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$.

证 设 D_R 是以原点为圆心半径为R 的圆与D 的交集,即该圆的第一象限部分. 因为 $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} > 0$,所以二重积分

$$\iint_{D_R} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma$$

的值随着 R 的增大而增大.由于

$$\iint\limits_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R e^{-r^2}r dr = \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}),$$

所以

$$\lim_{R\to+\infty}\iint\limits_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma = \lim_{R\to+\infty}\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) = \frac{\pi}{4}.$$

显然对 D 的任何有界子区域D',总存在足够大的 R,使得 $D'\subset D_R$,于是

$$\iint\limits_{D'} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma \leqslant \iint\limits_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

因此由定理 21.17 反常二重积分

$$\iint\limits_{D} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma$$

收敛,并且由定理 21.16 有

$$\iint\limits_{D} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma = \frac{\pi}{4}. \tag{2}$$

□

由(2)式还可推出在概率论中经常用到的反常积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

的值.为此,考察 $S_a=[0,a]\times[0,a]$上的积分

$$\iint\limits_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma.$$

因为

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma\\ &=\int_0^a e^{-x^2}dx\int_0^a e^{-y^2}dy\\ &=\left(\int_0^a e^{-x^2}dx\right)^2.\end{aligned}$$

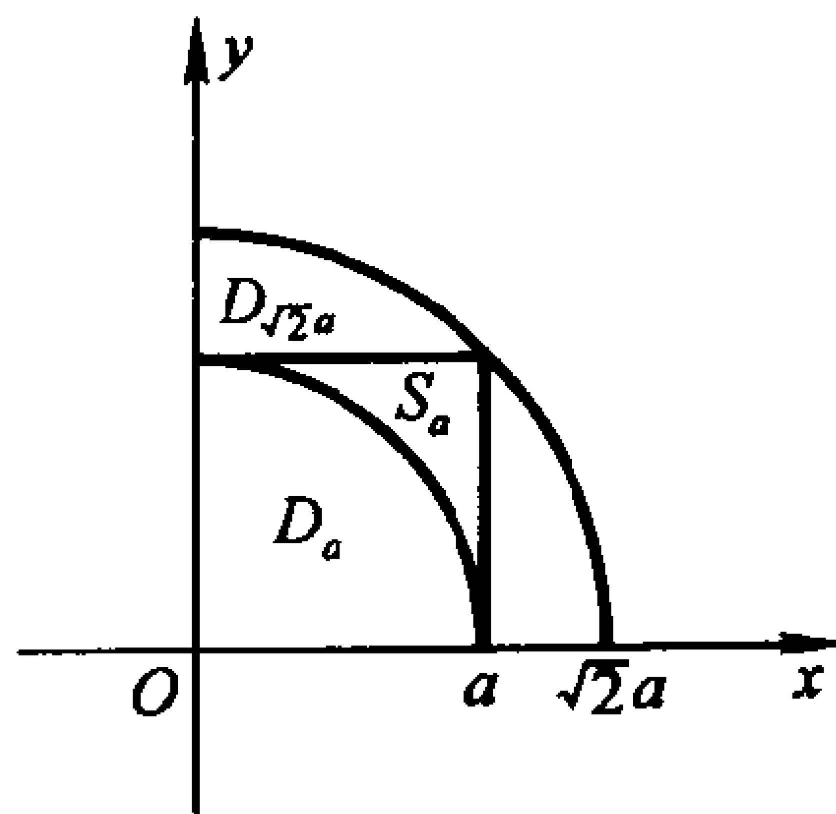


图 21-41

由 $D_a\subset S_a\subset D_{\sqrt{2}a}$(图 21-41)知

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma &\leqslant \iint\limits_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma\\ &=\left(\int_0^a e^{-x^2}dx\right)^2 \leqslant \iint\limits_{D_{\sqrt{2}a}} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma.\end{aligned}$$

令 $a \to +\infty$,则得

$$\lim_{a\to+\infty}\left(\int_0^a e^{-x^2}dx\right)^2 = \iint_D e^{-(x^2+y^2)}d\sigma = \frac{\pi}{4}.$$

所以

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

下面的例子是应用反常二重积分补证第十九章最后提到的关于 B 函数与 Γ 函数的联系公式.

例 2 若 $p>0,q>0$,则

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{3}$$

证 对于 Γ 函数,令 $x=u^2$,则 $dx=2udu$,于是

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = 2\int_0^{+\infty} u^{2p-1}e^{-u^2}du.$$

从而

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_0^{+\infty} x^{2p-1}e^{-x^2}dx \cdot \int_0^{+\infty} y^{2q-1}e^{-y^2}dy \\ &= \lim_{R\to+\infty} 4\int_0^R x^{2p-1}e^{-x^2}dx \cdot \int_0^R y^{2q-1}e^{-y^2}dy.\end{aligned}$$

令 $D_R=[0,R]\times[0,R]$,由二重积分化为累次积分计算公式有

$$\begin{aligned}&\iint_{D_R} x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-(x^2+y^2)}d\sigma \\ &= \int_0^R x^{2p-1}e^{-x^2}dx \cdot \int_0^R y^{2q-1}e^{-y^2}dy.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \lim_{R\to+\infty} 4\iint_{D_R} x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-(x^2+y^2)}d\sigma \\ &= 4\iint_D x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-(x^2+y^2)}d\sigma,\end{aligned} \tag{4}$$

这里 D 为平面上第一象限部分.和例 1 一样,下面讨论(4)式右边的反常二重积分.记

$$D_r = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant r^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}.$$

于是有

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\iint_D x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-(x^2+y^2)}d\sigma$$

$$= \lim_{r\to+\infty} 4\iint_{D_r} x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-(x^2+y^2)}d\sigma.$$

对上式右边积分应用极坐标变换,则可得

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \lim_{r\to+\infty} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^r r^{2(p+q)-2}(\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}e^{-r^2} r dr$$

$$= \lim_{r\to+\infty} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}d\theta \cdot 2\int_0^r r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}d\theta \cdot \Gamma(p+q).$$

再由第十九章§3的(10)式就得到

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p,q)\Gamma(p+q).$$ □

定理 21.18 函数 $f(x,y)$ 在无界区域 D 上的反常二重积分收敛的充要条件是 $|f(x,y)|$ 在 D 上的反常二重积分收敛.

证 我们先证充分性.设 $\iint\limits_D |f(x,y)|d\sigma$ 收敛,其值为 M. 作辅助函数

$$f^+(x,y) = \frac{|f(x,y)|+f(x,y)}{2}, f^-(x,y) = \frac{|f(x,y)|-f(x,y)}{2}.$$

显然,$0\leqslant f^+(x,y)\leqslant|f(x,y)|$ 及 $0\leqslant f^-(x,y)\leqslant|f(x,y)|$. 因而在 D 的任何有界子区域 σ 上,恒有

$$\iint_\sigma f^+(x,y)d\sigma \leqslant \iint_\sigma |f(x,y)|d\sigma = M,$$

$$\iint_\sigma f^-(x,y)d\sigma \leqslant \iint_\sigma |f(x,y)|d\sigma = M.$$

所以 $f^+(x,y)$ 与 $f^-(x,y)$ 在 D 上的反常二重积分收敛.由于

$$f(x,y) = f^+(x,y) - f^-(x,y),$$

所以 $f(x,y)$ 在 D 上的反常二重积分也收敛.

关于必要性的证明,这里不讲了.有兴趣的读者可参阅菲赫金哥尔茨著的微积分学教程第三卷第一分册. □

定理 21.19(柯西判别法) 设 $f(x,y)$ 在无界区域 D 的任何有界子区域上二重积分存在,r 为 D 内的点 (x,y) 到原点的距离:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

(i) 若当 r 足够大时,$|f(x,y)|\leqslant\frac{c}{r^p}$,其中 c 为正的常数,则当 $p>2$ 时,反常二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 收敛;

(ii) 若 $f(x,y)$在 D 内满足$|f(x,y)|\geqslant\frac{c}{r^p}$,其中 D 是含有顶点为原点的无限扇形区域,则当 $p\leqslant2$ 时,反常二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 发散.

证明从略.

二 无界函数的二重积分

定义 2 设 P 为有界区域D 的一个聚点,$f(x,y)$在 D 上除点P 外皆有定义,且在 P 的任何空心邻域内无界,Δ 为 D 中任何含有P 的小区域,$f(x,y)$在 $D-\Delta$ 上可积.又设 d 表示 Δ 的直径,即

$$d=\sup\{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\mid(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\Delta\}.$$

若极限

$$\lim_{d\to0}\iint\limits_{D-\Delta}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

存在且有限,并且与 Δ 的取法无关,则称 $f(x,y)$在 D 上的反常二重积分**收敛**,记作

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{d\to0}\iint\limits_{D-\Delta}f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

否则称 $f(x,y)$在 D 上的反常二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ **发散**.

与无界区域上反常二重积分一样,对无界函数的反常二重积分也可建立相应的收敛性定理.

定理 21.20(柯西判别法) 设 $f(x,y)$在有界区域 D 上除点$P(x_0,y_0)$外处处有定义,$P(x_0,y_0)$点为它的瑕点,则下面两个结论成立.

(i) 若在点 P 的附近有

$$|f(x,y)|\leqslant\frac{c}{r^\alpha},$$

其中 c 为常数,$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$,则当 $\alpha<2$ 时,反常二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 收敛;

(ii) 若在点 P 的附近有

$$|f(x,y)|\geqslant\frac{c}{r^\alpha},$$

且 D 含有以点P 为顶点的角形区域,则当 $\alpha\geqslant2$ 时,反常二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 发散.

习 题

1. 试讨论下列无界区域上二重积分的收敛性：

(1) $\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1}\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2)^m}$；

(2) $\iint\limits_{D}\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{(1+|x|^p)(1+|y|)^q}$，$D$ 为全平面；

(3) $\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\dfrac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}\quad(0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M)$.

2. 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x.$$

3. 判别下列积分的收敛性：

(1) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2)^m}$； (2) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{(1-x^2-y^2)^m}$.

* §9 在一般条件下重积分变量变换公式的证明

在§4 中，我们在 $y(u,v)$ 具有二阶连续偏导数的条件下，利用格林公式证明了二重积分的变量变换公式，即定理 21.13. 本节将给出在 $y=y(u,v)$ 只具有一阶连续偏导数的条件下定理 21.13 的证明.

为了便于将定理 21.13 推广到 n 维空间的场合，也为了书写形式对称起见，我们讨论从 $x'_1x'_2$ 平面到 x_1x_2 平面的变换 $T: x_1=\varphi_1(x'_1,x'_2), x_2=\varphi_2(x'_1,x'_2)$. 变换 T 将 $x'_1x'_2$ 平面上由按段光滑封闭曲线所围的有界闭区域 D'，一对一地变换成 x_1x_2 平面上的闭区域 D. 又设 $\varphi_i(x'_1,x'_2)(i=1,2)$ 在 D' 上具有一阶连续偏导数，并且函数行列式

$$J(x'_1,x'_2)=\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x'_1,x'_2)}$$

在 D' 上不为零. 若 $f(x_1,x_2)$ 在 D 上可积，则定理 21.13 的结论变为下述形式：

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{D}f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\&=\iint\limits_{D'}f(\varphi_1(x'_1,x'_2),\varphi_2(x'_1,x'_2))\,|J(x'_1,x'_2)|\,\mathrm{d}x'_1\mathrm{d}x'_2.\end{aligned}\qquad(1)$$

上述定理证明的关键是下面的引理.

引理 设变换 $T: x_i=\varphi_i(x'_1,x'_2)(i=1,2)$ 将 $x'_1x'_2$ 平面上由按段光滑

封闭曲线所围的有界闭区域 D',一对一地变换成 x_1x_2 平面上的闭区域 D.又设 $\varphi_i(x_1',x_2')(i=1,2)$在 D'上具有一阶连续偏导数,并且函数行列式

$$J(x_1',x_2')=\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x_1',x_2')}\neq 0,(x_1',x_2')\in D'.$$

若 Δ'为D'内边长为h 的任一正方形,$\Delta=T(\Delta')$是 Δ'在映照T 下的象,那么成立关系式

$$\mu(\Delta)=|J(\bar{x}_1',\bar{x}_2')|\mu(\Delta')+O(h^2\omega(h))$$
$$(|O(h^2\omega(h))|\leqslant C|h^2\omega(h)|),\tag{2}$$

其中$(\bar{x}_1',\bar{x}_2')$为Δ'的某一顶点,C 为与h 及 Δ'在D'中的位置无关的常数,$\mu(\Delta)$与 $\mu(\Delta')$分别表示区域 Δ 与 Δ'的面积,

$$\omega(h)=\sup_{i,j=1,2}\omega_{ij}(h),$$

$\omega_{ij}(h)$是$\frac{\partial}{\partial x_j'}\varphi_i(x_1',x_2')$在 D'上的**连续模**,即

$$\omega_{ij}(h)=\sup\left\{\left|\frac{\partial}{\partial x_j'}\varphi_i(x_1',x_2')-\frac{\partial}{\partial x_j'}\varphi_i(x_1'',x_2'')\right|\right|$$
$$\left.(x_1',x_2'),(x_1'',x_2'')\in D' \text{ 且}\sqrt{(x_1'-x_1'')^2+(x_2'-x_2'')^2}<h\right\}.$$

证 不妨设正方形 $\Delta'=[\bar{x}_1',\bar{x}_1'+h]\times[\bar{x}_2',\bar{x}_2'+h]$,它的四个顶点为 $P'(\bar{x}_1',\bar{x}_2')$,$A_1'(\bar{x}_1'+h,\bar{x}_2')$,$C'(\bar{x}_1'+h,\bar{x}_2'+h)$与 $A_2'(\bar{x}_1',\bar{x}_2'+h)$(图 21-42).于是 $\Delta=T(\Delta')$是 D 内的曲边四边形PA_1CA_2(图 21-43),且是一闭区域,其中 P,A_1,C,A_2 分别是 P',A_1',C',A_2' 在映照 T 下的象,它的边界 Γ 则是正方形 Δ'的边界Γ'在映照 T 下的象.设点 P 为$P(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$.

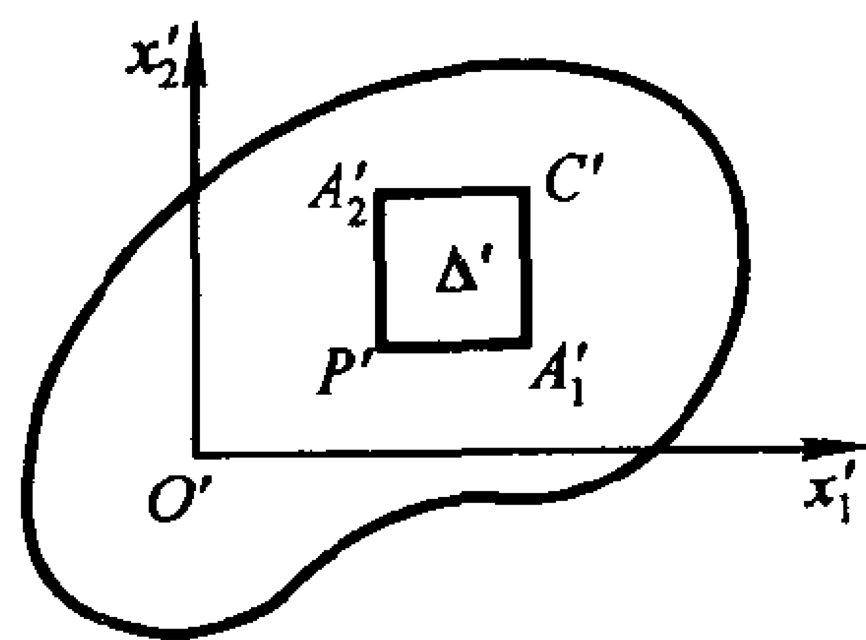


图 21-42

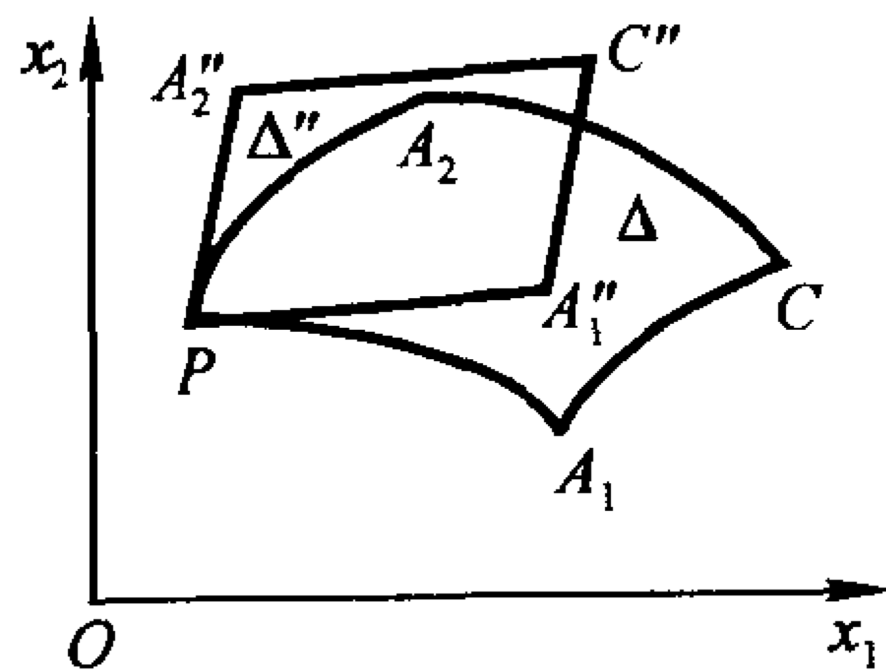


图 21-43

对Δ'内任一点$Q'(x_1',x_2')$,记 Q'在映照 T 下的象为 $Q(x_1,x_2)$,即 $Q=TQ'$.由于函数 $\varphi_i(x_1',x_2')(i=1,2)$在 D'上连续可微,故由多元函数微分中值定理,存在点$(\xi_1',\xi_2')\in\Delta'$,使得

$$x_i=\bar{x}_i+\frac{\partial}{\partial x_1'}\varphi_i(\xi_1',\xi_2')(x_1'-\bar{x}_1')+$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_2}\varphi_i(\xi'_1,\xi'_2)(x'_2-\bar{x}'_2) \quad (i=1,2), \tag{3}$$

其中 ξ'_i 位于 $\bar{x}'_i$ 与 $x'_i(i=1,2)$之间.

下面考虑从 $x'_1x'_2$ 平面到 x_1x_2 平面的线性映照 T^*:若 $Q'(x'_1,x'_2)\in D'$,则 $T^*Q'=Q''(x''_1,x''_2)$,其中

$$x''_i=\bar{x}_i+\frac{\partial}{\partial x'_1}\varphi_i(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2)(x'_1-\bar{x}'_1)+$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_2}\varphi_i(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2)(x'_2-\bar{x}'_2) \quad (i=1,2). \tag{4}$$

由解析几何知道,在映照 T^* 下,正方形 Δ' 被映照成平行四边形 $PA''_1C''A''_2$,其中 A''_1,C'',A''_2 分别为 A'_1,C',A'_2 在映照 T^* 下的象(图 21-43).记这平行四边形为 Δ'',它的边界为 Γ''.

由(4)式知 Δ''的两条边 $PA''_i(i=1,2)$的长分别为

$$|PA''_i|=ha_i,$$

其中

$$a_i=\left[\left(\frac{\partial}{\partial x'_i}\varphi_1(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial x'_i}\varphi_2(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (i=1,2).$$

下面我们来估计点 $Q=TQ'$与点 $Q''=T^*Q'$之间的距离.由(3)及(4)式有

$$x_i-x''_i=\left[\frac{\partial}{\partial x'_1}\varphi_i(\xi'_1,\xi'_2)-\frac{\partial}{\partial x'_1}\varphi_i(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2)\right](x'_1-\bar{x}'_1)+$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x'_2}\varphi_i(\xi'_1,\xi'_2)-\frac{\partial}{\partial x'_2}\varphi_i(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2)\right](x'_2-\bar{x}'_2) \quad (i=1,2).$$

从而由 $\omega(h)$的定义可得

$$|x_i-x''_i|\leqslant\omega(\sqrt{2}h)h+\omega(\sqrt{2}h)h\leqslant 4\omega(h)h.$$

因此 Q 与 Q''之间的距离

$$\rho(Q,Q'')=\sqrt{(x''_1-x_1)^2+(x''_2-x_2)^2}\leqslant 6\omega(h)h. \tag{5}$$

记 $\lambda=6\omega(h)h$,则由(5)式可见点 Q 属于点 Q''的 λ 闭邻域 $\overline{U}(Q'',\lambda)$.令

$$W=\bigcup_{Q''\in\Gamma''}\overline{U}(Q'',\lambda),$$

则 W 的面积 $\mu(W)$不会大于四个圆心在 Γ''的顶点,半径为 λ 的圆的面积与四个以平行四边形 Δ''的各边为底边,高为 2λ 的矩形面积之和(图 21-44),即

$$\mu(W)\leqslant 4\pi\lambda^2+2\sum_{i=1}^{2}2\lambda a_ih\leqslant kh^2\omega(h), \tag{6}$$

其中 k 是与 h 及 Δ'在 D'中的位置无关的常数(这是因为函数 $\varphi_i(x'_1,x'_2)(i=1,2)$在有界闭区域 D'上具有一阶连续偏导数,所以 $\varphi_i(x'_1,x'_2)(i=1,2)$与它们的

一阶偏导数在 D' 上有界,因此 $a_i(i=1,2)$ 和 $\omega(h)$ 在 D' 上也有界).

我们现在来证明引理的结论,即证明(2)式成立.为此先证明下面的包含关系式:

$$\Delta\subset\Delta''\cup W. \tag{7}$$

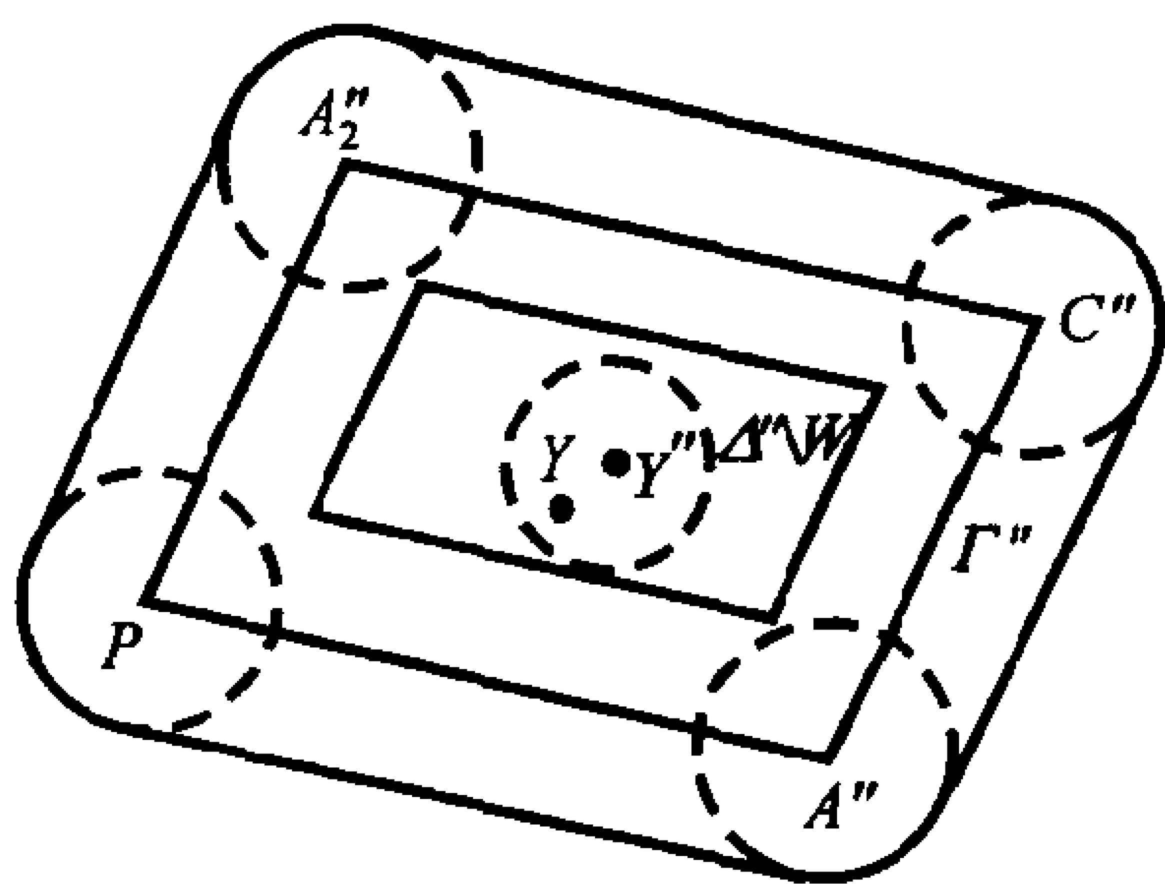


图 21-44

事实上,设 Z 为 Δ 中的任意一点.我们从平行四边形 Δ'' 的中心 Y'' 出发,作一射线经过 Z 且延伸到无穷.由于函数 $\varphi_1(x_1',x_2')$ 与 $\varphi_2(x_1',x_2')$ 在 Δ' 上有界,所以 Δ 是一有界区域,并且它的边界 Γ 是按段光滑的封闭曲线.因此所作的射线必与 Γ 相交于某一点 Z_0.又由(5)式知,$\Gamma\subset W$,从而

$$Z_0\in W\subset\Delta''\cup W.$$

因此 $\Delta''\cup W$ 包含整个线段 $Y''Z_0$,所以 $Z\in\Delta''\cup W$.这就证明了包含关系式(7)成立.

设 H_i 表示平行四边形 Δ'' 中垂直于边 PA_i'' 的高.我们分两种情形证明(2)式成立.

(i) 若 $H_i>4\lambda(i=1,2)$,则 $\Delta''\setminus W$ 非空(图 21-44).下证此时成立包含关系式:

$$\Delta''\setminus W\subset\Delta. \tag{8}$$

事实上,因为 $H_i>4\lambda(i=1,2)$,所以 Δ'' 的中心 Y'' 的 λ 闭邻域

$$\overline{U}(Y'',\lambda)\subset\Delta''\setminus W.$$

由于正方形 Δ' 的中心 Y' 在映照 T^* 下的象即为 Y'',所以由(5)式有

$$\rho(TY',Y'')=\rho(TY',T^*Y')\leqslant\lambda.$$

从而 Y' 在映照 T 下的象

$$Y=TY'\in\overline{U}(Y'',\lambda)\subset\Delta''\setminus W.$$

因为 $\Gamma\subset W$,所以 Γ 与 $\Delta''\setminus W$ 不相交.若存在点 $Z\in\Delta''\setminus W$,但 $Z\overline{\in}\Delta$.那么连结 Y 和点 Z 的线段 $\overline{YZ}$ 必与 Γ 相交于某一点 Z_0.由于 Y 和 Z 都属于 $\Delta''\setminus W$,因此 $Z_0\in\overline{YZ}\subset\Delta''\setminus W$,这与 Γ 和 $\Delta''\setminus W$ 不相交矛盾,所以 $Z\in\Delta$.这就证明了(8)式.

由(7)式与(8)式得到

$$\mu(\Delta'')-\mu(W)\leqslant\mu(\Delta)\leqslant\mu(\Delta'')+\mu(W).$$

所以存在 $-1\leqslant\theta\leqslant1$,使得

$$\mu(\Delta)=\mu(\Delta'')+\theta\mu(W).$$

因为平行四边形 Δ'' 的面积

$$\mu(\Delta'') = |\overrightarrow{PA}''_1 \times \overrightarrow{PA}''_2| = |J(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2)| h^2, \tag{9}$$

因此由(6)式及正方形 Δ' 的面积 $\mu(\Delta') = h^2$,得到

$$\begin{aligned}\mu(\Delta) &= |J(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2)| h^2 + O(h^2\omega(h)) \\ &= |J(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2)| \mu(\Delta') + O(h^2\omega(h)), \ |O(h^2\omega(h))| \leqslant Ch^2\omega(h),\end{aligned}$$

其中常数 C 不依赖于点 $(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2)$ 与 h 的选取,也即与 h 及正方形 Δ' 在 D' 的位置无关.这就证明了(2)式成立.

(ii) 若 $H_1 \leqslant 4\lambda$ 或 $H_2 \leqslant 4\lambda$,不妨假定 $H_1 \leqslant 4\lambda$.由于平行四边形 Δ'' 的面积等于 H_1 乘以边 PA''_1 的长 $a_1 h$,因此由(6),(7)及(9)式有

$$\begin{aligned}|\mu(\Delta) - |J(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2)| h^2| &= |\mu(\Delta) - \mu(\Delta'')| \\ &\leqslant \mu(\Delta) + \mu(\Delta'') \leqslant (\mu(\Delta'') + \mu(W)) + \mu(\Delta'') \\ &= 2\mu(\Delta'') + \mu(W) = 2a_1 h H_1 + \mu(W) \\ &\leqslant 8a_1 h\lambda + \mu(W) = 48a_1 h^2\omega(h) + \mu(W) \\ &= O(h^2\omega(h)) + O(h^2\omega(h)) = O(h^2\omega(h)),\end{aligned}$$

其中 $48a_1h^2\omega(h) = O(h^2\omega(h))$ 是由于 a_1 在 D' 上有界.因此

$$\mu(\Delta) = |J(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2)| \mu(\Delta') + O(h^2\omega(h)),$$

即(2)式也成立.

这样,对于 H_i 的各种可能情形都证得了(2)式成立. □

推论 在引理的条件下,成立

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mu(\Delta)}{\mu(\Delta')} = |J(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2)|. \tag{10}$$

证 因为 $\frac{\partial}{\partial x'_j}\varphi_i(x'_1,x'_2)(i,j=1,2)$ 在有界闭区域 D' 上连续,所以在 D' 上一致连续,于是

$$\lim_{h\to 0} \omega_{ij}(h) = 0 \quad (i,j = 1,2),$$

从而 $\lim\limits_{h\to 0} \omega(h) = 0$.于是当 $h \to 0$ 时有

$$|O(h^2\omega(h))| \leqslant Ch^2\omega(h) = o(h^2).$$

由于上式两边与点 $(x'_1,x'_2) \in D'$ 无关,所以上式对于所有的 $(x'_1,x'_2) \in D'$ 一致地成立.

另一方面,由于 $\mu(\Delta') = h^2$,因此由引理:当 $h \to 0$ 时有

$$\mu(\Delta) = |J(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2)| h^2 + o(h^2).$$

从而得到

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mu(\Delta)}{\mu(\Delta')} = \lim_{h\to 0} \frac{\mu(\Delta)}{h^2} = |J(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2)|. \qquad \square$$

在上述推论中,由于点 $(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2)$ 可为 D' 中的任意一点,因此(10)式可改写

成

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mu(\Delta)}{\mu(\Delta')}=|J(x_1',x_2')|,(x_1',x_2')\in D'. \tag{11}$$

由(11)式看到,与一元函数的导数相仿,函数行列式 $J(x_1',x_2')$ 表示在变换 T 之下面积微元在点 (x_1',x_2') 的局部伸缩率.

下面给出在 $x_i=\varphi_i(x_1',x_2')(i=1,2)$ 具有一阶连续偏导数条件下二重积分变量变换公式(1)的证明.

证 由于 T 是一对一变换,因而在所设条件下 D' 的按段光滑的边界曲线,变换到 D 时,其边界曲线也是按段光滑的. 现在 $x_1'x_2'$ 平面上作平行于坐标轴的方格网,它是 D' 的一个分割. 由变换 T,相应地得到 x_1x_2 平面上 D 的一个分割. 考虑所有包含在 D' 内的方格 Δ_i',它们对应 D 内无公共内点的闭区域 Δ_i. 对于任给的 $\varepsilon>0$,当 h 充分小时,由(11)式,存在点 $(x_{1i}',x_{2i}')\in\Delta_i'$,使得

$$|\mu(\Delta_i)-|J(x_{1i}',x_{2i}')|\mu(\Delta_i')|<\varepsilon\mu(\Delta_i').$$

因此

$$\begin{aligned}&|f(x_{1i},x_{2i})\mu(\Delta_i)-f(\varphi_1(x_{1i}',x_{2i}'),\varphi_2(x_{1i}',x_{2i}'))\\&\qquad|J(x_{1i}',x_{2i}')|\mu(\Delta_i')|<\varepsilon M\mu(\Delta_i'),\end{aligned}$$

这里 $x_{1i}=\varphi_1(x_{1i}',x_{2i}'),x_{2i}=\varphi_2(x_{1i}',x_{2i}')$,$M$ 为 $|f(x_1,x_2)|$ 在 D 上的一个上界. 将它们按下标 i 逐项相加得

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_i f(x_{1i},x_{2i})\mu(\Delta_i)-\sum_i f(\varphi_1(x_{1i}',x_{2i}'),\varphi_2(x_{1i}',x_{2i}'))\\&\qquad|J(x_{1i}',x_{2i}')|\mu(\Delta_i)\Big|<\varepsilon M\sum_i\mu(\Delta_i')=\varepsilon M\mu(D').\end{aligned} \tag{12}$$

由于 $f(x_1,x_2)$ 和 $f(\varphi_1(x_1',x_2'),\varphi_2(x_1',x_2'))|J(x_1',x_2')|$ 分别在 D 和 D' 上可积,故当 $h\to 0$ 时,有

$$\lim_{h\to 0}\sum_i f(x_{1i},x_{2i})\mu(\Delta_i)=\iint_D f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,$$

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\sum_i f(\varphi_1(x_{1i}',x_{2i}'),\varphi_2(x_{1i}',x_{2i}'))|J(x_{1i}',x_{2i}')|\mu(\Delta_i')\\&=\iint_{D'} f(\varphi_1(x_1',x_2'),\varphi_2(x_1',x_2'))|J(x_1',x_2')|\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'.\end{aligned}$$

由(12)式中 ε 的任意性,上面两式右边部分相等,即(1)式成立. □

以上我们证明了两重积分在一般条件下的积分换元公式. 值得注意的是本节中所有的证明,在 n 维空间中只要用 n 维立方体、平行多面体来代替这里的正方形、平行四边形并把(5)式右边改为 $\sqrt{n^3(\sqrt{n}+1)^2}$,(6)式右边改为 $Kh^n\omega(h)$ 外,对 $n(n\geqslant 3)$ 重积分也同样适用.

总 练 习 题

1. 求下列函数在所指定区域 D 内的平均值：

(1) $f(x,y)=\sin^2 x\cos^2 y, D=[0,\pi]\times[0,\pi]$；

(2) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2, D=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant x+y+z\}$.

2. 计算下列积分：

(1) $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2}}[x+y]\mathrm{d}\sigma$； (2) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\mathrm{d}\sigma$.

3. 应用格林公式计算曲线积分

$$\oint_L xy^2\mathrm{d}x-x^2y\mathrm{d}y,$$

其中 L 为上半圆周 $x^2+y^2=a^2$ 从 $(a,0)$ 到 $(-a,0)$ 的一段.

4. 求

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $f(x,y)$ 为连续函数.

5. 求 $F'(t)$，设

(1) $F(t)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t}}\mathrm{e}^{\frac{tx}{y^2}}\mathrm{d}\sigma\quad(t>0)$；

(2) $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$，其中 $f(u)$ 为可微函数；

(3) $F(t)=\iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t\\0\leqslant z\leqslant t}}f(xyz)\mathrm{d}V$，其中 $f(u)$ 为可微函数.

6. 设 $f(t)=\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，求 $\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t$.

7. 证明

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V=abc\iiint\limits_\Omega f(ax,by,cz)\mathrm{d}V,$$

其中

$$V:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,\ \Omega:\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1.$$

8. 试写出单位正方体为积分区域时，柱面坐标系和球面坐标系下的三重积分的上下限.

9. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

10. 设 $f(x,y)$ 在 $[0,\pi]\times[0,\pi]$ 上连续，且恒取正值，试求

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}(\sin x)(f(x,y))^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}\sigma.$$

11．求由椭圆$(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$所界的面积，其中$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

12．设

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0,$$

求由平面

$$a_1x+b_1y+c_1z=\pm h_1,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=\pm h_2,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=\pm h_3,$$

所界平行六面体的体积.

13．设有一质量分布不均匀的半圆弧$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，其线密度为$\rho=a\theta$($a$为常数)，求它对原点$(0,0)$处质量为$m$的质点的引力.

14．求螺旋线$x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$对$z$轴的转动惯量，设曲线的密度为1.

15．求摆线$z=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant\pi)$的重心，设其质量分布是均匀的.

16．设$u(x,y), v(x,y)$是具有二阶连续偏导数的函数，证明：

(1) $\iint\limits_D v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)d\sigma=-\iint\limits_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)d\sigma+\oint_L v\frac{\partial u}{\partial n}ds$;

(2) $\iint\limits_D\left[u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right]d\sigma=\oint_L\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds$,

其中D为光滑曲线L所围的平面区域，而

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\boldsymbol{n},x),$$
$$\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{\partial v}{\partial y}\sin(\boldsymbol{n},x)$$

是$u(x,y), v(x,y)$沿曲线L的外法线$\boldsymbol{n}$的方向导数.

17．求指数λ，使得曲线积分

$$k=\int_{(s_0,t_0)}^{(s,t)}\frac{x}{y}r^{\lambda}dx-\frac{x^2}{y^2}r^{\lambda}dy$$

与路线无关($r^2=x^2+y^2$)，并求k.

第二十二章　曲 面 积 分

§1　第一型曲面积分

一　第一型曲面积分的概念

类似于第一型曲线积分，当质量分布在某一曲面块 S（设密度函数 $\rho(x,y,z)$ 在 S 上连续）时，曲面块 S 的质量为

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i,$$

其中 $T=\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$ 为曲面块的分割，ΔS_i 表示小曲面块 S_i 的面积，(ξ_i,η_i,ζ_i) 为 S_i 中任意一点，$\|T\|$ 为分割 T 的细度，即为诸 S_i 中的最大直径.

定义 1　设 S 是空间中可求面积的曲面，$f(x,y,z)$ 为定义在 S 上的函数. 对曲面 S 作分割 T，它把 S 分成 n 个小曲面块 $S_i(i=1,2,\cdots,n)$，以 ΔS_i 记小曲面块 S_i 的面积，分割 T 的细度 $\|T\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{S_i$ 的直径$\}$，在 S_i 上任取一点 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(i=1,2,\cdots,n)$，若极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

存在，且与分割 T 与 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 的取法无关，则称此极限为 $f(x,y,z)$ 在 S 上的**第一型曲面积分**，记作

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S. \tag{1}$$

于是前面讲到的曲面块的质量可由第一型曲面积分(1)求得.

特别地，当 $f(x,y,z)\equiv 1$ 时，曲面积分 $\iint_S \mathrm{d}S$ 就是曲面块 S 的面积.

第一型曲面积分的性质完全类似于第一型曲线积分，读者可仿照第二十章 §1 自行写出.

二　第一型曲面积分的计算

第一型曲面积分可化为二重积分来计算.

定理 22.1　设有光滑曲面

$$S: z=z(x,y),(x,y)\in D,$$

$f(x,y,z)$为 S 上的连续函数,则

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2}$$

定理22.1的证明与第二十章定理20.1 的证明相仿,这里不再重复了.

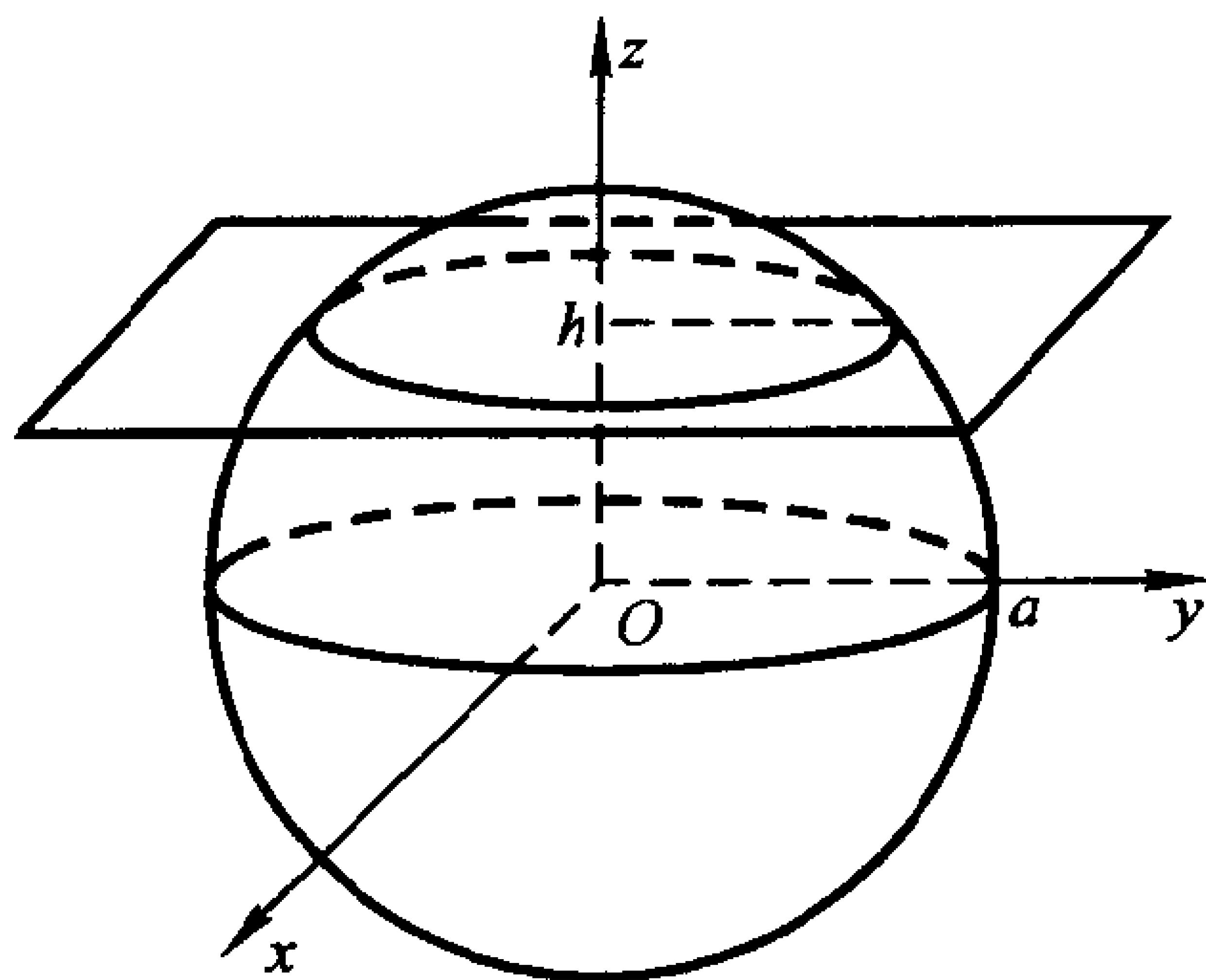


图 22 - 1

例1 计算 $\iint_S \frac{\mathrm{d}S}{z}$,其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h(0<h<a)$ 所截的顶部(图 22 - 1).

解 曲面 S 的方程为

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

定义域 D 为圆域:$x^2+y^2\leqslant a^2-h^2$. 由于

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

所以由公式(2)求得

$$\begin{aligned}\iint_S \frac{\mathrm{d}S}{z} &= \iint_D \frac{a}{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{a}{a^2-r^2}r\mathrm{d}r\\ &= 2\pi a\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{r}{a^2-r^2}\mathrm{d}r = -\pi a\ln(a^2-r^2)\Big|_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\\ &= 2a\pi\ln\frac{a}{h}.\end{aligned}$$

□

对于由参量形式表示的光滑曲面

$$S:\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v),\end{cases}\qquad (u,v)\in D,$$

则在 S 上第一型曲面积分的计算公式为

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{3}$$

其中

$$E=x_u^2+y_u^2+z_u^2,$$
$$F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v,$$
$$G=x_v^2+y_v^2+z_v^2.$$

这里还要求雅可比行列式$\frac{D(x,y)}{D(u,v)},\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\frac{D(z,x)}{D(u,v)}$中至少有一个不等于零.

例 2 计算 $\iint\limits_S z\mathrm{d}S$,其中 S 为螺旋面(图 22-2)的一部分

$$S:\begin{cases}x = u\cos v,\\ y = u\sin v,\\ z = v,\quad (u,v)\in D,\end{cases}$$

$$D:\begin{cases}0\leqslant u\leqslant a,\\ 0\leqslant v\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

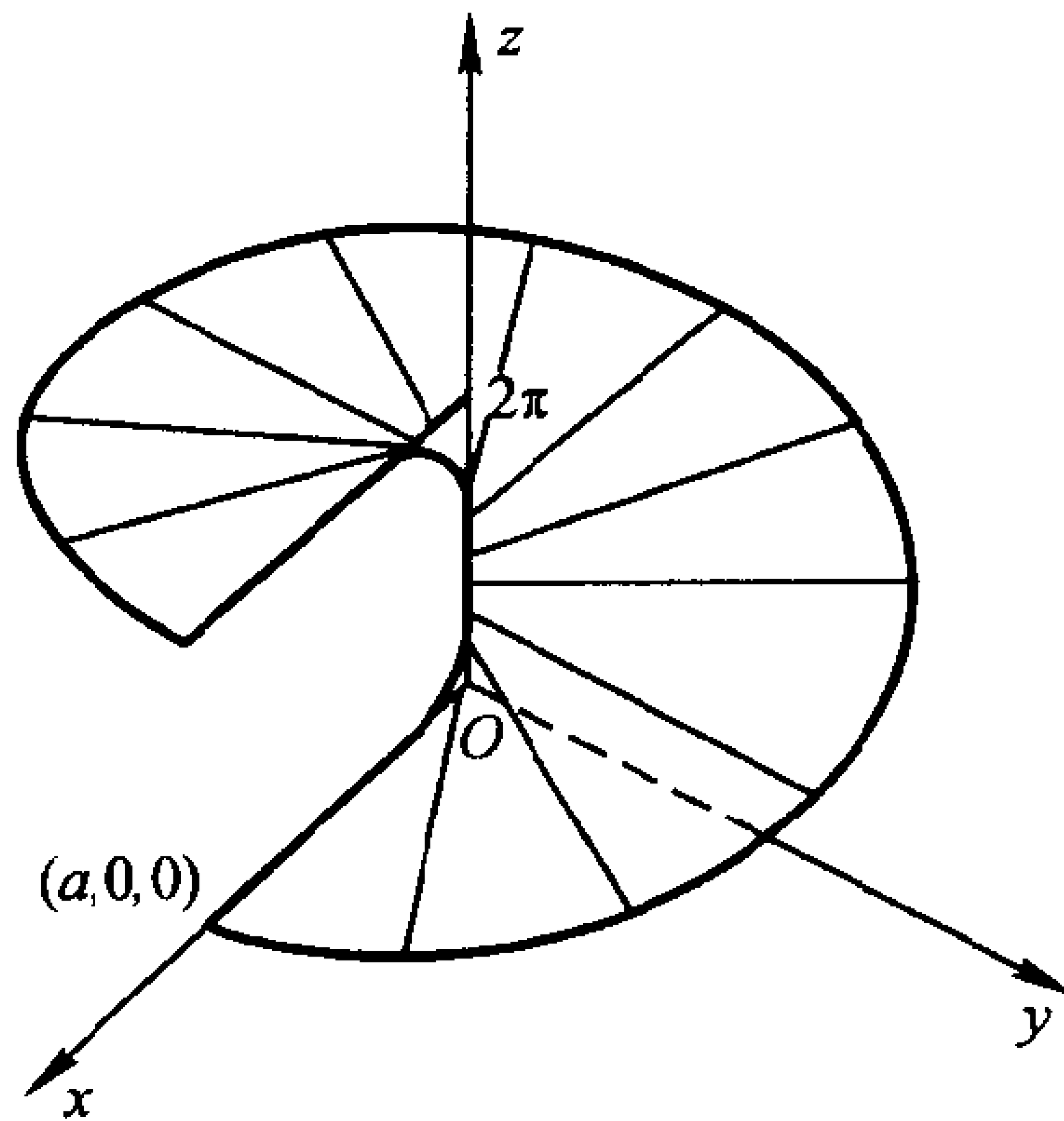


图 22-2

解 由于

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = \cos^2 v + \sin^2 v = 1,$$

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = -u\sin v\cos v + u\sin v\cos v = 0,$$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + 1 = 1 + u^2,$$

因此由公式(3)可以求得

$$\iint\limits_S z\mathrm{d}S = \iint\limits_D v\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} v\mathrm{d}v\int_0^a \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$=2\pi^2\left[\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{1+u^2})\right]_0^a$$

$$=\pi^2[a\sqrt{1+a^2} + \ln(a+\sqrt{1+a^2})].$$ □

与重积分相同,利用第一型曲面积分可以求曲面块的重心、转动惯量、引力等,作为练习,请读者自行写出这些公式,这里不赘述了.

习 题

1. 计算下列第一型曲面积分:

(1) $\iint\limits_S (x+y+z)\mathrm{d}S$,其中 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2, z\geqslant 0$;

(2) $\iint\limits_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S$,其中 S 为立体 $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$ 的边界曲面;

(3) $\iint\limits_S \frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2}$,其中 S 为柱面 $x^2+y^2=R^2$ 被平面 $z=0, z=H$ 所截取的部分;

(4) $\iint\limits_S xyz\mathrm{d}S$,其中 S 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限中的部分.

2. 求均匀曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 的重心.

3. 求密度为 ρ 的均匀球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$ 对于 z 轴的转动惯量.

4. 计算$\iint\limits_S z^2 \mathrm{d}S$,其中 S 为圆锥表面的一部分:

$$S:\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \qquad D:\begin{cases} 0\leqslant r\leqslant a, \\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, \end{cases}$$

这里 θ 为常数$\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$.

§2　第二型曲面积分

一　曲面的侧

为了给曲面确定方向,先要阐明曲面的侧的概念.

设连通曲面 S 上到处都有连续变动的切平面(或法线),M 为曲面 S 上的一点,曲面在 M 处的法线有两个方向:当取定其中一个指向为正方向时,则另一个指向就是负方向.设 M_0 为 S 上任一点,L 为 S 上任一经过点 M_0,且不超出 S 边界的闭曲线.又设 M 为动点,它在 M_0 处与 M_0 有相同的法线方向,且有如下特性:当 M 从 M_0 出发沿 L 连续移动,这时作为曲面上的点 M,它的法线方向也连续地变动.最后当 M 沿 L 回到 M_0 时,若这时 M 的法线方向仍与 M_0 的法线方向相一致,则说这曲面 S 是**双侧曲面**①;若与 M_0 的法线方向相反,则说 S 是**单侧曲面**.

我们通常碰到的曲面大多是双侧曲面.单侧曲面的一个典型例子是默比乌斯(Möbius)带.它的构造方法如下:取一矩形长纸带 $ABCD$(如图 22-3(a)),将其一端扭转 180°后与另一端粘合在一起(即让 A 与 C 重合,B 与 D 重合.如图

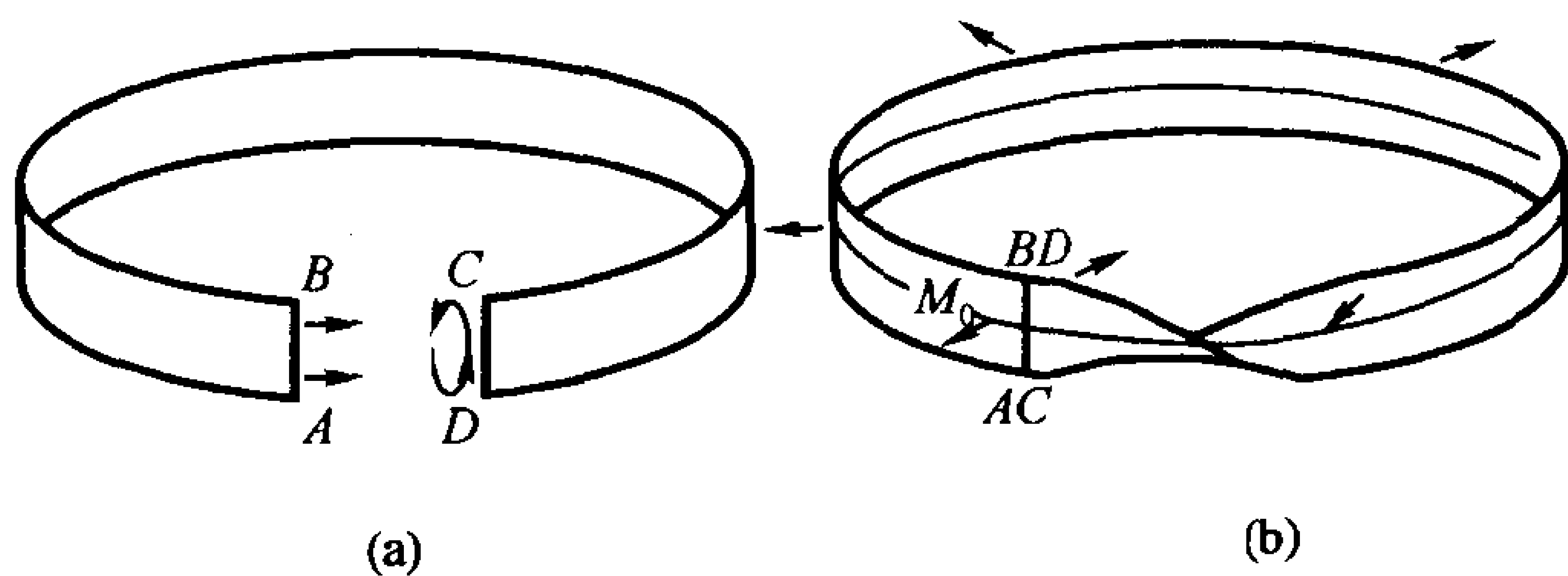


图 22-3

22-3(b)所示).读者可以考察这个带状曲面是单侧的.事实上,可在曲面上任取一条与其边界相平行的闭曲线 L,动点 M 从 L 上的点 M_0 出发,其法线方向与

① 事实上,可以证明,只需对 S 中某一点 M_0,对通过 M_0 且又不超出 S 的边界的任何闭曲线 L 上具有上述特性,则 S 是双侧曲面.

M_0 的法线方向相一致,当 M 沿 L 连续变动一周回到 M_0 时,由图 22－3(b)看到,这时 M 的法线方向却与 M_0 的法线方向相反.对默比乌斯带还可更简单地说明它的单侧特性,即沿这个带子上任一处出发涂以一种颜色,则可以不越过边界而将它全部涂遍(即把原纸带的两面都涂上同样的颜色).

通常由 $z=z(x,y)$所表示的曲面都是双侧曲面,当以其法线正方向与 z 轴正向的夹角成锐角的一侧(也称为上侧)为正侧时,则另一侧(也称下侧)为负侧.当 S 为封闭曲面时,通常规定曲面的外侧为正侧,内侧为负侧.

二 第二型曲面积分概念

先观察一个计算流量问题.设某流体以一定的流速

$$\boldsymbol{v} = (P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$$

从给定的曲面 S 的负侧流向正侧(图 22－4),其中 P,Q,R 为所讨论范围上的连续函数,求单位时间内流经曲面 S 的总流量 E.

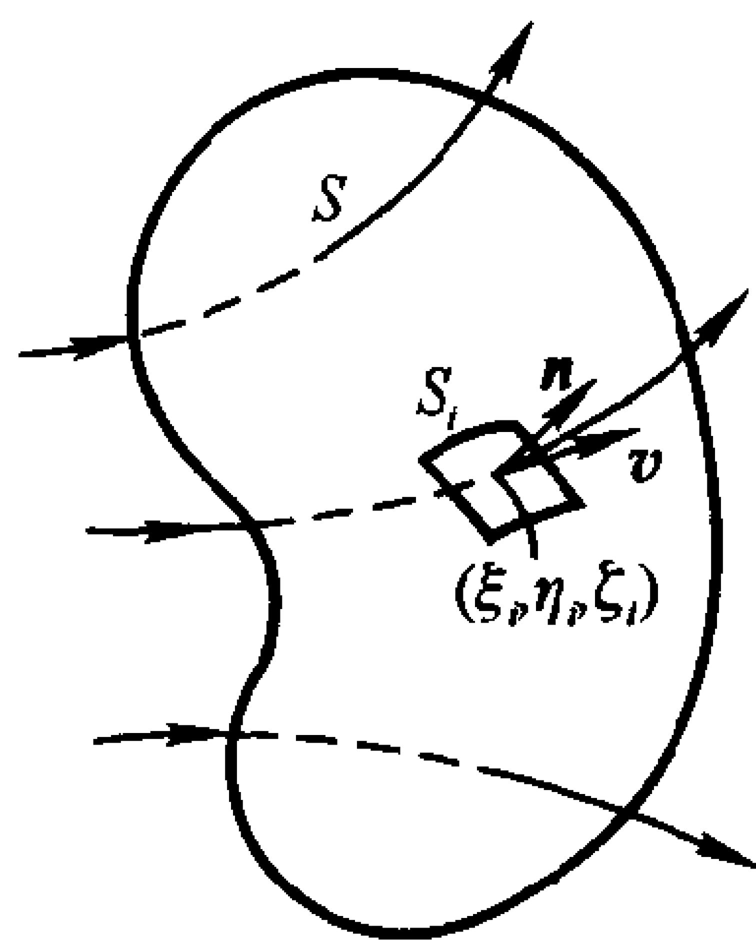


图 22－4

设在曲面 S 的正侧上任一点(x,y,z)处的单位法向量为

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

这里 α,β,γ 是 x,y,z 的函数.则单位时间内流经小曲面 S_i 的流量近似地等于

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{v}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\boldsymbol{n}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i\\ =&\ [P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i +\\ &R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i,\end{aligned}$$

其中(ξ_i,η_i,ζ_i)是 S_i 上任意取定的一点,$\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i$ 是 S_i 的正侧上法线的方向余弦,又 $\Delta S_i\cos\alpha_i,\Delta S_i\cos\beta_i,\Delta S_i\cos\gamma_i$ 分别是 S_i 的正侧在坐标面 yz,zx 和 xy 上投影区域的面积的近似值,并分别记作 $\Delta S_{i_{yz}},\Delta S_{i_{zx}},\Delta S_{i_{xy}}$.于是单位时间内由小曲面 S_i 的负侧流向正侧的流量也近似地等于

$$P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{yz}} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{zx}} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{xy}},$$

故单位时间内由曲面 S 的负侧流向正侧的总流量

$$\begin{aligned}E = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\{&P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{yz}} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{zx}} +\\ &R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{xy}}\}.\end{aligned}$$

这种与曲面的侧有关的和式极限就是所要讨论的第二型曲面积分.

定义 1 设 P,Q,R 为定义在双侧曲面 S 上的函数,在 S 所指定的一侧作分割 T,它把 S 分为 n 个小曲面 $S_1,S_2,\cdots,S_n$,分割 T 的细度 $\|T\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{S_i$

的直径},以 $\Delta S_{i_{yz}}$,$\Delta S_{i_{zx}}$,$\Delta S_{i_{xy}}$ 分别表示 S_i 在三个坐标面上的投影区域的面积,它们的符号由 S_i 的方向来确定.如 S_i 的法线正向与 z 轴正向成锐角时,S_i 在 xy 平面的投影区域的面积 $\Delta S_{i_{xy}}$ 为正.反之,若 S_i 法线正向与 z 轴正向成钝角时,它在 xy 平面的投影区域的面积 $\Delta S_{i_{xy}}$ 为负.在各个小曲面 S_i 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i).若

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{yz}}+\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{zx}}+$$

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{xy}}$$

存在,且与曲面 S 的分割 T 和 (ξ_i,η_i,ζ_i) 在 S_i 上的取法无关,则称此极限为函数 P,Q,R 在曲面 S 所指定的一侧上的**第二型曲面积分**,记作

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

或

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_S Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

据此定义,某流体以速度 $\boldsymbol{v}=(P,Q,R)$ 从曲面 S 的负侧流向正侧的总流量

$$E=\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又若,空间的磁场强度为

$$(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)),$$

则通过曲面 S 的磁通量(磁力线总数)

$$H=\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

若以 $-S$ 表示曲面 S 的另一侧,由定义易得

$$\iint_{-S} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

与第二型曲线积分一样,第二型曲面积分也有如下一些性质:

1. 若 $\iint_S P_i\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q_i\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (i=1,2,\cdots,k)$ 存在,则有

$$\iint_S\left(\sum_{i=1}^{k}c_iP_i\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\sum_{i=1}^{k}c_iQ_i\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\sum_{i=1}^{k}c_iR_i\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{i=1}^{k}c_i\iint_S P_i\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q_i\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $c_i(i=1,2,\cdots,k)$是常数.

2. 若曲面 S 是由两两无公共内点的曲面块 $S_1,S_2,\cdots,S_k$ 所组成,且

$$\iint_{S_i} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (i=1,2,\cdots,k)$$

存在,则有

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \sum_{i=1}^{k}\iint_{S_i} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

三 第二型曲面积分的计算

第二型曲面积分也是把它化为二重积分来计算.

定理 22.2 设 R 是定义在光滑曲面

$$S:\ z=z(x,y),\qquad (x,y)\in D_{xy}$$

上的连续函数,以 S 的上侧为正侧(这时 S 的法线方向与 z 轴正向成锐角),则有

$$\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2}$$

证 由第二型曲面积分定义

$$\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{xy}}$$
$$= \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i))\Delta S_{i_{xy}},$$

这里 $d=\max\{S_{i_{xy}}$ 的直径$\}$. 显然由 $\|T\|=\max\{S_i$ 的直径$\}\to 0$ 立刻可推得 $d\to 0$. 由于 R 在 S 上连续,z 在 D_{xy} 上连续(曲面光滑!),据复合函数的连续性,$R(x,y,z(x,y))$ 也是 D_{xy} 上的连续函数. 由二重积分的定义

$$\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i))\Delta S_{i_{xy}}.$$

所以

$$\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$ □

类似地,当 P 在光滑曲面

$$S:\ x=x(y,z),\quad (y,z)\in D_{yz}$$

上连续时,有

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{3}$$

这里 S 是以 S 的法线方向与 x 轴的正向成锐角的那一侧为正侧. 当 Q 在光滑曲面

$$S:\ y=y(z,x),\quad (z,x)\in D_{zx}$$

上连续时,有

$$\iint_S Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x, \tag{4}$$

这里 S 是以 S 的法线方向与 y 轴的正向成锐角的那一侧为正侧.

例 1 计算 $\displaystyle\iint_S xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在 $x\geqslant0, y\geqslant0$ 部分并取球面外侧(图 22-5).

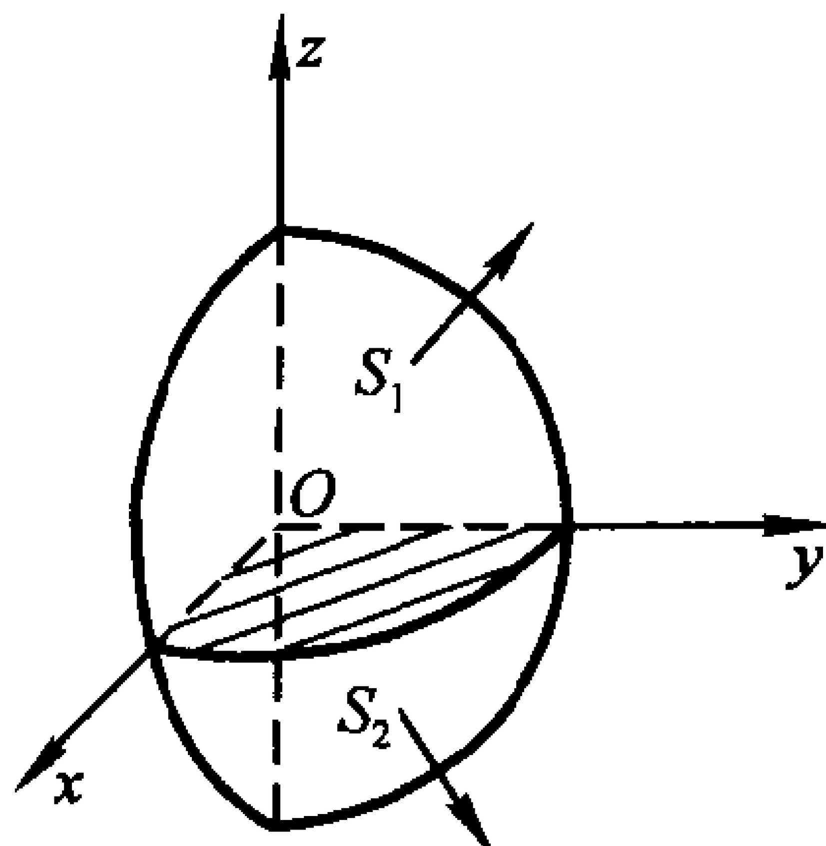


图 22-5

解 曲面 S 在第一、五卦限部分的方程分别为

$$S_1:\ z_1=\sqrt{1-x^2-y^2},$$

$$S_2:\ z_2=-\sqrt{1-x^2-y^2},$$

它们在 xy 平面上的投影区域都是单位圆在第一象限部分. 依题意,积分是沿 S_1 的上侧和 S_2 的下侧进行,所以

$$\begin{aligned}\iint_S xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{S_1} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{S_2} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}} -xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\cos\theta\sin\theta\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r=\frac{2}{15}.\end{aligned}$$

□

如果光滑曲面 S 由参量方程给出:

$$S:\begin{cases}x=x(u,v),\\y=y(u,v),\\z=z(u,v),\end{cases}\quad (u,v)\in D.$$

若在 D 上各点它们的函数行列式

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\ \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

不同时为零,则分别有

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pm\iint_D P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{5}$$

$$\iint_S Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pm\iint_D Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{6}$$

$$\iint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm \iint_D R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{7}$$

注 (5),(6),(7)三式中的正负号分别对应曲面 S 的两个侧,特别当 uv 平面的正方向对应于曲面 S 所选定的正向一侧时,取正号,否则取负号.

例 2 计算

$$\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的上半部并选取外侧.

解 把曲面表示为参量方程:

$$x = a\sin\varphi\cos\theta,\ y = b\sin\varphi\sin\theta, z = c\cos\varphi \quad \left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right).$$

由(5)式有

$$\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm \iint_{D_{\varphi\theta}} a^3\sin^3\varphi\cos^3\theta\cdot A\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta, \tag{8}$$

其中

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} b\cos\varphi\sin\theta & b\sin\varphi\cos\theta \\ -c\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = bc\sin^2\varphi\cos\theta,$$

积分是在 S 的正侧进行.由上述的注,(8)式右端取正号,即

$$\begin{aligned}\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint_{D_{\varphi\theta}} a^3\sin^3\varphi\cos^3\theta\cdot bc\sin^2\varphi\cos\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\ &= a^3bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2}{5}\pi a^3bc.\end{aligned}$$

□

*四 两类曲面积分的联系

与曲线积分一样,当曲面的侧确定之后,可以建立两种类型曲面积分的联系.

设 S 为光滑曲面,并以上侧为正侧,R 为 S 上的连续函数,曲面积分在 S 的正侧进行。因而有

$$\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{xy}}. \tag{9}$$

由曲面面积公式(第二十一章 §6)

$$\Delta S_i = \iint_{S_{i_{xy}}}\frac{1}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 γ 是曲面 S_i 的法线方向与 z 轴正向的交角,它是定义在 $S_{i_{xy}}$ 上的函数.因为积分沿曲面正侧进行,所以 γ 是锐角.又由 S 是光滑的,所以 $\cos\gamma$ 在闭区域 $S_{i_{xy}}$ 上连续.应用中值定理,在 $S_{i_{xy}}$ 内必存在一点,使这点的法线方向与 z 轴正向的夹角 γ_i^* 满足等式

$$\Delta S_i = \frac{1}{\cos\gamma_i^*}\Delta S_{i_{xy}}$$

或

$$\Delta S_{i_{xy}} = \cos\gamma_i^*\cdot\Delta S_i.$$

于是

$$R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{xy}} = R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i^*\Delta S_i.$$

n 个部分相加后得

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{xy}} = \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i^*\Delta S_i. \tag{10}$$

现以 $\cos\gamma_i$ 表示曲面 S_i 在点(x_i,y_i,z_i)的法线方向与 z 轴正向夹角的余弦,则由 $\cos\gamma$ 的连续性,可推得当 $\|T\|\to 0$ 时,(10)式右端极限存在.因此由(9)式得到

$$\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S R(x,y,z)\cos\gamma\,\mathrm{d}S. \tag{11}$$

这里注意当改变曲面的侧向时,左边积分改变符号,右边积分中角 γ 改为 $\gamma\pm\pi$.因而 $\cos\gamma$ 也改变符号,所以右边积分也相应改变了符号.同理可证:

$$\begin{aligned}\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint_S P(x,y,z)\cos\alpha\mathrm{d}S,\\ \iint_S Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x &= \iint_S Q(x,y,z)\cos\beta\mathrm{d}S,\end{aligned} \tag{12}$$

其中 α,β 分别是 S 上的法线方向与 x 轴正向和与 y 轴正向的夹角.一般地有

$$\begin{aligned}&\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint_S [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]\mathrm{d}S.\end{aligned} \tag{13}$$

这样,在确定了余弦函数 $\cos\alpha$、$\cos\beta$,$\cos\gamma$ 之后,由(11),(12)或(13)式便建立了两种不同类型曲面积分的联系.

习　　题

1. 计算下列第二型曲面积分:

(1) $\iint_S y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 为由 $x=y=z=0$,$x=y=z=a$ 六个平面所围的立方体表面并取外侧为正向;

(2) $\iint_S (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 是以原点为中心,边长为 2 的立方体表面并取外侧为正向;

(3) $\iint_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 是由平面 $x=y=z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围的四面体表面并取外侧为正向;

(4) $\iint_S yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$,其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的上半部分并取外侧为正向;

(5) $\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 并取外侧为正向.

2. 设某流体的流速为 $\boldsymbol{v}=(k,y,0)$，求单位时间内从球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的内部流过球面的流量.

---

3. 计算第二型曲面积分

$$I=\iint_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 是平行六面体($0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b,0\leqslant z\leqslant c$)的表面并取外侧为正向，$f(x)$、$g(y)$、$h(z)$为 S 上的连续函数.

4. 设磁场强度为 $\boldsymbol{E}(x,y,z)$，求从球内出发通过上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2,z\geqslant0$ 的磁通量.

§3 高斯公式与斯托克斯公式

一 高斯公式

格林公式建立了沿封闭曲线的曲线积分与二重积分的关系，沿空间闭曲面的曲面积分和三重积分之间也有类似的关系，这就是本段所要讨论的高斯(Gauss)公式.

定理 22.3 设空间区域 V 由分片光滑的双侧封闭曲面 S 围成.若函数 P, Q,R 在 V 上连续，且有一阶连续偏导数，则

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y^{①},\qquad(1)$$

其中 S 取外侧.(1)式称为**高斯公式**.

证 下面只证

$$\iiint_V\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

读者可类似地证明

$$\iiint_V\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\iiint_V\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_S Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

这些结果相加便得到了高斯公式(1).

先设 V 是一个 xy 型区域，即其边界曲面 S 由曲面

---

① 若 S 为封闭曲面，则曲面积分的积分号用 $\oiint$ 表示.

$$S_2: z = z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy},$$

$$S_1: z = z_1(x, y), (x, y) \in D_{xy}$$

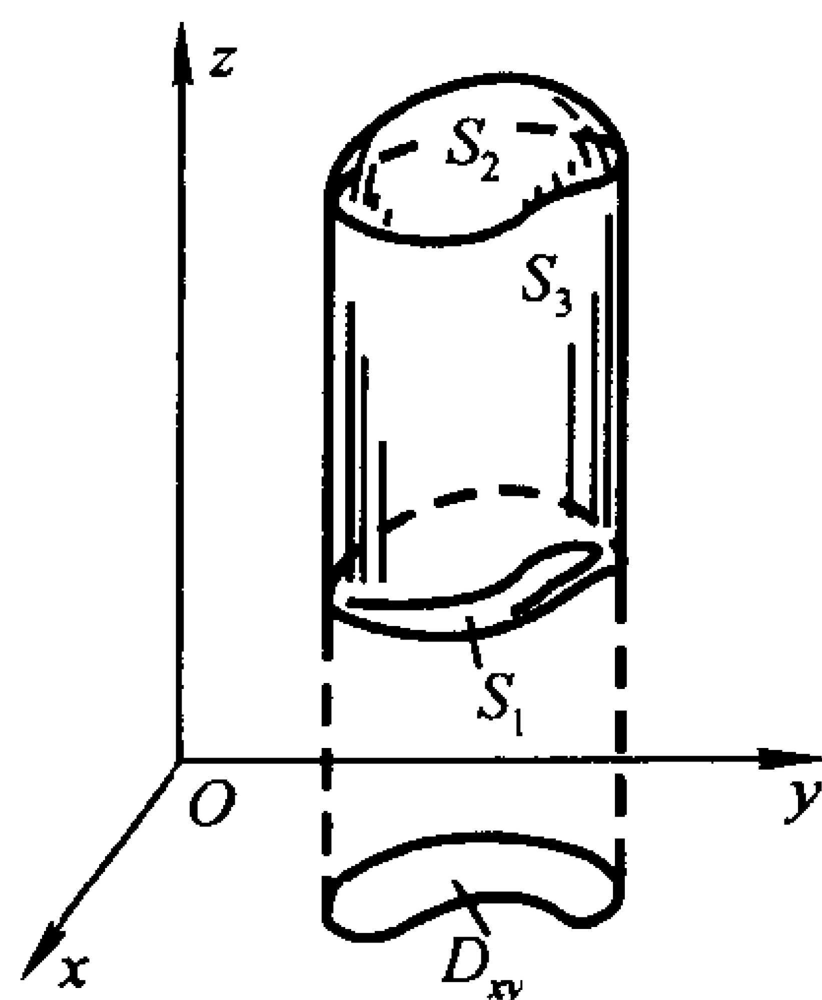


图 22-6

及以垂直于 D_{xy} 的边界的柱面 S_3 组成(图 22-6)，其中 $z_1(x,y) \leqslant z_2(x,y)$. 于是按三重积分的计算方法有

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}z \\
&= \iint\limits_{D_{xy}} (R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y)))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z_2(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z_1(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{S_2} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{S_1} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{S_2} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{-S_1} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

其中 S_1, S_2 都取上侧. 又由于 S_3 在 xy 平面上投影区域的面积为零,所以

$$\iint\limits_{S_3} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

因此

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint\limits_{S_2} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{-S_1} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{S_3} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \oiint\limits_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

对于不是 xy 型区域的情形,则用有限个光滑曲面将它分割成若干个 xy 型区域来讨论. 详细的推导与格林公式相似,这里不再细说了. □

高斯公式可用来简化某些曲面积分的计算.

例 1　计算

$$\oiint\limits_S y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (y^2 + xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 是边长为 a 的正立方体表面并取外侧(即上节习题 1(1)).

解　应用高斯公式,所求曲面积分等于

$$\iiint\limits_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(y(x-z)) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2) + \frac{\partial}{\partial z}(y^2 + xz)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_V (y+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^a \mathrm{d}z\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^a (y+x)\mathrm{d}x$$

$$= a\int_0^a \left(ay + \frac{1}{2}a^2\right)\mathrm{d}y = a^4. \qquad \square$$

若高斯公式中 $P=x, Q=y, R=z$,则有

$$\iiint\limits_V (1+1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是得到应用第二型曲面积分计算空间区域 V 的体积公式

$$\Delta V = \frac{1}{3}\oiint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

二 斯托克斯公式

斯托克斯(Stokes)公式是建立沿空间双侧曲面 S 的积分与沿 S 的边界曲线 L 的积分之间的联系.

在讲下述定理之前,先对双侧曲面 S 的侧与其边界曲线 L 的方向作如下规定:设有人站在 S 上指定的一侧,若沿 L 行走,指定的侧总在人的左方,则人前进的方向为边界线 L 的正向;若沿 L 行走,指定的侧总在人的右方,则人前进的方向为边界线 L 的负向,这个规定方法也称为**右手法则**,如图 22-7 所示.

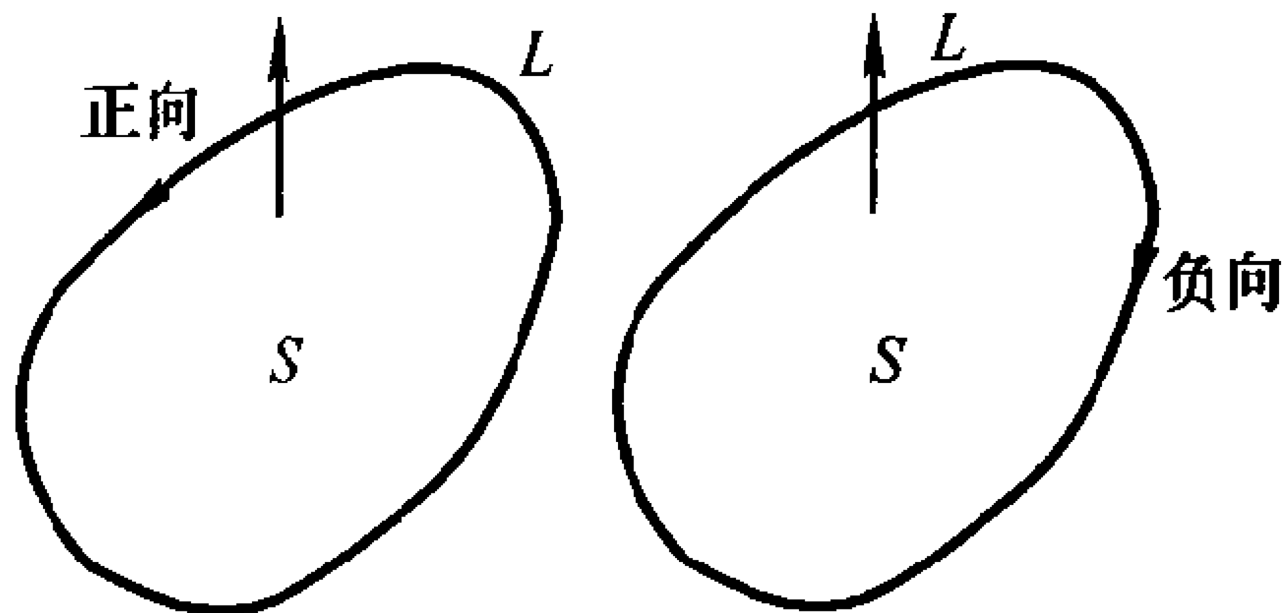


图 22-7

定理 22.4 设光滑曲面 S 的边界 L 是按段光滑的连续曲线.若函数 P、Q、R 在 S(连同 L)上连续,且有一阶连续偏导数,则

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z, \tag{2}$$

其中 S 的侧与 L 的方向按右手法则确定.

证 先证

$$\iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x, \tag{3}$$

其中曲面 S 由方程 $z=z(x,y)$ 确定,它的正侧法线方向数为 $(-z_x, -z_y, 1)$,方向余弦为 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$,所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

若 S 在 xy 平面上投影区域为 D_{xy},L 在 xy 平面上的投影曲线记为 Γ.现由

第二型曲线积分定义及格林公式有

$$\oint_L P(x,y,z)\mathrm{d}x = \oint_\Gamma P(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x$$
$$= -\iint_{D_{xy}} \frac{\partial}{\partial y}P(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y,z(x,y)) = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y},$$

所以

$$-\iint_{D_{xy}} \frac{\partial}{\partial y}P(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= -\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}$,从而

$$-\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= -\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\right)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\cos\gamma}$$
$$= -\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\right)\mathrm{d}S$$
$$= \iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

综合上述结果,便得所要证明的(3)式.

同样对于曲面 S 表示为$x=x(y,z)$和 $y=y(z,x)$时,可证得

$$\iint_S \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oint_L Q\mathrm{d}y \tag{4}$$

和

$$\iint_S \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \oint_L R\mathrm{d}z. \tag{5}$$

将(3)、(4)、(5)三式相加即得(2)式.

如果曲面 S 不能以$z=z(x,y)$的形式给出,则可用一些光滑曲线把 S 分割为若干小块,使每一小块能用这种形式来表示.因而这时(2)式也能成立. □

公式(2)称为**斯托克斯公式**.

为了便于记忆,斯托克斯公式也常写成如下形式:

$$\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

例 2　计算

$$\oint_L (2y+z)dx + (x-z)dy + (y-x)dz,$$

其中 L 为平面 $x+y+z=1$ 与各坐标面的交线,取逆时针方向为正向(图 22-8).

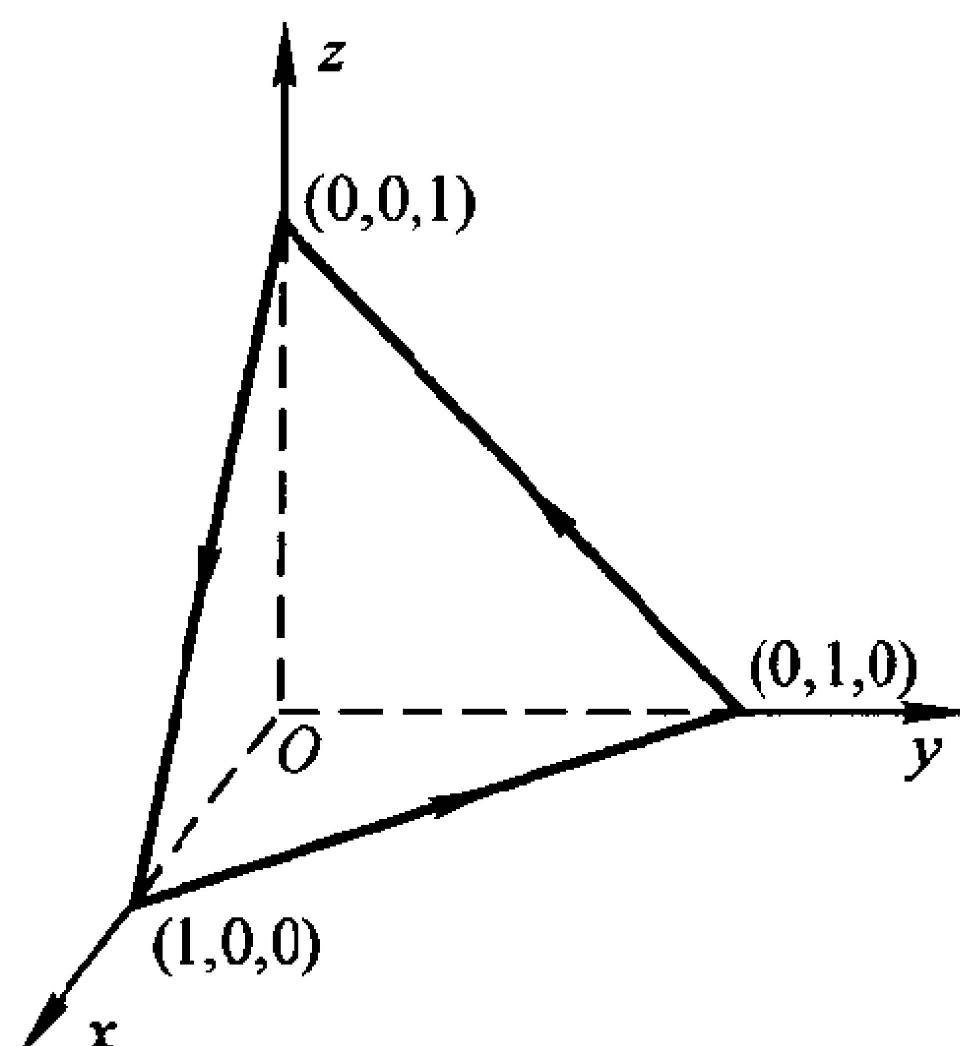


图 22-8

解　应用斯托克斯公式推得

$$\oint_L (2y+z)dx + (x-z)dy + (y-x)dz$$

$$= \iint_S (1+1)dydz + (1+1)dzdx + (1-2)dxdy$$

$$= \iint_S 2dydz + 2dzdx - dxdy$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$ □

由斯托克斯公式,可导出空间曲线积分与路线无关的条件.为此先介绍一下空间单连通区域的概念.

区域 V 称为**单连通区域**,如果 V 内任一封闭曲线皆可以不经过 V 以外的点而连续收缩于属于 V 的一点.如球体是单连通区域.非单连通区域称为**复连通区域**.如环状区域不是单连通区域,而是复连通区域.

与平面曲线积分相仿,空间曲线积分与路线的无关性也有下面相应的定理.

定理 22.5　设 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 为空间单连通区域.若函数 P,Q,R 在 Ω 上连续,且有一阶连续偏导数,则以下四个条件是等价的:

(i) 对于 Ω 内任一按段光滑的封闭曲线 L 有

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0;$$

(ii) 对于 Ω 内任一按段光滑的曲线 L,曲线积分

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

与路线无关;

(iii) $Pdx+Qdy+Rdz$ 是 Ω 内某一函数 u 的全微分,即

$$du = Pdx + Qdy + Rdz; \qquad (6)$$

(iv) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x},\ \dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y},\ \dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial z}$

在 Ω 内处处成立.

这个定理的证明与定理21.12相仿,这里不重复了.

例3　验证曲线积分

$$\int_L (y+z)\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z$$

与路线无关,并求被积表达式的原函数 $u(x,y,z)$.

解　由于

$$P=y+z,\quad Q=z+x,\quad R=x+y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}=1,$$

所以曲线积分与路线无关.

现在求

$$u(x,y,z)=\int_{M_0M}(y+z)\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z.$$

取M_0M如图22-9,从M_0沿平行于 x 轴的直线到 $M_1(x,y_0,z_0)$,再沿平行于 y 轴的直线到 $M_2(x,y,z_0)$,最后沿平行于 z 轴的直线到 $M(x,y,z)$.于是

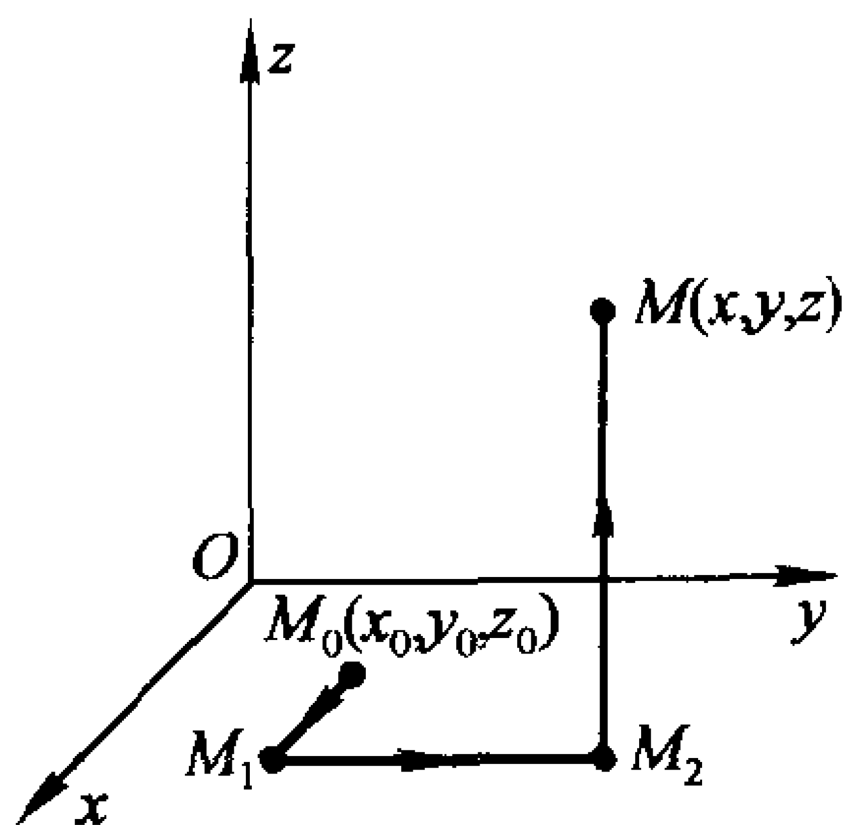


图22-9

$$\begin{aligned}u(x,y,z)&=\int_{x_0}^{x}(y_0+z_0)\mathrm{d}s+\int_{y_0}^{y}(z_0+x)\mathrm{d}t+\int_{z_0}^{z}(x+y)\mathrm{d}r\\&=(y_0+z_0)x-(y_0+z_0)x_0+(z_0+x)y-(z_0+x)y_0+(x+y)z-(x+y)z_0\\&=xy+xz+yz+c,\end{aligned}$$

其中 $c=-x_0y_0-x_0z_0-y_0z_0$ 是一个常数.若取 M_0 为原点,则得

$$u(x,y,z)=xy+xz+yz.$$

□

习　题

1. 应用高斯公式计算下列曲面积分:

(1) $\oint\!\!\!\oint_S yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧;

(2) $\oiint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 是立方体 $0 \leqslant x, y, z \leqslant a$ 表面的外侧;

(3) $\oiint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 是锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 与平面 $z = h$ 所围空间区域($0 \leqslant z \leqslant h$)的表面,方向取外侧;

(4) $\oiint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧;

(5) $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 是上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的外侧.

2. 应用高斯公式计算三重积分

$$\iiint\limits_V (xy + yz + zx)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V 是由 $x \geqslant 0, y \geqslant 0, 0 \leqslant z \leqslant 1$ 与 $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 所确定的空间区域.

3. 应用斯托克斯公式计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L (y^2 + z^2)\mathrm{d}x + (x^2 + z^2)\mathrm{d}y + (x^2 + y^2)\mathrm{d}z$,其中 L 为 $x + y + z = 1$ 与三坐标面的交线,它的走向使所围平面区域上侧在曲线的左侧;

(2) $\oint_L x^2y^3\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$,其中 L 为 $y^2 + z^2 = 1, x = y$ 所交的椭圆的正向;

(3) $\oint_L (z - y)\mathrm{d}x + (x - z)\mathrm{d}y + (y - x)\mathrm{d}z$,其中 L 为以 $A(a,0,0), B(0,a,0), C(0,0,a)$ 为顶点的三角形沿 $ABCA$ 的方向.

4. 求下列全微分的原函数:

(1) $yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$;

(2) $(x^2 - 2yz)\mathrm{d}x + (y^2 - 2xz)\mathrm{d}y + (z^2 - 2xy)\mathrm{d}z$.

5. 验证下列线积分与路线无关,并计算其值:

(1) $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y - z^3\mathrm{d}z$;

(2) $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \dfrac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,其中 (x_1, y_1, z_1),(x_2, y_2, z_2) 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 上.

---

6. 证明:由曲面 S 所包围的立体 V 的体积 ΔV 为

$$\Delta V = \frac{1}{3}\oiint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线方向余弦.

7. 证明:若 S 为封闭曲面,$\boldsymbol{l}$ 为任何固定方向,则

$$\oiint\limits_S \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l})\mathrm{d}S = 0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的外法线方向.

8. 证明公式

$$\iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r} = \frac{1}{2}\oiint\limits_S \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S,$$

其中 S 是包围 V 的曲面，$\boldsymbol{n}$ 是 S 的外法线方向，

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \boldsymbol{r} = (x,y,z).$$

9. 若 L 是平面 $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ 上的闭曲线，它所包围区域的面积为 S，求

$$\oint_L \begin{vmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

其中 L 依正向进行.

*§4 场论初步

一 场的概念

若对全空间或其中某一区域 V 中每一点 M，都有一个数量(或向量)与之对应，则称在 V 上给定了一个**数量场**(或**向量场**).

温度场和密度场都是数量场. 在空间中引进了直角坐标系后，空间中点 M 的位置可由坐标确定. 因此，给定了某个数量场就等于给定了一个数量函数 $u(x,y,z)$. 在以下讨论中，我们总是设 $u(x,y,z)$ 对每个变量都有连续偏导数. 若这些偏导数不同时等于零，则满足方程

$$u(x,y,z) = c\ (c\ \text{为常数})$$

的所有的点通常是一个曲面. 在这曲面上函数 u 都取同一值，因此常称它为**等值面**. 例如温度场中的等温面等.

向量场可以重力场或速度场为例. 当引进直角坐标系后，向量场就与向量函数 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 相对应. 设 $\boldsymbol{A}$ 在三个坐标轴上的投影分别为

$$P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z),$$

则

$$\boldsymbol{A}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)),$$

这里 P,Q,R 为所定义区域上的数量函数，并假定它们有连续偏导数.

设 L 为向量场中一条曲线. 若 L 上每点 M 处的切线方向都与向量函数 $\boldsymbol{A}$ 在该点的方向一致，即

$$\frac{\mathrm{d}x}{P} = \frac{\mathrm{d}y}{Q} = \frac{\mathrm{d}z}{R},$$

则称曲线 L 为向量场 $\boldsymbol{A}$ 的**向量场线**. 例如电力线、磁力线等都是向量场线.

需要注意，场的性质是它自己的属性，和坐标系的引进无关. 引入或选择某种坐标系是为了便于通过数学方法来研究它的性质. 下面所讨论的场的一些概

念虽然是在所选用的坐标系下建立的,但都可以证明它们和坐标系的选取无关.

二 梯度场

在第十七章§3中我们已经介绍了梯度的概念,它是由数量函数$u(x,y,z)$所定义的向量函数

$$\text{grad } u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

而且 grad u 的方向就是使$\frac{\partial u}{\partial l}$达到最大值的方向,它的大小就是 u 在这个方向上的方向导数.因此我们可以定义数量场 u 在点M处的梯度 grad u 为这样的向量,它的方向是在 M 处最大的方向导数的方向,而它的大小是在 M 处最大方向导数值.由于方向导数定义与坐标选取无关,因此梯度定义也是与坐标选取无关的向量.由梯度给出的向量场,称为**梯度场**.

又因为数量场 $u(x,y,z)$的等值面 $u(x,y,z)=c$ 的法线方向为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

所以 grad u 的方向与等值面正交,即等值面的法线方向.

引进符号向量

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

当把它作为运算符号来看待时①,梯度可写作

$$\text{grad } u=\nabla u.$$

关于梯度,有以下一些基本性质:

1. 若 u,v 是数量函数,则

$$\nabla(u+v)=\nabla u+\nabla v.$$

2. 若 u,v 是数量函数,则

$$\nabla(u\cdot v)=u(\nabla v)+(\nabla u)v.$$

特别地有

$$\nabla u^2=2u(\nabla u).$$

3. 若 $\boldsymbol{r}=(x,y,z),\varphi=\varphi(x,y,z)$,则

$$\mathrm{d}\varphi=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla\varphi.$$

4. 若 $f=f(u),u=u(x,y,z)$,则

$$\nabla f=f'(u)\nabla u.$$

5. 若 $f=f(u_1,u_2,\cdots,u_m),u_i=u_i(x,y,z)(i=1,2,\cdots,m)$,则

① ∇常称为哈密顿(Hamilton)算符,读作"Nabla".

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_i} \nabla u_i.$$

这些公式读者可利用定义来直接验证.

例 1 设质量为 m 的质点位于原点,质量为 1 的质点位于 $M(x,y,z)$,记 $OM = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,求$\frac{m}{r}$的梯度.

解
$$\nabla \frac{m}{r} = -\frac{m}{r^2}\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right).$$

若以 $\boldsymbol{r}_0$ 表示$\overrightarrow{OM}$上的单位向量,则有

$$\nabla \frac{m}{r} = -\frac{m}{r^2}\boldsymbol{r}_0.$$

它表示两质点间的引力,方向朝着原点,大小是与质量的乘积成比例,与两点间的距离的平方成反比.这说明了引力场是数量函数$\frac{m}{r}$的梯度场.因此我们常称$\frac{m}{r}$为**引力势**. □

三 散度场

设

$$\boldsymbol{A}(x,y,z) = (P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$$

为空间区域 V 上的向量函数,对 V 上每一点(x,y,z),定义数量函数

$$D(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

称它为向量函数 $\boldsymbol{A}$ 在(x,y,z)处的**散度**,记作

$$D(x,y,z) = \mathrm{div}\boldsymbol{A}(x,y,z)^{①}.$$

设 $\boldsymbol{n}_0 = (\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$为曲面的单位法向量,则 $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S$ 就称为曲面的**面积元素向量**.于是高斯公式可写成如下向量形式:

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\mathrm{d}V = \oiint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{1}$$

在 V 中任取一点 M_0,对(1)式中的三重积分应用中值定理,得

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V = \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(M^*)\cdot\Delta V = \oiint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

其中 M^* 为 V 中某一点,于是有

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(M^*) = \frac{\oiint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}.$$

---

① div 是 divergence(散度)一词的缩写.

令 V 收缩到点M_0(记成 $V\to M_0$),则 M^* 也趋向点 M_0,因此

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}(M_0)=\lim_{V\to M_0}\frac{\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}.\tag{2}$$

这个等式可以看作是散度的另一种定义形式.(2)式右边的分子、分母都与坐标系的选取无关,因此它的极限也与坐标系选取无关,所以散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ 与坐标系选取无关.由向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ 所构成的数量场,称为**散度场**.

散度的物理意义:联系本章§2 中提到当流速为 $\boldsymbol{A}$ 的不可压缩流体,经过封闭曲面 S 的流量是

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

于是(2)式表明 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}(M_0)$是流量对体积 V 的变化率,并称它为 $\boldsymbol{A}$ 在点M_0 的**流量密度**.若 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}(M_0)>0$,说明在每一单位时间内有一定数量的流体流出这一点,则称这一点为**源**.相反,若 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}(M_0)<0$,说明流体在这一点被吸收,则称这点为**汇**.若在向量场 $\boldsymbol{A}$ 中每一点皆有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**无源场**.

由前面引进的算符∇,向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度的向量形式是

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}.$$

关于散度,容易由定义直接推得以下一些基本性质:

1. 若 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 是向量函数,则

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\nabla\cdot\boldsymbol{u}+\nabla\cdot\boldsymbol{v}.$$

2. 若 φ 是数量函数,$\boldsymbol{F}$ 是向量函数,则

$$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{F})=\varphi\,\nabla\cdot\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}\cdot\nabla\varphi.$$

3. 若 $\varphi=\varphi(x,y,z)$是一数量函数,则

$$\nabla\cdot\nabla\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

算符∇的内积$\nabla\cdot\nabla$常记作 Δ①,于是有

$$\nabla\cdot\nabla\varphi=\Delta\varphi.$$

例2　求例 1中引力场 $\boldsymbol{F}=-\frac{m}{r}\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)$所产生的散度场.

解　因为 $r^2=x^2+y^2+z^2$,所以

$$\boldsymbol{F}=-\frac{m}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z),$$

① $\Delta=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$称为拉普拉斯算符.

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=-m\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\right]=0.$$

因此引力场 $\boldsymbol{F}$ 内每一点处的散度都为零(除原点处外). □

四 旋度场

设

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$$

为空间区域 V 上的向量函数. 对 V 上每一点 (x,y,z), 定义向量函数

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

称它为向量函数 $\boldsymbol{A}$ 在 (x,y,z) 处的**旋度**, 记作

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}^{①}.$$

设 $(\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)$ 是曲线 L 的正向上的单位切线向量 $\boldsymbol{t}_0$ 的方向余弦, 向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}=(\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)\mathrm{d}s=\boldsymbol{t}_0\mathrm{d}l$ 称为**弧长元素向量**. 于是斯托克斯公式可写成如下向量形式:

$$\iint_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}. \tag{3}$$

为了说明旋度与坐标系的选取无关, 我们在场 V 中任意取一点 M_0, 通过 M_0 作平面 π 垂直于曲面 S 的法向量 $\boldsymbol{n}_0$(图 22－10), 且在 π 上围绕 M_0 作任一封闭曲线 L, 记 L 所围区域为 D, 则由(3)式有

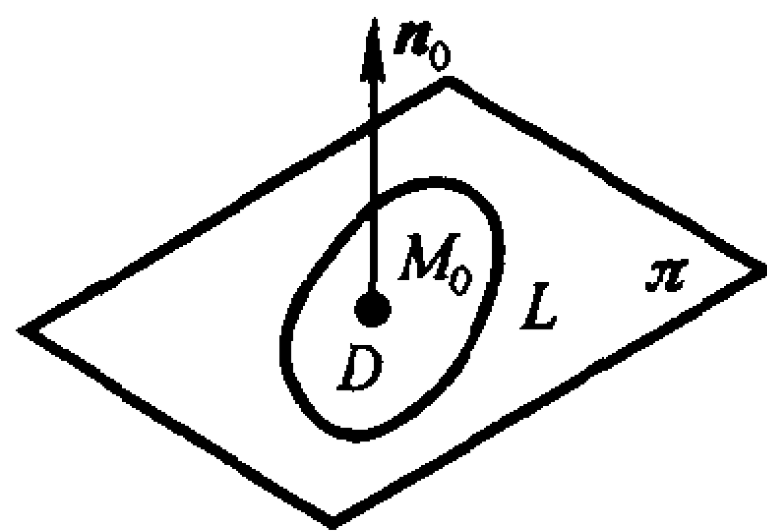


图 22－10

$$\iint_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S=\oint_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}. \tag{4}$$

对左端二重积分应用中值定理可得

$$\iint_D \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S=(\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_0)_{M^*}\mu(D)=\oint_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s},$$

其中 $\mu(D)$ 为区域 D 的面积, M^* 为 D 中的某一点. 因此

$$(\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_0)_{M^*}=\frac{\oint_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mu(D)}.$$

---

① rot 是 rotation(旋度)一词的缩写, 有的书也用 curl 表示旋度, 为便于记忆, rot$\boldsymbol{A}$ 可形式地写成

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}.$$

现让 D 收缩到点 M_0(记作 $D\to M_0$)时,于是 M^* 趋于 M_0,因此有

$$(\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_0)_{M_0}=\lim_{D\to M_0}\frac{\oint_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mu(D)}. \tag{5}$$

(5)式左边为 rot $\boldsymbol{A}$ 在法线方向上的投影,因此它也确定了 rot $\boldsymbol{A}$ 的本身,所以(5)也可以作为旋度的另一种定义形式.由于(5)式右边的极限与坐标系的选取无关,故 rot $\boldsymbol{A}$ 也与坐标系选取无关.

由向量函数 $\boldsymbol{A}$ 的旋度 rot $\boldsymbol{A}$ 所定义的向量场,称为**旋度场**.

在流量问题中,我们称

$$\oint_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

为沿闭曲线 L 的**环流量**,它表示流速为 $\boldsymbol{A}$ 的不可压缩流体,在单位时间内沿曲线 L 的流体总量,反映了流体沿 L 时的旋转强弱程度.当 rot $\boldsymbol{A}=0$ 时,沿任意封闭曲线的环流量为零,即流体流动时不成旋涡,这时称向量场 $\boldsymbol{A}$ 为**无旋场**.

公式(4)表明向量场在曲面边界线上的切线投影对弧长的曲线积分等于向量场的旋度的法线投影在曲面上对面积的曲面积分.它的物理意义可以说成是:流体的速度场的旋度的法线投影在曲面上对面积的曲面积分等于流体在曲面边界上的环流量.

为了更好地认识旋度的物理意义及这一名称的来源,我们讨论刚体绕定轴旋转的问题.设一刚体以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕某轴旋转,则角速度向量 $\boldsymbol{\omega}$ 方向沿着旋转轴,其指向与旋转方向的关系符合右手法则,即右手拇指指向角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向,其他四指指向旋转方向.若取定旋转轴上一点 O 作为原点(图 22-11),刚体上任意一点 P 的线速度 $\boldsymbol{v}$ 可表示为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r},$$

其中 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$ 是 P 的径向量.设 P 的坐标为 (x,y,z),便有 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$,又设 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$.于是

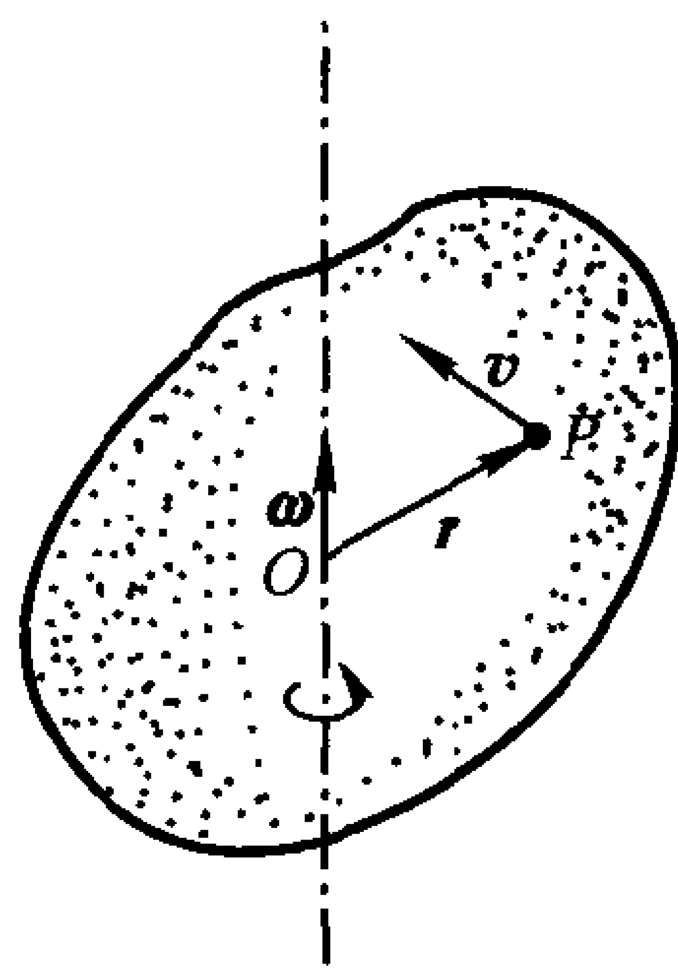


图 22-11

$$\boldsymbol{v}=(\omega_y z-\omega_z y,\omega_z x-\omega_x z,\omega_x y-\omega_y x),$$

所以

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v}=(2\omega_x,2\omega_y,2\omega_z)=2\boldsymbol{\omega}$$

或

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\mathrm{rot}\boldsymbol{v}.$$

这等式表明线速度向量 $\boldsymbol{v}$ 的旋度除去一个常数因子 $\frac{1}{2}$ 外,就是旋转的角速度向量 $\boldsymbol{\omega}$.可见 $\boldsymbol{v}$ 的旋度与 $\boldsymbol{\omega}$ 成正比,这也说明了旋度这个名称的来源.

应用算符 ∇ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的旋度是

$$\text{rot}\, \boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}.$$

旋度有如下一些基本性质：

1. 若 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 是向量函数，则

$$\nabla\times(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\nabla\times\boldsymbol{u}+\nabla\times\boldsymbol{v},$$

$$\nabla(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\cdot\nabla\times\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v},$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}-(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}.$$

2. 若 φ 是数量函数，$\boldsymbol{A}$ 是向量函数，则

$$\nabla\times(\varphi\boldsymbol{A})=\varphi(\nabla\times\boldsymbol{A})+\nabla\varphi\times\boldsymbol{A}.$$

3. 若 φ 是数量函数，$\boldsymbol{A}$ 是向量函数，则

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0,$$

$$\nabla\times\nabla\varphi=0,$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\Delta\boldsymbol{A}.$$

这些等式读者都可通过梯度、散度、旋度等定义来直接验证.

五　管量场与有势场

若一个向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度恒为零，即 $\text{div}\,\boldsymbol{A}=0$，我们曾称 $\boldsymbol{A}$ 为无源场. 从高斯公式知，此时沿任何封闭曲面的曲面积分都等于零. 我们把场 $\boldsymbol{A}$ 称作**管量场**. 这是因为，若在向量场 $\boldsymbol{A}$ 中作一向量管(图 22-12)，即由向量线围成的管状的曲面，用断面 S_1,S_2 截它，以 S_3 表示所截出的管的表面，我们就得到了由 S_1,S_2,S_3 所围成的封闭曲面 S. 于是由(1)式得出

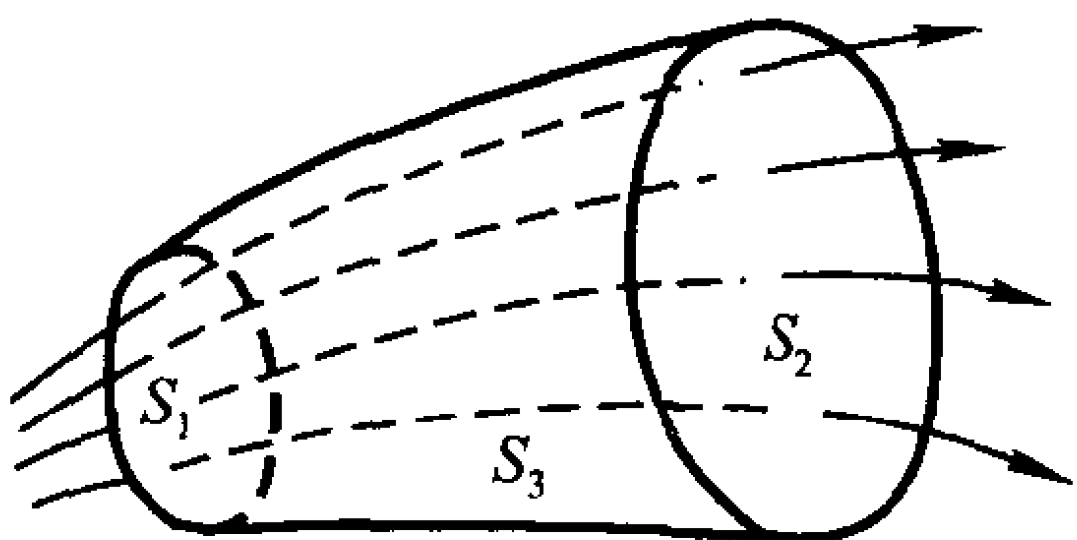


图 22-12

$$\oiint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{S_1\text{外侧}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}+\iint_{S_2\text{外侧}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}+\iint_{S_3\text{外侧}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=0.$$

而向量线与曲面 S_3 的法线正交，所以

$$\iint_{S_3\text{外侧}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=0,$$

即

$$\iint_{S_1\text{外侧}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}+\iint_{S_2\text{外侧}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=0,$$

$$\iint_{S_1\text{外侧}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{S_2\text{外侧}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

这等式说明了流体通过向量管的任意断面的流量是相同的，所以我们把场 $\boldsymbol{A}$ 称为**管量场**. 如例 2，由 $\frac{m}{r}$ 的梯度 $\nabla\frac{m}{r}$ 所成的引力场 $\boldsymbol{F}$ 是一个管量场.

若一个向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度恒为零，即 $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}=0$，我们在前面称 $\boldsymbol{A}$ 为无旋场．从斯托克斯公式知，这时在空间单连通区域内沿任何封闭曲线的曲线积分都等于零，这种场也称为**有势场**．这是因为当 $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}=0$ 时，由定理 22.5 推得此时空间曲线积分与路线无关，且存在某函数 $u(x,y,z)$，使得

$$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z,$$

即

$$\mathrm{grad}\ u = (P,Q,R).$$

通常称 u 为**势函数**．因此，若某向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度为零，则必存在某个势函数 u，使得 $\mathrm{grad}\ u=\boldsymbol{A}$．这也是一个向量场是某个数量场的梯度场的充要条件．在例 1 中，引力势 $u=\frac{m}{r}$ 就是势函数．所以

$$\nabla u = \boldsymbol{F} = -\frac{m}{r^2}\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right).$$

因为 $\nabla\times\nabla u=0$ 恒成立，所以 $\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$．它也是引力场 $\boldsymbol{F}$ 是有势场的充要条件．

若一个向量场 $\boldsymbol{A}$ 既是管量场，又是有势场，则称这个向量场为**调和场**．上述例 2 中讲到的引力场 $\boldsymbol{F}$ 就是调和场．若 $\boldsymbol{A}$ 是一个调和场，必有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0,\qquad \nabla u=\boldsymbol{A}.$$

显然

$$\nabla\cdot\nabla u = \nabla^2 u = \Delta u = 0,$$

即必有势函数 u 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

这时称函数 u 为**调和函数**．

习　题

1．若 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，计算 $\nabla r,\nabla r^2,\nabla\frac{1}{r},\nabla f(r),\nabla r^n(n\geqslant 3)$．

2．求 $u=x^2+2y^2+3z^2+2xy-4x+2y-4z$ 在点 $O(0,0,0),A(1,1,1),B(-1,-1,-1)$ 处的梯度，并求梯度为零之点．

3．证明本节第二段关于梯度的一些基本性质 1～5．

4．计算下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度与旋度：

(1) $\boldsymbol{A}=(y^2+z^2,z^2+x^2,x^2+y^2)$；(2) $\boldsymbol{A}=(x^2yz,xy^2z,xyz^2)$；

(3) $\boldsymbol{A}=\left(\frac{x}{yz},\frac{y}{zx},\frac{z}{xy}\right)$．

5．证明本节第三段关于散度的一些基本性质 1～3．

6. 证明本节第四段关于旋度的一些基本性质 1～3(可应用算符∇推演).

7. 证明：场 $\boldsymbol{A}=(yz(2x+y+z),xz(x+2y+z),xy(x+y+2z))$是有势场并求其势函数.

8. 若流体流速 $\boldsymbol{A}=(x^2,y^2,z^2)$,求单位时间内穿过$\frac{1}{8}$球面 $x^2+y^2+z^2=1,x>0,y>0,z>0$ 的流量.

9. 设流速 $\boldsymbol{A}=(-y,x,c)$(c 为常数),求环流量：

(1) 沿圆周 $x^2+y^2=1,z=0$; (2) 沿圆周$(x-2)^2+y^2=1,z=0$.

总 练 习 题

1. 设 $P=x^2+5\lambda y+3yz,Q=5x+3\lambda xz-2,R=(\lambda+2)xy-4z$.

(1) 计算$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$,其中 L 为螺旋线$x=a\cos t,y=a\sin t,z=ct(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(2) 设 $\boldsymbol{A}=(P,Q,R)$,求 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$;

(3) 问在什么条件下 $\boldsymbol{A}$ 为有势场?并求势函数.

2. 证明：若 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$,$S$ 为包围区域 V 的曲面的外侧,则

(1) $\iiint\limits_V \Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S$;

(2) $\oiint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint\limits_V \nabla\cdot\nabla u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_V u\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

其中 u 在区域 V 及其界面 S 上有二阶连续偏导数,$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿曲面 S 外法线方向的方向导数.

3. 设 S 为光滑闭曲面,V 为 S 所围的区域.函数 $u(x,y,z)$ 在 V 与 S 上具有二阶连续偏导数,函数 $\omega(x,y,z)$ 偏导连续.证明：

(1) $\iiint\limits_V \omega\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_S u\omega\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iiint\limits_V u\frac{\partial\omega}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;

(2) $\iiint\limits_V \omega\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_S \omega\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint\limits_V \Delta u\cdot\Delta\omega\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$,$S$ 为一封闭曲面,$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$.证明当原点在曲面 S 的外、上、内时,分别有

$$\oiint\limits_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0、2\pi、4\pi.$$

5. 计算 $I=\iint\limits_S xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yx\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 是柱面$x^2+y^2=1$ 在 $-1\leqslant z\leqslant 1$ 和 $x\geqslant 0$ 的部分.曲面侧的法向与 x 轴正向成锐角.

6. 证明公式：

$$\iint\limits_D f(m\sin\varphi\cos\theta+n\sin\varphi\sin\theta+p\cos\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{m^2+n^2+p^2})\mathrm{d}u,$$

这里 $D=\{(\theta,\varphi)|0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}$, $m^2+n^2+p^2>0$, $f(t)$在$|t|<\sqrt{m^2+n^2+p^2}$时为连续函数.

*第二十三章　流形上微积分学初阶[①]

§1　n 维欧氏空间与向量函数

在第十六至第十八章中所讨论的函数,是二维(或 n 维)空间中的点集到实数集的映射,由于函数值取实数,故称之为实值函数,在本章中所要讨论的函数,则是 n 维欧氏空间中的点集到 m 维欧氏空间点集的映射,这时函数值已不再是实数,而是 m 维空间中的一个向量,故称之为向量函数.作为准备,我们先择要地介绍一下 n 维欧氏空间概念.

一　n 维欧氏空间

所有 n 个有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体称为 n **维向量空间**,或简称 n **维空间**,其中每个有序实数组称为 n 维空间中的一个**向量**(或一个**点**),记作

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.\tag{1}$$

我们约定向量总是指列向量(如(1)式);记号 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 表示向量 $\boldsymbol{x}$ 的转置,因此 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 是一个行向量.向量 $\boldsymbol{x}$ 中的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是这个向量(或点)的 n 个**分量**(或**坐标**).

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 是 n 维空间中的任意两个向量,α 为任意实数,则向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 之和为

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)^{\mathrm{T}}.$$

数量 α 与向量 $\boldsymbol{x}$ 的**数乘积**为

$$\alpha\boldsymbol{x}=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n)^{\mathrm{T}}.$$

向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积定义为

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.$$

内积具有如下性质:

---

① 本章供选学用.

1° $x^{\mathrm{T}}x \geqslant 0$,当且仅当 $x=0$时,$x^{\mathrm{T}}x=0$;

2° $x^{\mathrm{T}}y=y^{\mathrm{T}}x$;

3° $\alpha(x^{\mathrm{T}}y)=(\alpha x)^{\mathrm{T}}y=x^{\mathrm{T}}(\alpha y)$,$\alpha$ 为实数;

4° $(x+y)^{\mathrm{T}}z=x^{\mathrm{T}}z+y^{\mathrm{T}}z$.

定义了内积的 n 维空间叫做 n **维欧几里得**(Euclid)**空间**(简称 n **维欧氏空间**),记作 $\mathbf{R}^n$.

利用内积定义向量 $x \in \mathbf{R}^n$ 的**模**为

$$\| x \| = (x^{\mathrm{T}}x)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}. \tag{2}$$

向量模具有如下性质:

1° $\| x \| \geqslant 0$,当且仅当 $x=0$时,$\| x \|=0$;

2° $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$,$\alpha$ 为实数;

3° $\| x+y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$(三角形不等式);

4° $\| x^{\mathrm{T}}y \| \leqslant \| x \| \; \| y \|$ (柯西—施瓦茨不等式).

$\mathbf{R}^n$ 中任意两点 x 与 y 的**距离**定义为

$$\rho(x,y) = \| x-y \| = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2}. \tag{3}$$

这样定义的距离显然具有与模相仿的性质,如:

$$\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y)+\rho(y,z) \qquad (三角形不等式).$$

下面是 $\mathbf{R}^n$ 中点集的例子,读者不难从二维或三维空间的相应例子去理解它.

点集 $\{x \mid \| x \| = r\} \subset \mathbf{R}^n$ 表示以 O 为中心,r 为半径的 n 维球面.

点集 $\{x \mid \| x-a \| < \delta\} \subset \mathbf{R}^n$ 表示以点 a 为中心,半径为 δ 的 n 维球形邻域;$\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid |x_i-a_i|<\delta, i=1,2,\cdots,n\}$ 则是 n 维方形邻域.我们仍用 $U(a;\delta)$ 来记点 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 的上述这两类邻域,而 $U^{\circ}(a;\delta)$ 则表示相应的**空心邻域**.

点集 $\{x \mid c^{\mathrm{T}}x=d, c \neq 0\} \subset \mathbf{R}^n$.当 $n=2$ 时,它就是平面上的一条直线;当 $n=3$ 时,它就是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个平面;当 $n>3$ 时,称它为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个**超平面**.

向量方程 $x=\varphi(t)$ 的各个分量式即为如下方程组:

$$x_i = \varphi_i(t), i=1,2,\cdots,n, \; t \in [\alpha,\beta]. \tag{4}$$

设 φ_i 为 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数($i=1,2,\cdots,n$).当 $n=2$ 时,它是 $\mathbf{R}^2$ 中的一条连续曲线;当 $n=3$ 时,它是 $\mathbf{R}^3$ 中的一条连续曲线;当 $n>3$ 时,仍称它是 $\mathbf{R}^n$ 中的连续曲线.特别当(4)式是

$$\varphi_i(t) = a_i t + b_i, \; i=1,2,\cdots,n, t \in (-\infty,+\infty)$$

(a_i,b_i 为常数,a_i 不同时为零)时,它表示 $\mathbf{R}^n$ 中的一条直线,其向量形式是

$$x = at + b, (a \neq 0), t \in (-\infty, +\infty),$$

其中 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}, b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$.

过已知两点 x', x'' 的直线方程是

$$x = (x'' - x')t + x', \qquad t \in (-\infty, +\infty).$$

当 $t \in [0,1]$ 时,上式表示联结 x', x'' 两点的直线段. $\mathbf{R}^n$ 中的折线,由首尾衔接的直线段所组成.

由于在 $\mathbf{R}^n$ 中定义了距离、邻域、直线与折线等概念,读者可以把平面点集中有关内点、界点、聚点、开集、闭集、凸集、区域、直径等概念推广到 $\mathbf{R}^n$ 中来. 并通过定义 $\mathbf{R}^n$ 中的收敛点列 $\{P_k\}$,导出相当于定理 16.1 的完备性定理.

定理 23.1 设 $\{P_k\} \subset \mathbf{R}^n$,则 $\{P_k\}$ 为收敛点列的充要条件是:任给 $\varepsilon > 0$,存在 $K > 0$,当 $k > K$ 时,对一切正整数 q 都有

$$\rho(P_k, P_{k+q}) < \varepsilon. \tag{5}$$

(证明从略.)

二 向量函数

这里我们采用集合来定义函数,它与以往的定义方式具有相同的含义.

定义 1 若 $X \subset \mathbf{R}^n$, $Y \subset \mathbf{R}^m$, f 是 $X \times Y$①的一个子集,对每一个 $x \in X$,都有惟一的一个 $y \in Y$,使 $(x, y) \in f$,则称 f 为 X 到 Y 的**向量函数**(也简称**函数**或称**映射**),记作

$$f: X \to Y,$$
$$x \mapsto y,$$

或简单地记作 $f: X \to Y$,其中 X 称为函数 f 的**定义域**.

易见,当 $n = 2$(或 $n = 3$), $m = 1$ 时,由定义 1 所确定的函数就是我们原来所熟悉的二元(或三元)实值函数.

在映射的意义下, $x \in X$ 在 f 下的象为 $y = f(x) \in Y$, X 在 f 下的象集为 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$, x 称为 $f(x)$ 的**原象**.

设 $f: X \to Y$,若对任何 $x', x'' \in X$,只要 $x' \neq x''$ 就有 $f(x') \neq f(x'')$,则称 f 为 X 到 Y 的**一一映射**(或称为**单射**).

其实,在解析几何和本课程以前的一些章节里,我们就曾遇到过不少向量函数. 例如:平面(或空间)曲线的参数方程就可看作 $n = 1, m = 2$(或 $m = 3$)的向量函数;曲面的参数方程是 $n = 2, m = 3$ 的向量函数. 又如可微的三元实值函数 $u = u(x, y, z)$ 的梯度 $\mathrm{grad}\, u = (u_x, u_y, u_z)$ 就是一个 $n = m = 3$ 的向量函数. 今后我们还能看到其他的一些例子. 一般地,当 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 为 f 的**分量函数**(或坐标函数)时,可写作

---

① $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\} \subset \mathbf{R}^{n+m}$ 称为 X 与 Y 的**直积**.

$$f(x)=\begin{bmatrix}f_1(x)\\ \vdots \\ f_m(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(x_1,\cdots,x_n)\\ \vdots \\ f_m(x_1,\cdots,x_n)\end{bmatrix} \quad 或 \quad f=\begin{bmatrix}f_1\\ \vdots \\ f_m\end{bmatrix}.$$

于是,两个相同维数的向量函数 f 与 g 在相同的定义域上的和(差)函数为

$$f\pm g=\begin{bmatrix}f_1\pm g_1\\ \vdots \\ f_m\pm g_m\end{bmatrix}. \tag{6}$$

一个实值函数 α 与一个向量函数 f 在相同的定义域上的乘积函数是

$$\alpha f=\begin{bmatrix}\alpha f_1\\ \vdots \\ \alpha f_m\end{bmatrix}. \tag{7}$$

两个向量函数 f 与 h 的复合函数是

$$h\circ f:\ X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{h}Z,(X\subset\mathbf{R}^n,f(X)\subset Y\subset\mathbf{R}^m,Z\subset\mathbf{R}^r)$$

或

$$h\circ f=\begin{bmatrix}h_1\circ f\\ \vdots \\ h_r\circ f\end{bmatrix}, \tag{8}$$

其中 $(h_i\circ f)(x)=h_i(f_1(x),\cdots,f_m(x)),x\in X$.

三 向量函数的极限与连续

定义 2 设 $D\subset X\subset\mathbf{R}^n$,$a$ 是 D 的聚点,f: $X\to\mathbf{R}^m$.若存在 $l\in\mathbf{R}^m$,对于 l 的任意小的邻域 $U(l;\varepsilon)\subset\mathbf{R}^m$,总有 a 的空心邻域 $U^\circ(a;\delta)\subset\mathbf{R}^n$,$f(U^\circ(a;\delta)\cap D)\subset U(l;\varepsilon)$,则称在集合 D 上当 $x\to a$ 时,f 以 l 为极限,记作

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}}f(x)=l.$$

在不致混淆的情况下,或 $D=X$ 时,简称 $x\to a$ 时 f 以 l 为极限,并记作

$$\lim_{x\to a}f(x)=l.$$

定义 2 的几何描述如图 23-1 所示,而且易知 $\lim\limits_{a\to a}f(x)=l$ 与以下任何一种说法是等价的:

(i) $\lim\limits_{\|x-a\|\to 0}\|f(x)-l\|=0$; (9)

(ii) 设 $a=(a_1,\cdots,a_n)$,$l=(l_1,\cdots,l_m)$,则

$$\lim_{x\to a}f_i(x)=\lim_{(x_1,\cdots,x_n)\to(a_1,\cdots,a_n)}f_i(x_1,\cdots,x_n)=l_i,\quad i=1,2,\cdots,m. \tag{10}$$

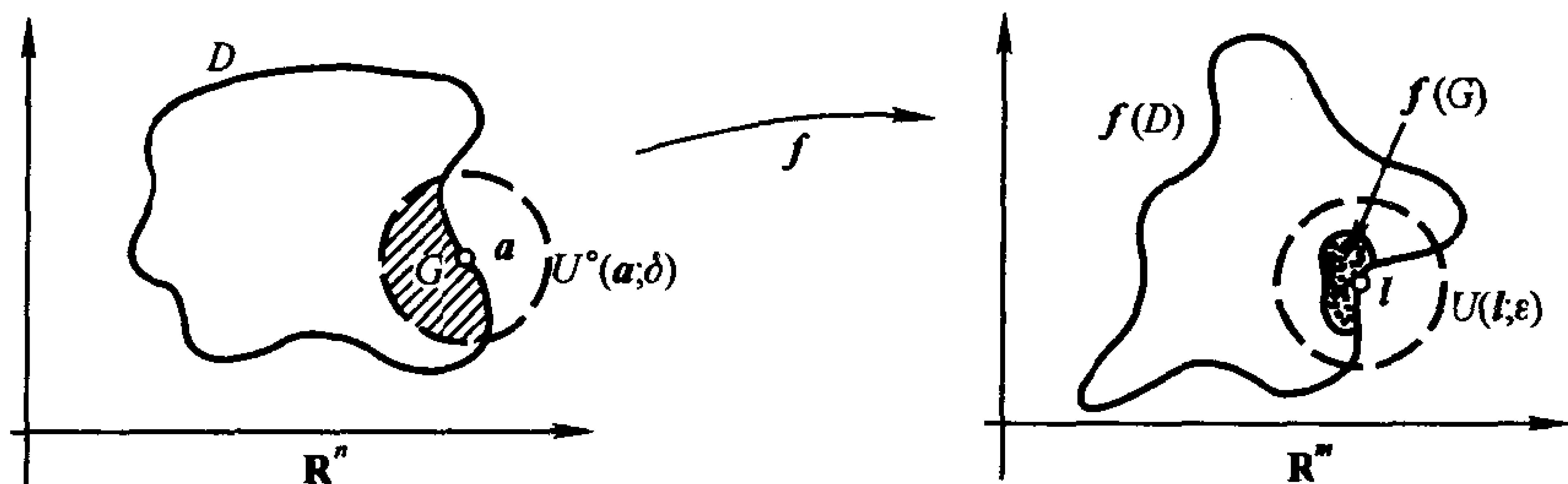


图 23-1

定义3 设 $D\subset X\subset \mathbf{R}^n$，$a\in D$，$f:X\to\mathbf{R}^m$. 若对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 $f(U(a;\delta)\cap D)\subset U(f(a);\varepsilon)$，则称 f 在点 a（关于集合 D）**连续**.

如果 f 在 D 上每一点都连续，则称 f 为 D 上的**连续函数**.

和多元实值函数一样，如果 a 是 D 的孤立点，则按定义 3，f 在点 a 恒连续；如果 a 是 D 的聚点，则定义 3 等价于

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f(x)=f(a) \quad 或 \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f_i(x)=f_i(a),$$

$$i=1,2,\cdots,m.$$

后者表示 f 的所有坐标函数在点 a（关于 D）连续. 正由于此，以往关于实值连续函数的那些运算性质大部分都可推广到向量函数中来.

定理 23.2 设 $f,g:X\to Y(X\subset\mathbf{R}^n, Y\subset\mathbf{R}^m)$；$h:Y\to Z\subset\mathbf{R}^r$；$\alpha:X\to\mathbf{R}$；$a\in X$，$b=f(a)\in Y$. 若 f,g,α 在点 a 连续，h 在点 b 连续，则按(6)、(7)、(8)所定义的向量函数 $f\pm g$，αf，$h\circ f$ 都在点 a 连续.

（证明从略.）

定理 23.3 函数 $f:X\to\mathbf{R}^m$ 在点 $a\in X\subset\mathbf{R}^n$ 连续的充要条件为：任何点列 $\{P_k\}\subset X$ 收敛于 a 时，$\{f(P_k)\}\subset\mathbf{R}^m$ 都收敛于 $f(a)$.

证 ［充分性］ 倘若 f 在点 a 不连续，由(9)则存在 $\varepsilon_0>0$，对每一 $\delta=\dfrac{1}{k}$，$k=1,2,\cdots$ 总能取得 $P_k\in X$，使得 $\|P_k-a\|<\dfrac{1}{k}$，且

$$\|f(P_k)-f(a)\|\geqslant\varepsilon_0,\quad k=1,2,\cdots. \tag{11}$$

显然，这里的 $\{P_k\}$ 收敛于 a. 根据条件，$\{f(P_k)\}$ 应该收敛于 $f(a)$，这与不等式(11)相矛盾. 所以 f 在点 a 必须连续.

［必要性］ 任给 $\varepsilon>0$，由于 f 在点 a 连续，因此存在 $\delta>0$，使得 $\|x-a\|<\delta$ 且 $x\in X$ 时，总有 $\|f(x)-f(a)\|<\varepsilon$. 又因对任何收敛于 a 的点列 $\{P_k\}\subset X$，存在 $K>0$，当 $k>K$ 时，满足 $\|P_k-a\|<\delta$，因而也有 $\|f(P_k)-f(a)\|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{k\to\infty}f(P_k)=f(a)$. □

在有界闭域（或有界闭集）上实值连续函数的那些整体性质同样可推广到向

量函数的情形,只是原来与函数值有关的判断必须改为适合于向量函数的形式.

定理 23.4　若 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是有界闭集,$\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$ 是 D 上的连续函数,则 $\boldsymbol{f}(D)\subset\mathbf{R}^m$ 也是有界闭集.

证　如果 D 是有限点集,则 $\boldsymbol{f}(D)$ 也是有限的,命题显然成立. 所以下面不妨假设 D 和 $\boldsymbol{f}(D)$ 都是无限点集.

(i) 先证 $\boldsymbol{f}(D)$ 的有界性. 倘若 $\boldsymbol{f}(D)$ 无界,则存在点列 $\{\boldsymbol{P}_k\}\subset D$,使 $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{P}_k)\|>k$,$k=1,2,\cdots$. 由于 D 是有界闭集,因此存在 $\{\boldsymbol{P}_{k_j}\}\subset\{\boldsymbol{P}_k\}$ 使 $\lim\limits_{j\to\infty}\boldsymbol{P}_{k_j}=\boldsymbol{P}_0\in D$. 由 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{P}_0$ 连续,故 $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|$ 在点 $\boldsymbol{P}_0$ 局部有界. 这与 $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{P}_{k_j})\|\geqslant k_j>j$,$j=1,2,\cdots$ 相矛盾.

(ii) 再证 $\boldsymbol{f}(D)$ 的闭性,即若 $\boldsymbol{Q}_0$ 是 $\boldsymbol{f}(D)$ 的任一聚点,欲证 $\boldsymbol{Q}_0\in\boldsymbol{f}(D)$. 设 $\boldsymbol{Q}_k\in\boldsymbol{f}(D)$,$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{Q}_k=\boldsymbol{Q}_0$,且 $\boldsymbol{P}_k\in D$,$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{P}_k)=\boldsymbol{Q}_k$. 则存在收敛子列 $\{\boldsymbol{P}_{k_j}\}\subset\{\boldsymbol{P}_k\}$,$\lim\limits_{j\to\infty}\boldsymbol{P}_{k_j}=\boldsymbol{P}_0\in D$,且由于 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{P}_0$ 连续,从而有

$$\boldsymbol{Q}_0=\lim_{j\to\infty}\boldsymbol{Q}_{k_j}=\lim_{j\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{P}_{k_j})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{P}_0)\in\boldsymbol{f}(D).$$

□

定理 23.5　若 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是有界闭集,$\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$ 是 D 上的连续函数,则 $\boldsymbol{f}(D)$ 的直径可达,即存在 $\boldsymbol{P}',\boldsymbol{P}''\in D$,使得

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{P}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{P}'')\|=\max_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in D}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')\|.\tag{12}$$

证　易见函数

$$F(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'')=\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')\|$$

是定义在有界闭集 $D\times D$ 上的连续实值函数. 由连续函数性质(定理 16.8),存在 $(\boldsymbol{P}',\boldsymbol{P}'')\in D\times D$ 使得

$$F(\boldsymbol{P}',\boldsymbol{P}'')=\max_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in D}F(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'').$$

这就是(12)式的结论. □

定理 23.6　若 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是有界闭集,$\boldsymbol{f}$ 是 D 上的连续函数,则 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上一致连续. 即任给 $\varepsilon>0$,存在只依赖于 ε 的 $\delta>0$,只要 $\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in D$ 且 $\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''\|<\delta$,就有

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')\|<\varepsilon.$$

读者可作为练习自行证明本定理.

定理 23.7　若 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是道路连通集①,$\boldsymbol{f}$ 是 D 上的连续函数,则 $\boldsymbol{f}(D)\subset\mathbf{R}^m$ 也是道路连通集.

证　任给 $\boldsymbol{Q}',\boldsymbol{Q}''\in\boldsymbol{f}(D)$,必有 $\boldsymbol{P}',\boldsymbol{P}''\in D$,使得 $\boldsymbol{Q}'=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{P}')$,$\boldsymbol{Q}''=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{P}'')$. 因为 D 是道路连通的,所以存在连续曲线

① 这是指 D 中任意两点之间,能用一条完全含于 D 的连续曲线相连接.

$$x = \varphi(t) \subset D, t \in [0,1], 且\ \varphi(0) = P', \varphi(1) = P''.$$

从而 $f \circ \varphi: [0,1] \to \mathbf{R}^m$ 是连续的，而且满足

$$f(\varphi(t)) \subset f(D), t \in [0,1]; \ f(\varphi(0)) = Q', f(\varphi(1)) = Q''.$$

这表明 $f(D)$ 也是道路连通的． □

习　　题

1. 设 $x, y \in \mathbf{R}^n$，证明

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2).$$

2. 设 $E \subset \mathbf{R}^n$，点 $x \in \mathbf{R}^n$ 到集合 E 的距离定义为

$$\rho(x, E) = \inf_{y \in E} \rho(x, y).$$

证明：(1)若 E 是闭集，$x \overline{\in} E$，则 $\rho(x, E) > 0$；

(2) 若 $\bar{E}$ 是 E 连同其全体聚点所组成的集合(称为 E 的闭包)，则 $\bar{E} = \{x \mid \rho(x, E) = 0\}$

3. 设 $X \subset \mathbf{R}^n$, $Y \subset \mathbf{R}^m$, $f: X \to Y$；A, B 是 X 的任意子集．证明：

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$；

(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$；

(3) 若 f 是一一映射，则 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$．

4. 设 $f, g: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $a \in \mathbf{R}^n$, $b, c \in \mathbf{R}^m$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$，证明：

(1) $\lim\limits_{x \to a} \| f(x) \| = \| b \|$，且当 $b = \mathbf{0}$时可逆；

(2) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)^{\mathrm{T}} g(x)] = b^{\mathrm{T}} c$．

5. 设 $D \subset \mathbf{R}^n$, $f: D \to \mathbf{R}^m$．若存在正实数 k, r 对任何点 $x, y \in D$ 满足

$$\| f(x) - f(y) \| \leqslant k \| x - y \|^r,$$

试证明 f 是 D 上的连续函数．

---

6. 设 $x, y \in \mathbf{R}^n$，证明下列各式：

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n} | x_i | \leqslant \sqrt{n} \| x \|$；　　(2) $\| x + y \| \ \| x - y \| \leqslant \| x \|^2 + \| y \|^2$；

(3) $| \| x \| - \| y \| | \leqslant \| x - y \|$，

并讨论各不等式中等号成立的条件和解释 $n = 2$ 时的几何意义．

7. (1)证明定理 23.6；

(2) 设 $D \subset \mathbf{R}^n$，试问向量函数 $f: D \to \mathbf{R}^m$ 在 D 上一致连续，是否等价于 f 的所有坐标函数 $f_i, i = 1, 2, \cdots, m$ 都在 D 上一致连续？为什么？

8. 设 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 为连续函数，$A \subset \mathbf{R}^n$ 为任意开集，$B \subset \mathbf{R}^n$ 为任意闭集．试问 $f(A)$是否必为开集？$f(B)$是否必为闭集？

§2 向量函数的微分

一 可微性与可微条件

无论是一元函数还是多元函数的可微性，都是建立在局部线性近似基础上

的.例如,一元函数 f 在 x_0 可微,按其定义是指存在实数 a,使得 $x\in U(x_0)$ 时,有

$$f(x)-f(x_0)=a(x-x_0)+o(x-x_0),\tag{1}$$

或者写成

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-a(x-x_0)}{x-x_0}=0.\tag{1$'$}$$

而且进一步知道 $a=f'(x_0)$,并把 $a(x-x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ 称为 f 在 x_0 的微分.

同样地,二元实值函数 f 在 $\boldsymbol{P}_0(x_0,y_0)$ 可微,是指存在二维向量 $\boldsymbol{c}=(\alpha,\beta)^{\mathrm{T}}$,使得 $\boldsymbol{P}(x,y)\in U(\boldsymbol{P}_0)\subset\mathbf{R}^2$ 时,有

$$f(\boldsymbol{P})-f(\boldsymbol{P}_0)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)+o(\|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0\|),\tag{2}$$

或者写成

$$\lim_{\boldsymbol{P}\to\boldsymbol{P}_0}\frac{f(\boldsymbol{P})-f(\boldsymbol{P}_0)-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)}{\|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0\|}=0.\tag{2$'$}$$

而且进一步知道 $\boldsymbol{c}=(f_x(\boldsymbol{P}_0),f_y(\boldsymbol{P}_0))^{\mathrm{T}}$,并把

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

称为 f 在 $\boldsymbol{P}_0$ 的微分.

在(1)或(1)$'$中的 $a(x-x_0)$ 与(2)或(2)$'$中的 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)$ 具有相同的形式与内涵,因而我们也把向量 $\boldsymbol{c}$ 称做二元函数 f 在 $\boldsymbol{P}_0$ 处的"导数"(以前叫梯度),并记作 $f'(\boldsymbol{P}_0)$.尤其是把 $a(x-x_0)$ 和 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)$ 作为线性变换来认识时,我们能很自然地建立起一般向量函数的可微性概念.

定义4 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为开集,$\boldsymbol{x}_0\in D$,$\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$.如果存在某个线性变换 A (只依赖于 $\boldsymbol{x}_0$),使得 $\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0)\subset D$ 时,有

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|)\tag{3}$$

或

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}=0,\tag{3$'$}$$

则称向量函数 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ **可微**(**或可导**).若与上述线性变换 A 相连系的矩阵为 $\boldsymbol{A}(m\times n)$,则称 $A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$ 为 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的微分,并称 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的**导数**,记作 $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ 或 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$.因而

$$\begin{aligned}A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\\&=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\end{aligned}\tag{4}$$

同样是 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ 的一个线性逼近,只是当 $m>1$ 时它不再是一实数,而是一个 m 维的向量.

如果 f 在 D 中任何点处可微,则称 f 为 D 上的**可微函数**. 下面来导出矩阵 A 的元与 f 的坐标函数的偏导数之间的联系. 为此设

$$f=\begin{bmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_m\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1^{\mathrm T}\\ \vdots\\ A_m^{\mathrm T}\end{bmatrix},$$

其中 $A_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})^{\mathrm T},i=1,2,\cdots,m$. 此时,可微条件(3)等价于

$$f_i(x)-f_i(x_0)=A_i^{\mathrm T}(x-x_0)+o(\|x-x_0\|),i=1,2,\cdots,m,\tag{5}$$

即 f 的所有坐标函数 $f_i,i=1,2,\cdots,m$ 在 x_0 可微. 由实值函数可微性的结论知道

$$a_{ij}=\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x=x_0},j=1,2,\cdots,n;\quad i=1,2,\cdots,m.\tag{6}$$

于是当 f 在 x_0 可微时, f 在 x_0 的导数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}&\cdots&\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots&&\vdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}&\cdots&\dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}^{①}\quad(=f'(x_0)=Df(x_0)).\tag{7}$$

由于向量函数的可微性等价于它的所有坐标函数的可微性,因此,实值函数可微的必要条件与充分条件同样适用于向量函数.

定理 23.8 若向量函数 f 在 x_0 可微,则 f 在 x_0 连续.

定理 23.9 若向量函数 f 在 x_0 可微,则 f 的所有 m 个坐标函数 $f_i(i=1,2,\cdots,m)$ 在 x_0 关于每个自变量 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的一阶偏导数 $\left.\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x=x_0}$ 都存在. 由这些偏导数组成的矩阵(7)便是 f 在 x_0 的导数.

定理 23.10 若向量函数 f 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内处处存在一阶偏导数 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,且所有这些偏导数在点 x_0 连续,则 f 在点 x_0 可微.

例 1 设 $X=\{(x_1,x_2)\mid-\infty<x_1<+\infty,x_2>0\}\subset\mathbf{R}^2$,向量函数 $f:X\to\mathbf{R}^4$ 为

$$f(x)=f(x_1,x_2)=(x_1^2x_2^3,\mathrm{e}^{x_1+x_2},x_2,x_1\ln x_2)^{\mathrm T}.$$

求 $f'(x),x\in X$ 和 $f'(1,1)$.

---

① 如此形式的矩阵又叫做 f 的**雅可比矩阵**,也常记作 $J_f(x_0)$. 只要其中的所有偏导数存在,便可构成 $J_f(x_0)$,但此时并不表示它必定是 f 的导数,因为由此并不能保证 f 在 x_0 可微.

解　这里 $f_1(x_1,x_2)=x_1^2x_2^3$, $f_2(x_1,x_2)=\mathrm{e}^{x_1+x_2}$, $f_3(x_1,x_2)=x_2$, $f_4(x_1,x_2)=x_1\ln x_2$. 对 $\boldsymbol{x}\in X$, 由(7)式有

$$f'(x)=\begin{bmatrix}2x_1x_2^3 & 3x_1^2x_2^2\\ \mathrm{e}^{x_1+x_2} & \mathrm{e}^{x_1+x_2}\\ 0 & 1\\ \ln x_2 & \dfrac{x_1}{x_2}\end{bmatrix},\quad f'(1,1)=\begin{bmatrix}2 & 3\\ \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

进而还可由定理 23.10 知,函数 $\boldsymbol{f}$ 在 X 上每一点都可微. □

下述定理给出了可微函数与连续函数之间进一步的联系,它可使不少可微性命题的证明更加简便.

定理 23.11　设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为开集, $\boldsymbol{x}_0\in D$, $\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$. 则 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微的充要条件是:存在一个(m 行 n 列的)矩阵函数 $\boldsymbol{F}:D\to\mathbf{R}^{mn}$,它在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续(相当于它的 n 个列向量函数都在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续),并使得

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0),\ \boldsymbol{x}\in D. \tag{8}$$

证　为了证明的需要,我们把定义 1 中的(3)式改写成如下等价形式,即存在 $\boldsymbol{\eta}:D\to\mathbf{R}^m$ 使得

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|, \tag{9}$$

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}.$$

现从(9)式出发来证明条件的必要性:当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}_0$ 时

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)&=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|\\&=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\frac{\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\\&=\left[\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)+\frac{\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}}\right](\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0).\end{aligned} \tag{10}$$

若令

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)+\dfrac{\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}}, & \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}_0,\\ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0), & \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0.\end{cases} \tag{11}$$

因为　$\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)\|$[①] $=\left\|\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})\dfrac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}\right\|\leqslant\|\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})\|$,

而 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\|\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})\|=0$,所以 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续. 于是存在由(11)所确定的函数 $\boldsymbol{F}$,使得(10)式符合定理条件.

---

① 这里 $\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)\|$ 是矩阵的模. 一般地,矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的模,可以采用多种定义方式,其中之一是 $\|\boldsymbol{A}\|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2}$,这相当于把 A 看作 mn 维向量,所以向量模的性质对矩阵模同样成立.

反之,若存在 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$,在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续且满足(8)式,则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)&=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)](\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\\&=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|.\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\dfrac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0), & \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}_0,\\ \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0.\end{cases}\tag{12}$$

因 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续,可知 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$. 所以(12)式符合 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微的等价条件(9). 而且线性变换 A 由矩阵 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)$ 所确定,即

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0).\tag{13}$$

□

二 可微函数的性质

如定义 1 那样,下列定理中的集合 $D\subset\mathbf{R}^n$ 均设为开集.

定理 23.12 设 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}:D\to\mathbf{R}^m$ 是两个在 $\boldsymbol{x}_0\in D$ 可微的函数,c 是任意实数. 则 $c\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{f}\pm\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 也可微,且有

$$(c\boldsymbol{f})'(\boldsymbol{x}_0)=c\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0),(\boldsymbol{f}\pm\boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\pm\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0).\tag{14}$$

证明留作练习.

定理 23.13 设 $\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in D$ 可微;$D'\subset\mathbf{R}^m$ 亦为开集,$\boldsymbol{f}(D)\subset D'$;$\boldsymbol{g}:D'\to\mathbf{R}^r$ 在 $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ 可微. 则复合函数 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^r$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微,且

$$\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{x}_0)=(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})'(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}_0)\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0).\tag{15}$$

证 由定理 23.11 关于可微的充要条件,存在矩阵函数 $\boldsymbol{F}:D\to\mathbf{R}^{mn}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续,$\boldsymbol{G}:D'\to\mathbf{R}^{rm}$ 在 $\boldsymbol{y}_0$ 连续,且满足

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)&=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0),\quad \boldsymbol{x}\in D,\\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_0)&=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0),\quad \boldsymbol{y}\in D'.\end{aligned}$$

于是就有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_0)&=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))\\&=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)]\\&=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\\&=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0),\end{aligned}\tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$. 由连续函数性质可知,当 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续,$\boldsymbol{G}$ 在 $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ 连续时,$\boldsymbol{H}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续. 所以,复合函数 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$ 所满足的(16)式符合定理 23.11 的条件,即 $\boldsymbol{h}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微. 而且由(13)式可知 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)$,$\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}_0)=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}_0)$,从而证得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{x}_0)&=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)\\&=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}_0)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}_0)\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0).\end{aligned}$$

□

上述公式(15)也称为**链式法则**.

在上述复合过程中，若令 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，当用雅可比矩阵表示复合函数 $(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})$ 的导数的链式法则(15)时，则为

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial u_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_r}{\partial x_n}\end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial y_m}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial u_r}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial u_r}{\partial y_m}\end{bmatrix}_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_0}\times\begin{bmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}. \tag{17}$$

例 2　设 $D\subset\mathbf{R}^2$，$\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^2$，$\boldsymbol{f}(D)\subset D'\subset\mathbf{R}^2$，$g:D'\to\mathbf{R}$，则当 $\boldsymbol{f}$，g 均可微时，它们的复合函数 $h=g\circ\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}$(注意，这里 h 是实值函数)依定理 23.13 在 D 上可微，且有导数

$$h'(\boldsymbol{x})=(g\circ\boldsymbol{f})'(\boldsymbol{x})=g'(\boldsymbol{y})\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}).$$

按(17)式的写法，则是

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial y_1} & \frac{\partial u}{\partial y_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}.$$

这个结果正是第十七章 §2 链式法则(4).　□

例 3　设

$$\boldsymbol{w}=[f(x,u),g(y,v)]^{\mathrm{T}},u=\psi(x,y,v),v=\varphi(x,y).$$

试计算 $\boldsymbol{w}'(x,y)$.

解　利用定理 23.13 的一般方法来求解时，须把 $\boldsymbol{w}=[w_1,w_2]^{\mathrm{T}}$ 看作以下三个变换的复合

$$(x,y)^{\mathrm{T}}\mapsto(x,y,v)^{\mathrm{T}}\mapsto(x,y,u,v)^{\mathrm{T}}\mapsto(w_1,w_2)^{\mathrm{T}},$$

亦即

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ \varphi(x,y)\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \psi(x,y,v) \\ v \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x,u) \\ g(y,v) \end{bmatrix}.$$

则有

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{w}'(x,y) \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial w_1}{\partial x} & \dfrac{\partial w_1}{\partial y} & \dfrac{\partial w_1}{\partial u} & \dfrac{\partial w_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial x} & \dfrac{\partial w_2}{\partial y} & \dfrac{\partial w_2}{\partial u} & \dfrac{\partial w_2}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial x}{\partial y} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial y} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial v} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial x}{\partial y} \\ \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_x & 0 & f_u & 0 \\ 0 & g_y & 0 & g_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \psi_x & \psi_y & \psi_v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \varphi_x & \varphi_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_x + f_u\psi_x + f_u\varphi_x\psi_v & f_u\psi_y + f_u\varphi_y\psi_v \\ g_v\varphi_x & g_y + g_v\varphi_y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

定理23.14(微分中值不等式) 设 $D \subset \mathbf{R}^n$ 是凸开集，$\boldsymbol{f}: D \to \mathbf{R}^m$. 若 $\boldsymbol{f}$ 在 D 内可微，则对任何两点 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in D$，必存在点 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{a} + \theta(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$, $0 < \theta < 1$，使得

$$\| \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \| \leqslant \| \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\xi}) \| \, \| \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \| \text{[1]}. \tag{18}$$

证 令

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

则 φ 是 D 上的一个实值函数，且满足中值定理(定理 17.8)的条件. 所以存在 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{a} + \theta(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$, $0 < \theta < 1$，使得

$$\varphi(\boldsymbol{b}) - \varphi(\boldsymbol{a}) = \varphi'(\boldsymbol{\xi})^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}),$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi'(\boldsymbol{\xi})^{\mathrm{T}} &= [\varphi_{x_1}(\boldsymbol{\xi}), \cdots, \varphi_{x_n}(\boldsymbol{\xi})] \\ &= [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

由于 $\varphi(\boldsymbol{b}) - \varphi(\boldsymbol{a}) = [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})]^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})] = \| \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \|^2$,

[1] 这里的 $\| \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\xi}) \|$ 是矩阵的模.

因此又有

$$\|f(b)-f(a)\|^2=[f(b)-f(a)]^{\mathrm{T}}f'(\xi)(b-a)$$
$$\leqslant\|f(b)-f(a)\|\ \|f'(\xi)\|\ \|b-a\|.$$

由此得不等式(18). □

三 黑赛矩阵与极值

在讨论高阶导数时,这里只限于考察两种情形:一元向量函数的高阶导数和多元实值函数的二阶导数.

对于一元向量函数 $x:I\to\mathbf{R}^n$, $I\subset\mathbf{R}$,即

$$x_1=x_1(t),\cdots,x_n=x_n(t),\ t\in I.$$

只要 $x_i^{(k)}(t)$, $i=1,2,\cdots,n$ 存在,按向量函数的导数定义,x 的 k 阶导数 $x^{(k)}(t)=[x_1^{(k)}(t),\cdots,x_n^{(k)}(t)]^{\mathrm{T}}$.

对于 n 元实值函数 $f:D\to\mathbf{R}$, $D\subset\mathbf{R}^n$ 为开集,如果 f 在 D 可微,则由

$$f'(x)=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$$

确定了 f 的导函数 $f':D\to\mathbf{R}^n$,它是一个向量函数(即 f 的梯度向量函数). 如果 f' 还在 D(或 D 内某一点)上可微,则称 f 在 D(或 D 内某一点)上**二阶可微**,并定义 $(f')^{\mathrm{T}}$ 的导数为 f 的**二阶导数**,记作 $f''(x)$ 或 $D^2f(x)$. 由公式(7)得

$$f''(x)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}. \tag{19}$$

此矩阵又称为函数 f 的**黑赛矩阵**,当 f 的二阶混合偏导数连续时,它是一个对称阵.

这时 f 在 x_0 的二阶泰勒公式可简单地写成

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^{\mathrm{T}}f''(x_0)(x-x_0)+$$
$$o(\|x-x_0\|^2). \tag{20}$$

利用它还能把第十七章里对二元极值问题的讨论引向更一般的形式.

为此我们把定理 17.10 和定理 17.11 中的二维极值点改为 n 维极值点,即得以下相应结论(详细证明从略).

定理 23.15(极值必要条件) 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为开集,实值函数 $f:D\to\mathbf{R}$ 在 $x_0\in D$ 可微,且取极值,则

(i) x_0 必为 f 的稳定点,即 $f'(x_0)=0$;

(ii) 又若 f 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)\subset D$ 存在连续二阶偏导数,则当 $f(x_0)$ 为

极小值时，f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的黑赛矩阵 $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}_0)$ 为正定或正半定；当 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为极大值时，f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的海赛矩阵 $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}_0)$ 为负定或负半定.

此定理的直接推论是：若 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的黑赛矩阵 $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}_0)$ 为不定时，则 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 不取极值.

定理 23.16（极值充分条件） 上述函数 f 若在 $U(\boldsymbol{x}_0)\subset D$ 存在连续二阶偏导数，且 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}$，则当 $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}_0)$ 为正定（负定）时，f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 取严格极小（极大）值.

例 4 试讨论二次函数

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + c \tag{21}$$

的极值.其中 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 为变量，$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 对称阵，$\boldsymbol{b}$ 为 $n\times 1$ 向量，c 为实数.

解 由方程

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}$$

求得 f 的稳定点 $\boldsymbol{x}_0=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$（这里设 $\boldsymbol{A}$ 可逆）. 再求得 f 的黑赛矩阵

$$\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}$$

便可知道当 $\boldsymbol{A}$ 为正定时 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为极小值；$\boldsymbol{A}$ 为负定时 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为极大值. 可以验证 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为 f 的最小值和最大值，其值为

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_0) &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}) + c \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} + c \\ &= -\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} + c. \end{aligned}$$

当 $\boldsymbol{A}$ 为不定阵时，求得的稳定点 $\boldsymbol{x}_0$ 相当于一个鞍点，这时 $\boldsymbol{x}_0$ 不是 f 的极值点. □

习 题

1. 证明定理 23.12.
2. 求下列函数的导数：

(1) $\boldsymbol{f}(x_1,x_2)=(x_1\sin x_2,(x_1-x_2)^2,2x_2^2)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{f}'(x_1,x_2)$ 和 $\boldsymbol{f}'\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$；

(2) $\boldsymbol{f}(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2+x_2,x_2\mathrm{e}^{x_1+x_3})^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{f}'(x_1,x_2,x_3)$ 和 $\boldsymbol{f}'(1,0,1)$.

3. 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为开集，$\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}:D\to\mathbf{R}^m$ 均为可微函数. 证明：$\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}$ 也是可微函数，而且

$$(\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}' + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}'.$$

4. 设函数 $f,\boldsymbol{g},\boldsymbol{h},\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}$ 的定义如下：

$f(x_1,x_2) = x_1 - x_2$，$\boldsymbol{g}(x) = (\sin x,\cos x)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{h}(x_1,x_2) = (x_1x_2,x_2-x_1)^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{s}(x_1,x_2) = (x_1^2,2x_2,x_2+4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{t}(x_1,x_2,x_3) = (x_1x_2x_3,x_1+x_2+x_3)^{\mathrm{T}}$.

试依链式法则求下列复合函数的导数：

(1) $(f\circ \boldsymbol{g})'$； (2) $(\boldsymbol{g}\circ f)'$； (3) $(\boldsymbol{h}\circ \boldsymbol{h})'$；

(4) $(\boldsymbol{s}\circ \boldsymbol{h})'$； (5) $(\boldsymbol{t}\circ \boldsymbol{s})'$； (6) $(\boldsymbol{s}\circ \boldsymbol{t})'$.

5. 设 $u=f(x,y), v=g(x,y,u), w=h(x,u,v)$，应用链式法则计算 $w'(x,y)$.

6. 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为开域，$\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$ 为可微函数. 利用定理23.14证明：

(1) 若在 D 上 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ 恒为$\mathbf{0}$矩阵(零矩阵)，则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为常向量函数；

(2) 若在 D 上 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{c}$(常数阵)，则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}\in D, \boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^m$.

7. 设 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 为可微函数，试求分别满足以下条件的函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$：

(1) $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{I}$(单位阵)；

(2) $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=\mathrm{diag}(\varphi_i(x_i))$，即以 $\varphi_1(x_1),\varphi_2(x_2),\cdots,\varphi_n(x_n)$ 为主对角线元的对角阵，$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$.

8. 求下列函数 f 的黑赛矩阵，并根据例4的结果判断该函数的极值点：

(1) $f(\boldsymbol{x})=x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2+x_3^2-x_2x_3+x_1+3x_2-x_3$；

(2) $f(\boldsymbol{x})=-x_1^2+4x_1x_2-2x_2^2+4x_3^2-6x_2x_3+6x_1x_3$.

---

9. 设 $f,\boldsymbol{g},\boldsymbol{h},\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}$ 为第4题中的五个函数.

(1) 试问：除第4题6个小题中的两个函数的复合外，还有哪些两个函数可以进行复合，并求这些复合函数的导数；

(2) 求下列复合函数的导数：

(i) $(\boldsymbol{g}\circ f\circ \boldsymbol{h})'$； (ii) $(\boldsymbol{s}\circ \boldsymbol{t}\circ \boldsymbol{s})'$.

10. 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为开集，$\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in D$ 可微. 试证明：(1)任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0;\delta)$ 时，有

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\|\leqslant(\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\|+\varepsilon)\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|;$$

(2) 存在 $\delta>0, K>0$，当 $\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0;\delta)$ 时，有

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\|\leqslant K\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|.$$

(这称为在可微点邻域内满足**局部利普希兹条件**.)

11. 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是凸开集，$\boldsymbol{g}:D\to\mathbf{R}^n$ 是可微函数，且满足：对任何 $\boldsymbol{x}\in D$ 和任何非零的 $\boldsymbol{h}\in\mathbf{R}^n$，恒有

$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}>0.$$

试证明 $\boldsymbol{g}$ 在 D 上是一一映射. (提示：若 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_2), \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in D$；令 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1\neq\mathbf{0}$，$f(\boldsymbol{x})=[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}$；对 f 应用中值定理.)

12. 设 $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 二阶可导，且有稳定点；$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，且 $f(\boldsymbol{x})=\varphi(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}), \boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n, \boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$.

(1) 试求 f 的所有稳定点；

(2) 证明 f 的所有稳定点都是退化的，即在这些稳定点处，$f''(\boldsymbol{x})$ 是退化矩阵(即在稳定点处 $\det f''(\boldsymbol{x})=0$[①]).

---

① 若 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，则记号 $\det\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的行列式.

§3 反函数定理和隐函数定理

在第十八章里,我们对隐函数定理和反函数定理的基本形式作了比较详细的讨论.这里要在更一般的形式上来完成对这两个定理的叙述和论证.

一 反函数定理

考虑定义在开集 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上的向量函数

$$\boldsymbol{f}: D\to\mathbf{R}^n.$$

如果向量函数 $\boldsymbol{f}$ 是一一映射.即不仅对每一个 $\boldsymbol{x}\in D$ 只有一个 $\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$ 与之对应,且对每一个 $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{f}(D)$ 也只有惟一确定的 $\boldsymbol{x}\in D$,使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$.于是由后者能确定一个定义在 $\boldsymbol{f}(D)$ 上的函数,记为

$$\boldsymbol{f}^{-1}:\boldsymbol{f}(D)\to D,$$

称它为函数 $\boldsymbol{f}$ 的**反函数**.函数 $\boldsymbol{f}$ 及其反函数 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 显然满足

$$(\boldsymbol{f}^{-1}\circ\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\in D, \tag{1}$$

$$(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{f}^{-1})(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{f}(D). \tag{2}$$

定理 23.17(反函数定理) 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是开集,函数 $\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^n$ 满足以下条件:

(i) 在 D 上可微,且 $\boldsymbol{f}'$ 连续;

(ii) 存在 $\boldsymbol{x}_0\in D$,使 $\det\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\neq0$,

则存在邻域 $U=U(\boldsymbol{x}_0)\subset D$ 使得

1° $\boldsymbol{f}$ 在 U 上是一一映射,从而存在反函数 $\boldsymbol{f}^{-1}:V\to U$,其中 $V=\boldsymbol{f}(U)$ 是开集;

2° $\boldsymbol{f}^{-1}$ 在 V 上存在连续导数 $(\boldsymbol{f}^{-1})'$,且

$$(\boldsymbol{f}^{-1})'(\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}))^{-1},\qquad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}\in V. \tag{3}$$

证 1)将函数 $\boldsymbol{f}$ 变换为定义在零点邻域内的函数.

设 $T=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$,由(i)(ii)存在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $W\subset D$,使得 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ 在 W 内非零.在 $W-\boldsymbol{x}_0=\{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|x\in W\}$ 上定义函数

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=T^{-1}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)],\qquad \boldsymbol{x}\in W-\boldsymbol{x}_0. \tag{4}$$

记 $W-\boldsymbol{x}_0$ 为 W_1,即有

$$\mathbf{0}\in W_1,\qquad \boldsymbol{F}(\mathbf{0})=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{F}'(\mathbf{0})=\boldsymbol{I},$$

这里 $\boldsymbol{I}$ 是单位阵,而且 $\boldsymbol{F}$ 在 W_1 上可微,$\boldsymbol{F}'$ 连续,对所有 $\boldsymbol{x}\in W_1$,$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})\neq\mathbf{0}$.

2) 证明存在邻域 $W_2\subset W_1$,使得 $\boldsymbol{F}$ 在 W_2 上是一一映射.

设
$$\varphi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),\qquad \boldsymbol{x}\in W_1, \tag{5}$$

则 $\varphi'(\mathbf{0})=\mathbf{0}$. 取定 $0<\alpha<1$,由 $\varphi'(\boldsymbol{x})$ 的连续性,存在中心在原点的开球 W_2

$\subset W_1$,使得对 $x \in W_2$

$$\|\varphi'(x)\| < \alpha. \tag{6}$$

应用定理23.14微分中值不等式,我们有

$$\|\varphi(x'') - \varphi(x')\| \leqslant \alpha\|x'' - x'\|, \qquad x', x'' \in W_2.$$

由(5)及三角不等式可以推出

$$\|F(x'') - F(x')\| \geqslant (1-\alpha)\|x'' - x'\|, \tag{7}$$

所以 F 在 W_2 内是一一映射.若定义 F 的反函数 $H: F(W_2) \to W_2$,

$$H(F(x)) = x, \qquad x \in W_2.$$

由(7),即有 H 是连续的.

3) 证明 $F(W_2) \supset (1-\alpha)W_2$, $U = H(V)$是开集,其中 $V = (1-\alpha)W_2$.

任取 $y \in (1-\alpha)W_2$,对任何 $n > 1$,应用迭代法构造 $x_0, \cdots, x_n$ 使得 $x_0 = 0$, $x_i = y + \varphi(x_{i-1})$, $x_{i-1} \in W_2$,

$$\|x_i - x_{i-1}\| \leqslant \alpha^{i-1}\|y\|, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{8}$$

于是有

$$\|x_n\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\|x_i - x_{i-1}\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\alpha^{i-1}\|y\| < \frac{1}{1-\alpha}\|y\|,$$

即 $x_n \in W_2$,

$$x_{n+1} = y + \varphi(x_n), \tag{9}$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})\| \leqslant \alpha\|x_n - x_{n-1}\|,$$

所以将 n 换成 $n+1$ 时归纳法假设也成立.

由于 $\alpha < 1$,因此$\{x_n\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的柯西列,于是有 $x_n \to x \in W_2$.由(5)(9)令 $n \to \infty$,即有 $F(x) = y$.设 $V = (1-\alpha)W_2$,于是有 $U = F^{-1}(V)$.因为 F 连续,而开集的原象是开集,所以 U 是开集.

4) 若 $y \in V$, $x = H(y)$,则 $H'(y) = F'(x)^{-1}$.

设 $y \in V$, $y + k \in V$, $k \neq 0$, $x = H(y)$, $x + h = H(y+k)$, $S = F'(x)$,于是有

$$\begin{aligned}
&H(y+k) - H(y) - S^{-1}k \\
&= h - S^{-1}k \\
&= S^{-1}(Sh - k) \\
&= -S^{-1}[F(x+h) - F(x) - Sh].
\end{aligned}$$

由(7)

$$(1-\alpha)\|h\| \leqslant \|k\|,$$

因此

$$\frac{\|H(y+k) - H(y) - S^{-1}k\|}{\|k\|} \leqslant \|S^{-1}\|\frac{\|F(x+h) - F(x) - Sh\|}{(1-\alpha)\|h\|}. \tag{10}$$

当 $k\to 0$ 时，$h\to 0$，即有(10)式右边趋于零，因此

$$H'(y) = F'(x)^{-1}.$$

5) $H'(x)$在 V 内连续.

我们有下述不等式：

$$\begin{aligned}&\|H'(y+k)-H'(y)\|\\ \leqslant\ &\|[F'(x+h)]^{-1}-[F'(x)]^{-1}\|\\ \leqslant\ &\|[F'(x+h)]^{-1}\|\ \|F'(x+h)-F'(x)\|\ \|[F'(x)]^{-1}\|.\end{aligned}\tag{11}$$

由 F'的连续性，当 $\|h\|$ 充分小时

$$\|F'(x+h)-F'(x)\|\cdot\|[F'(x)]^{-1}\|<\frac{1}{2}.$$

由(11)，可以得到

$$\|[F(x+h)]^{-1}\|\leqslant 2\|[F'(x)]^{-1}\|,$$

于是

$$\begin{aligned}&\|H'(y+k)-H'(y)\|\\ \leqslant\ &2\|[F'(x)]^{-1}\|^2\|F'(x+h)-F'(x)\|.\end{aligned}$$

由 F'的连续性，即有 H'的连续性. □

例 1 记 $w=(x,y,z)^{\mathrm T}$，$p=(r,\theta,\varphi)^{\mathrm T}$，求函数

$$w=f(p)=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\tag{12}$$

的反函数的导数.

解 由公式(3)

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(w)&=[f'(p)]^{-1}\\
&=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{bmatrix}^{-1}\\
&=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{bmatrix}r^2\sin^2\theta\cos\varphi & r^2\sin^2\theta\sin\varphi & r^2\sin\theta\cos\theta\\ r\sin\theta\cos\theta\cos\varphi & r\sin\theta\cos\theta\sin\varphi & -r\sin^2\theta\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ \dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & \dfrac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & -\dfrac{\sin\theta}{r}\\ -\dfrac{\sin\varphi}{r\sin\theta} & \dfrac{\cos\varphi}{r\sin\theta} & 0\end{bmatrix}\quad(r^2\sin\theta\neq 0).\end{aligned}$$

若用 $w=f(p)$代入上式后则得

$$(\boldsymbol{f}^{-1})'(\boldsymbol{w}) = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} & \dfrac{z}{r} \\ \dfrac{xz}{r^2\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{yz}{r^2\sqrt{x^2+y^2}} & -\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{r^2} \\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$(x^2+y^2\neq 0)$，其中 $r=[x^2+y^2+z^2]^{\frac{1}{2}}$. □

注意 并不是每一个函数的反函数都能象上述那样经代入后得到(13)式. 这是因为所存在的反函数(即使它可导)并不都能由它的自变量用显式来表示.

二 隐函数定理

设 $X\subset\mathbf{R}^n$, $Y\subset\mathbf{R}^m$, $\Omega=X\times Y\subset\mathbf{R}^{n+m}$, $\boldsymbol{F}:\Omega\to\mathbf{R}^m$. 考察向量函数方程

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{x}\in X,\boldsymbol{y}\in Y. \tag{14}$$

如果存在向量函数 $\boldsymbol{f}:U\to Y(U\subset X)$，当用 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x}\in U$ 去替换方程(14)中的 $\boldsymbol{y}$ 时，能使(14)变成恒等式

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\equiv\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}\in U, \tag{15}$$

这时我们称函数 $\boldsymbol{f}$ 是由方程(14)所确定的定义在 U 上的**隐函数**.

用以前(第十八章)的话来说，方程(14)是一组含有 $n+m$ 个变元的 m 个方程；而 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 则是(14)的“解”，即由(14)所确定的隐函数组.

出于叙述定理的需要，我们引入向量函数关于一部分变元的偏导数符号：对上述函数 $\boldsymbol{F}$，当固定 $\boldsymbol{y}\in Y$ 时，它关于 $\boldsymbol{x}$ 的偏导数记为

$$\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\quad 或\quad D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\qquad (为\ m\times n\ 矩阵). \tag{16}$$

当固定 $\boldsymbol{x}\in X$ 时，它关于 $\boldsymbol{y}$ 的偏导数记为

$$\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\quad 或\quad D_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\qquad (为\ m\times m\ 矩阵) \tag{17}$$

定理 23.18(隐函数定理) 设 $X\subset\mathbf{R}^n$, $Y\subset\mathbf{R}^m$ 都是开集，$\Omega=X\times Y\subset\mathbf{R}^{n+m}$(亦为开集)，$\boldsymbol{F}:\Omega\to\mathbf{R}^m$. 如果 $\boldsymbol{F}$ 满足下列条件：

(i) 存在 $\boldsymbol{x}_0\in X$, $\boldsymbol{y}_0\in Y$，使得 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\boldsymbol{0}$；

(ii) $\boldsymbol{F}$ 在 Ω 上可微，且 $\boldsymbol{F}'$ 连续；

(iii) $\det\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\neq 0$，

则存在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的 n 维邻域 $U=U(\boldsymbol{x}_0)\subset X$ 和点 $\boldsymbol{y}_0$ 的 m 维邻域 $V=V(\boldsymbol{y}_0)\subset Y$，使得在点 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 的 $n+m$ 维邻域 $W=U\times V\subset\Omega$ 内，由方程(14)惟一地确定了隐函数 $\boldsymbol{f}:U\to V$，它满足

1° $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$；

2° 当 $\boldsymbol{x}\in U$ 时 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\in W$，具有恒等式(15)，即

$$F(x,f(x)) \equiv 0;$$

3° f 在 U 内存在连续偏导数 f'，且

$$f'(x) = -[F_y'(x,y)]^{-1}F_x'(x,y), \quad (x,y) \in W. \tag{18}$$

证 定义函数 $G:\Omega \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$,

$$G(x,y) = (x, F(x,y)),$$

即有 $\det G'(x_0,y_0) = \det F'_y(x_0,y_0) \neq 0$,

$$G(x_0,y_0) = (x_0, F(x_0,y_0)) = (x_0, \mathbf{0}).$$

应用定理 23.17，存在 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ 中包含 $(x_0,\mathbf{0})$ 的开集 $U \times V'$, $U \subset \mathbf{R}^n$, $V' \subset \mathbf{R}^m$ 和 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ 中包含 (x_0,y_0) 的开集 $U' \times V$, $U' \subset \mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^m$ 使得 G: $U' \times V \to U \times V'$ 具有可微反函数

$$H: U \times V' \to U' \times V. \tag{19}$$

因为 $G(x,y) = (x, F(x,y))$，所以 H 也具有类似形式

$$H(x,y) = (x, k(x,y)), \tag{20}$$

其中 $k(x,y)$ 是从 $U \times V'$ 到 V 的可微向量函数.

定义映射 $\pi: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$,

$$\pi(x,y) = y. \tag{21}$$

由于 $\pi \circ G = F$，于是

$$F(x,k(x,y)) = F \circ H(x,y) = (\pi \circ G) \circ H(x,y)$$
$$= \pi \circ (G \circ H)(x,y) = \pi(x,y) = y,$$

因此 $F(x,k(x,\mathbf{0})) = \mathbf{0}$.

若定义 $f(x) = k(x,\mathbf{0})$，即有 $x \in U$, $f(x) \in V$,

$$F(x,f(x)) = \mathbf{0}, y_0 = f(x_0).$$

为了证明结论 3°，引入向量增量符号

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x), \quad x, x + \Delta x \in U.$$

于是有

$$F(x + \Delta x, f(x + \Delta x)) - F(x, f(x))$$
$$= F(x + \Delta x, f(x) + \Delta f) - F(x, f(x)) = \mathbf{0}. \tag{22}$$

把它的各分量式写成微分中值公式：

$$F_i(x + \Delta x, f(x) + \Delta f) - F_i(x, f(x))$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k}(x + \theta_i \Delta x, f(x) + \theta_i \Delta f)\Delta x_k +$$
$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x + \theta_i \Delta x, f(x) + \theta_i \Delta f)\Delta f_j = 0 \tag{23}$$
$$(i = 1, 2, \cdots, m).$$

从这些方程首先可证明 f_j 对 x_k 的偏导数存在($j=1,2,\cdots,m;k=1,2,\cdots,n$),这些偏导数可由 $\Delta f_j/\Delta x_k$ 的极限($\Delta x_k\to 0,\Delta x_1=\cdots=\Delta x_{k-1}=\Delta x_{k+1}=\cdots=\Delta x_n=0$)而求得,其中间过程为(这里用到 $\Delta f\to 0$,即 f 的连续性)

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x,f(x))\frac{\partial f}{\partial x_k}=-\frac{\partial F_i}{\partial x_k}(x,f(x)) \tag{24}$$
$$(i=1,2,\cdots,m;k=1,2,\cdots,n).$$

把这 $m\times n$ 个式子列成矩阵式,即为

$$F_y'(x,y)f'(x)=-F_x'(x,y),\quad y=f(x),\quad (x,y)\in U\times V.$$

由于 F_y'在 U 内可逆,从而立即就可解出 $f'(x)$如(18)式所示,且由条件(ii)推得 $f'(x)$在 U 上是连续的. □

在定理 23.18 中,当 $n=m=1$ 和 $n=m=2$ 时可分别得到定理 18.1,18.2 和定理 18.4 的结果,只是定理 23.18 所给的条件更一般些,这是为了证明上的简便.

例 2 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^4$,$F,G:\Omega\to\mathbf{R}$.若向量 $H=(F,G)^{\mathrm{T}}$ 在点$(z_0,w_0)^{\mathrm{T}}\in\Omega$(其中 $z_0=(x_0,y_0)^{\mathrm{T}}$, $w_0=(u_0,v_0)^{\mathrm{T}}$)的某邻域内满足定理 23.18 的条件,且 $\det H_w'(z_0,w_0)\neq 0$,则方程

$$H(x,y,u,v)=\mathbf{0}$$

在点 z_0 的某邻域内能确定一个可微的隐函数 $w=f(z)$,并由公式(18)求得它的导数

$$f'(z)=-[H_w'(z,w)]^{-1}H_z'(z,w).$$

现按§2 公式(7),上式可详细地写作

$$f'(z)=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{bmatrix}$$
$$=-\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\frac{\partial G}{\partial v} & -\frac{\partial F}{\partial v}\\ -\frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial u}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{bmatrix}$$
$$=-\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} & \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}\\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} & \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}\end{bmatrix},$$

这里 $J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$.这个结果正是第十八章§2 公式(5). □

三 拉格朗日乘数法

条件极值问题在第十八章§4中进行过初步的讨论.现在证明高维情况下的拉格朗日乘数法.

设$D\subset\mathbf{R}^n$是开集,$f:D\to\mathbf{R}$, $\boldsymbol{\varphi}:D\to\mathbf{R}^m$, $n=m+r$,并改用行向量记$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_r,x_{r+1},\cdots,x_{r+m})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^r$, $\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^m$.现在讨论在条件

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=\mathbf{0} \tag{25}$$

限制下,求函数$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$的极值.对于这个条件极值问题,它的拉格朗日函数为

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})=L(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})=f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}), \tag{26}$$

其中$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)^{\mathrm{T}}$为拉格朗日乘数向量.于是定理18.6的向量形式是:

定理23.19 对以上所设的函数$f,\boldsymbol{\varphi}$若满足条件:

(i) $f,\boldsymbol{\varphi}$在D内有连续导数;

(ii) $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{z}_0)=\mathbf{0}$;

(iii) $\mathrm{rank}\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x}_0)=\mathrm{rank}[\boldsymbol{\varphi}'_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{z}_0),\boldsymbol{\varphi}'_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{z}_0)]=m$①;

(iv) $\boldsymbol{x}_0=(\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{z}_0)$是$f$在条件(25)下的条件极值点,

则存在$\boldsymbol{\Lambda}_0\in\mathbf{R}^m$,使得$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\Lambda}_0)$是(26)式所设函数$L$的稳定点即满足

$$\boldsymbol{L}'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\Lambda}_0)=[\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\Lambda}_0)+\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\Lambda}_0)]=\mathbf{0}. \tag{27}$$

但因$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\Lambda}_0)=[\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_0)]^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$(条件(ii)),故(27)式等同于

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\Lambda}_0)=f'(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{\Lambda}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x}_0)=\mathbf{0}. \tag{28}$$

证 为简单起见,不妨设由条件(iii)有

$$\det\boldsymbol{\varphi}'_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{z}_0)\neq 0, \tag{29}$$

于是条件(i),(ii)连同(29)满足定理23.18.故由方程(25)确定了惟一的隐函数

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}),\qquad (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in U(\boldsymbol{y}_0)\times U(\boldsymbol{z}_0)\subset D,$$

使得

$$\boldsymbol{z}_0=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_0);\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))\equiv\mathbf{0},\boldsymbol{y}\in U(\boldsymbol{y}_0)$$

且$\boldsymbol{g}$在$U(\boldsymbol{y}_0)$存在连续导数.于是由复合函数求导法则得到

$$\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{z}_0)+\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{z}_0)\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}_0)=\mathbf{0}. \tag{30}$$

另一方面,因为$(\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{z}_0)$是$f$的条件极值点,所以$\boldsymbol{y}_0$是$h(\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))$的极值点.于是有

$$f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{z}_0)+f_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{z}_0)\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}_0)=\mathbf{0}. \tag{31}$$

---

① $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$表示矩阵$\boldsymbol{A}$的秩.

取 $\boldsymbol{\Lambda}_0 \in \mathbf{R}^m$ 为下列方程的解：

$$f_z(\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{z}_0) + \boldsymbol{\Lambda}_0^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}_z(\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{z}_0) = \mathbf{0}. \tag{32}$$

由于条件(29)，上述方程的解是存在的. 最后，以 $\boldsymbol{\Lambda}_0^{\mathrm{T}}$ 乘(30)式，用(32)代入，并与(31)式相加，得到

$$f_y(\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{z}_0) + \boldsymbol{\Lambda}_0^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{z}_0) = 0.$$

把它与(32)式合起来，便是所要证明的(28)式. □

习 题

1. 设方程组

$$\begin{cases} 3x + y - z + u^2 = 0, \\ x - y + 2z + u = 0, \\ 2x + 2y - 3z + 2u = 0. \end{cases}$$

证明：除了不能把 x, y, z 用 u 惟一表出外，其他任何三个变量都能用第四个变量惟一表出.

2. 应用隐函数求导公式(18)，求由方程组

$$x = u\cos v, y = u\sin v, z = v$$

所确定的隐函数(其中之一) $z = z(x, y)$ 的所有二阶偏导数.

3. 设方程组

$$\begin{cases} u = f(x - uv, y - uv, z - uv), \\ g(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

试问：(1) 在什么条件下，能确定以 x, y, v 为自变量，u, z 为因变量的隐函数组？

(2) 能否确定以 x, y, z 为自变量，u, v 为因变量的隐函数组；

(3) 计算 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial v}$.

4. 设 $f(x, y) = [\mathrm{e}^x\cos y, \mathrm{e}^x\sin y]^{\mathrm{T}}$.

(1) 证明：当 $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ 时，$\det \boldsymbol{f}'(x, y) \neq 0$，但在 $\mathbf{R}^2$ 上 $\boldsymbol{f}$ 不是一一映射；

(2) 证明：$\boldsymbol{f}$ 在 $D = \{(x, y) \mid 0 < y < 2\pi\}$ 上是一一映射，并求 $(\boldsymbol{f}^{-1})'(0, e)$.

5. 利用反函数的导数公式，计算下列函数反函数的偏导数：$\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial v}$.

(1) $(u, v)^{\mathrm{T}} = \left(x\cos\dfrac{y}{x}, x\sin\dfrac{y}{x}\right)^{\mathrm{T}}$;

(2) $(u, v)^{\mathrm{T}} = (\mathrm{e}^x + x\sin y, \mathrm{e}^x - x\cos y)^{\mathrm{T}}$.

---

6. 设 $n > 2, D \subset \mathbf{R}^n$ 为开集，$\varphi, \psi: D \to \mathbf{R}, \boldsymbol{f}: D \to \mathbf{R}^2$ 且

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x} \in D.$$

证明：在满足 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$ 的点 $\boldsymbol{x}_0$ 处，$\mathrm{rank}\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0) < 2$. 但是由方程 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ 仍可能在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域内确定隐函数 $\boldsymbol{g}: E \to \mathbf{R}^2, E \subset \mathbf{R}^{n-2}$.

7. 设 $D \subset \mathbf{R}^n, \boldsymbol{f}: D \to \mathbf{R}^n$，而且适合

(i) f 在 D 上可微,且 f' 连续;

(ii) 当 $x\in D$ 时,$\det f'(x)\neq 0$,

则 $f(D)$ 是开集.

8. 设 $D,E\subset \mathbf{R}^n$ 都是开集,$f:D\to E$ 与 $f^{-1}:E\to D$ 互为反函数.证明:若 f 在 $x\in D$ 可微,f^{-1} 在 $y=f(x)\in E$ 可微,则 $f'(x)$ 与 $(f^{-1})'(y)$ 为互逆矩阵.(可望有一个比定理 23.17 更为简单的证明.)

9. 对 n 次多项式进行因式分解

$$P_n(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=(x-r_1)\cdots(x-r_n).$$

从某种意义上说,这也是一个反函数问题.因为多项式的每个系数都是它的 n 个根的已知函数,即

$$a_i=a_i(r_1,\cdots,r_n),\quad i=0,1,\cdots,n-1. \tag{33}$$

而我们感兴趣的是要求得到用系数表示的根,即

$$r_j=r_j(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}),j=1,2,\cdots,n. \tag{34}$$

试对 $n=2$ 与 $n=3$ 两种情形,证明:当方程 $P_n(x)=0$ 无重根时,函数组(33)存在反函数组(34).

§4 外积、微分形式与一般斯托克斯公式

一 从定积分和二重积分变换公式谈起

在用变量替换方法计算定积分时,我们有如下公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t, \tag{1}$$

这里 $\mathrm{d}x$ 可看到 $x=\varphi(t)$ 的微分,而定积分可看作变量变换 $x=\varphi(t)$ 条件下微分形式的积分.

二重积分的一般变量变换公式为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{2}$$

其中变换 $x=x(u,v),y=y(u,v)$ 把 uv 平面上区域 D' 一对一变换为 xy 平面上区域 D,面积元素 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 在上述变换下,按下述公式计算

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{3}$$

我们有

$$\mathrm{d}x=\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}y=\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

但是将 $\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}y$ 作普通乘法得不到公式(3).是否可定义某种微分的乘积,使得

上述变换公式显得更为自然.

二　向量的外积及它与相应行列式的关系

对 $\mathbf{R}^n$ 中 n 个向量 $v_1,v_2,\cdots,v_n$,定义**外积**

$$(v_1,v_2,\cdots,v_n)\to v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_n\in\mathbf{R}, \tag{4}$$

要求它具有下列性质:

(i) 乘法线性:按每个变量都是线性的.

(ii) 反交错性:若有某对 i,j 使 $v_i=v_j(i\neq j)$,则 $v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_n=0$;若在外积中交换两个向量的位置,则外积改变符号:

$$\begin{aligned}&v_1\wedge\cdots\wedge v_i\wedge\cdots\wedge v_j\wedge\cdots\wedge v_n\\=&-v_1\wedge\cdots\wedge v_j\wedge\cdots\wedge v_i\wedge\cdots\wedge v_n.\end{aligned}$$

(iii) 规范性:$e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n=1$,其中 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中标准基.

若
$$v_i=a_{i1}e_1+\cdots+a_{in}e_n,$$
我们将证明 $v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_n$ 即为矩阵 (a_{ij}) 的行列式.

事实上,

$$\begin{aligned}v_1\wedge\cdots\wedge v_n&=(a_{11}e_1+a_{12}e_2+\cdots+a_{1n}e_n)\wedge\cdots\\&\quad\wedge(a_{n1}e_1+a_{n2}e_2+\cdots+a_{nn}e_n)\\&=\sum_\tau a_{1,\tau(1)}e_{\tau(1)}\wedge\cdots\wedge a_{n,\tau(n)}e_{\tau(n)}\\&=\sum_\tau a_{1,\tau(1)}\cdots a_{n,\tau(n)}e_{\tau_1}\wedge\cdots\wedge e_{\tau(n)},\end{aligned}$$

其中 τ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的置换,求和是在所有置换上进行的. 由于反交错性

$$e_{\tau(1)}\wedge e_{\tau(2)}\wedge\cdots\wedge e_{\tau(n)}=\varepsilon(\tau)e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n=\varepsilon(\tau),$$

当 τ 为偶置换时 $\varepsilon(\tau)=1$,当 τ 为奇置换时 $\varepsilon(\tau)=-1$,于是有

$$v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_n=\det(a_{ij}). \tag{5}$$

三　外积与微分形式

本节在已有微分的加法和数乘运算之外,再定义微分之间的乘法运算,称为**外积**.

在三维空间中 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 可看作此空间中向量[①],依上节可定义外积,如 $\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}y$ 的外积记为 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.

我们称三维空间中自变量微分 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 为**基本一次微分形式**,两个基本一次微分形式的外积 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$ 称为是**基本二次微分形式**,它们满足以下运算律:

1° $k(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)=k\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$(其中 k 为实数);

---

① 在微分几何中坐标变量的微分可看作余切空间的基向量.

2° $dx\wedge(dy+dz)=dx\wedge dy+dx\wedge dz$(乘法关于加法的分配律)；

3° $dx\wedge dy=-dy\wedge dx$(反交换律)；

4° $dx\wedge dx=dy\wedge dy=dz\wedge dz=0$.

三个基本一次微分形式的连乘外积 $dx\wedge dy\wedge dz$,称为**基本三次微分形式**,并满足以下结合律,即

5° $dx\wedge(dy\wedge dz)=(dx\wedge dy)\wedge dz$.

根据上述运算律可推得如下性质：

(i) 任何三个不同的基本一次微分形式连乘外积有两种情况：

(a) 运用反交换律偶数次后,连乘外积按顺序 dx,dy,dz 排列,则原来连乘外积等于 $dx\wedge dy\wedge dz$.

(b) 运用反交换律奇数次后,连乘外积按顺序 dx,dy,dz 排列,则原来的连乘外积与 $dx\wedge dy\wedge dz$ 相差一个符号.

(ii) 在三个基本一次微分形式连乘外积中若有两个相同,则其值为零.

(iii) 在三维空间中三个以上基本一次微分形式的连乘外积都等于零,因为其中至少有一个基本一次微分形式要重复出现一次.

从几何意义上说,三维空间中的基本一次微分形式 dx,dy,dz 可理解为空间中有向线段微分,基本二次微分形式 $dx\wedge dy,dy\wedge dz,dz\wedge dx$ 则是有向面积微元,而基本三次微分形式 $dx\wedge dy\wedge dz$ 则是有向体积微元,它们与过去积分学中 $dx,dxdy$ 和 $dxdydz$ 的差别,在于新定义的微元有正,有负,而且与微元的定向有关.

设 F,P,Q,R 为三维空间中的函数,下列各式：

$$\overset{0}{w}=F,$$

$$\overset{1}{w}=Pdx+Qdy+Rdz,$$

$$\overset{2}{w}=Pdx\wedge dy+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy,$$

$$\overset{3}{w}=Fdx\wedge dy\wedge dz$$

分别称为三维空间中零次、一次、二次、三次**微分形式**.

按照外积的运算律和性质,可对微分形式进行外积运算,如

$$\begin{aligned}\overset{1}{w}_1\wedge\overset{1}{w}_2&=(P_1dx+Q_1dy+R_1dz)\wedge(P_2dx+Q_2dy+R_2dz)\\&=P_1P_2dx\wedge dx+P_1Q_2dx\wedge dy+P_1R_2dx\wedge dz+\\&\quad Q_1P_2dy\wedge dx+Q_1Q_2dy\wedge dy+Q_1R_2dy\wedge dz+\\&\quad R_1P_2dz\wedge dx+R_1Q_2dz\wedge dy+R_1R_2dz\wedge dz\\&=P_1Q_2dx\wedge dy-Q_1P_2dx\wedge dy+Q_1R_2dy\wedge dz-\\&\quad R_1Q_2dy\wedge dz+R_1P_2dz\wedge dx-P_1R_2dz\wedge dx\end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{vmatrix} dx \wedge dy + \begin{vmatrix} Q_1 & R_1 \\ Q_2 & R_2 \end{vmatrix} dy \wedge dz + \begin{vmatrix} R_1 & P_1 \\ R_2 & P_2 \end{vmatrix} dz \wedge dx.$$

同理可证

$$\begin{aligned} \overset{1}{\omega}_1 \wedge \overset{2}{\omega}_2 = & (P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz) \wedge \\ & (P_2 dy \wedge dz + Q_2 dz \wedge dx + R_2 dx \wedge dy) \\ = & (P_1P_2 + Q_1Q_2 + R_1R_2) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

四　微分形式的外微分

对三维空间中各种微分形式 $\overset{k}{\omega}$,可以定义它们的**外微分** $d\overset{k}{\omega}$:

$$d\overset{0}{\omega} = dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz.$$

$$d\overset{1}{\omega} = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz.$$

$$d\overset{2}{\omega} = dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy.$$

$$d\overset{3}{\omega} = dF \wedge dx \wedge dy \wedge dz.$$

运用外积的运算律与性质,上述各式可化简为

$$\begin{aligned} d\overset{1}{\omega} = & \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) \wedge dx + \\ & \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right) \wedge dy + \\ & \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right) \wedge dz \\ = & \frac{\partial R}{\partial y}dy \wedge dz - \frac{\partial Q}{\partial z}dy \wedge dz + \frac{\partial P}{\partial z}dz \wedge dx - \\ & \frac{\partial R}{\partial x}dz \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy - \frac{\partial P}{\partial y}dx \wedge dy \\ = & \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz \wedge dx + \\ & \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy. \end{aligned} \tag{6}$$

同样可推得

$$d\overset{2}{\omega} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx \wedge dy \wedge dz, \tag{7}$$

$$d\overset{3}{\omega} = 0.$$

由此可见 $k(<3)$次微分形式的外微分是 $k+1$ 次微分形式,但三次微分形式的外微分为零.

五　雅可比行列式符号的几何意义(二维情况)

设　　　Φ:　　$u = u(x,y)$,　$v = v(x,y)$

是 xy 平面上区域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 到 uv 平面上区域 D' 内的映射,$P_0(x_0,y_0) \in D$,假定

$u(x,y),v(x,y)$具有关于 x,y 连续偏导数,

$$\left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}\neq 0.$$

若 xy 平面上过点P_0的曲线可用参数方程 $x=f(t),y=g(t)$表示,$f(t_0)=x_0,g(t_0)=y_0$,此曲线在点 P_0 的斜率为 $m=\dfrac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$.

上述曲线在 uv 平面上的象曲线为

$$\xi = u(f(t),g(t)),\qquad \eta = v(f(t),g(t)).$$

容易推出象曲线在点 $\Phi(P_0)$的斜率为

$$\mu = \frac{\eta'(t_0)}{\xi'(t_0)} = \frac{c+dm}{a+bm},$$

其中

$$a = u_x(x_0,y_0),\quad b = u_y(x_0,y_0),$$
$$c = v_x(x_0,y_0),\quad d = v_y(x_0,y_0).$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m} = \frac{ad-bc}{(a+bm)^2},$$

因此当 $ad-bc>0$ 时,μ 是 m 的增函数;当 $ad-bc<0$ 时,μ 是 m 的减函数.

斜率的增加对应曲线切线的倾斜角的增加,也就是相应切线方向逆时针转动.$\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}>0$ 时,此映射保持逆时针旋转方向;而$\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}<0$ 时,则相反. 由于 $ad-bc$ 是点P_0 处雅可比行列式$\left.\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}$,因此映射 Φ 在点P_0保持还是改变旋转方向,可用雅可比行列式在该点的值是正的还是负的来判别.

六 用外积来理解多重积分的变量变换公式

二重积分的变量变换公式

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

通过变换 $x=x(u,v),y=y(u,v)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v\right)\wedge\left(\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v\right)\\ &= \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}u+\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v+\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}u+\\ &\quad \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}v\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$$

$$= \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v,$$

从而

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=|\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y|=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right||\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v|=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{8}$$

三重积分的球坐标变换公式为

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_{V'} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$$

在球坐标变换下

$$\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta, & 0\leqslant\rho<+\infty,\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, & 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\\ z=\rho\cos\varphi, & 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\end{cases}$$

我们有微分公式

$$\mathrm{d}x=\sin\varphi\cos\theta\mathrm{d}\rho+\rho\cos\varphi\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi-\rho\sin\varphi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

$$\mathrm{d}y=\sin\varphi\sin\theta\mathrm{d}\rho+\rho\cos\varphi\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi+\rho\sin\varphi\cos\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

$$\mathrm{d}z=\cos\varphi\mathrm{d}\rho-\rho\sin\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

利用外积的运算法则,并注意到三个基本一次微分形式中,若有两个相同时,它们的连乘外积为零,有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= |\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z|\\
&= |-\rho^2\sin^3\varphi\cos^2\theta\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi+\\
&\qquad \rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi\cos^2\theta\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\rho+\\
&\qquad \rho^2\sin^3\varphi\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}\varphi-\\
&\qquad \rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\rho|\\
&= |\rho^2\sin^3\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta+\\
&\qquad \rho^2\sin\varphi\cos^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta|\\
&= |\rho^2\sin\varphi(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta|\\
&= \rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

即有

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta. \tag{9}$$

七 行列式符号的几何解释

讨论直角坐标为(x_1,x_2,x_3)的三维空间,沿轴 Ox_1,Ox_2,Ox_3 的单位向量为 $\boldsymbol{i}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{i}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{i}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$,它们的行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (>0).$$

在此空间中给定三向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)^{\mathrm{T}}$,它们的分量组成的行列式不等于零,即

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

命题 若 $\Delta>0$,我们可以定义三个连续的向量值函数

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = (\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}(t) = (\beta_1(t),\beta_2(t),\beta_3(t))^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1(t),\gamma_2(t),\gamma_3(t))^{\mathrm{T}}(0\leqslant t\leqslant 1),$$

它们满足 $\boldsymbol{\alpha}(0)=\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\beta}(0)=\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{\gamma}(0)=\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{\alpha}(1)=\boldsymbol{i}_1$, $\beta(1)=\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{\gamma}(1)=\boldsymbol{i}_3$,而且对任意的 $t\in[0,1]$,行列式

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \alpha_1(t) & \beta_1(t) & \gamma_1(t) \\ \alpha_2(t) & \beta_2(t) & \gamma_2(t) \\ \alpha_3(t) & \beta_3(t) & \gamma_3(t) \end{vmatrix} > 0. \tag{10}$$

若 $\Delta<0$,则不可能构造三个具有上述性质的连续的向量函数.

从定向意义看,在 $\Delta>0$ 的情况下,三个有序的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的方向可以看作与 i_1,i_2,i_3 这三个向量的方向相同;在 $\Delta<0$ 的情况下,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 三向量方向可以看作与 $\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3$ 的方向相反①.

证 (i) 首先在区间 $[0,\frac{1}{4}]$ 内让 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 连续地变化,但不改变它们的方向,最后得到三个单位向量.

(ii) 设 L 是向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所在的平面. 在区间 $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$ 上使 $\boldsymbol{\alpha}\left(\frac{1}{4}\right)$ 和 $\boldsymbol{\gamma}\left(\frac{1}{4}\right)$ 保持不变,而将向量 $\boldsymbol{\beta}\left(\frac{1}{4}\right)$ 在平面 L 内旋转一个能到达与向量 $\boldsymbol{\alpha}\left(\frac{1}{4}\right)=\boldsymbol{\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)$ 垂直的位置的最小角度.

(iii) 固定向量 $\boldsymbol{\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)$ 和 $\boldsymbol{\beta}\left(\frac{1}{2}\right)$,在区间 $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$ 上让 $\boldsymbol{\gamma}$ 旋转一个能到达与平面 L 垂直的最小角度,于是 $\boldsymbol{\alpha}\left(\frac{3}{4}\right)$, $\boldsymbol{\beta}\left(\frac{3}{4}\right)$, $\boldsymbol{\gamma}\left(\frac{3}{4}\right)$ 构成三个互相垂直的单位

① 上述性质同样适用于雅可比行列式.

向量.

(iv) 在区间$\left[\frac{3}{4},1\right]$上将上述标架作刚体旋转,使 $\boldsymbol{\alpha}(1),\boldsymbol{\beta}(1)$分别与 $\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2$ 重合,于是有 $\boldsymbol{\alpha}(1)=\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{\beta}(1)=\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{\gamma}(1)=\pm\boldsymbol{i}_3$.若 $\Delta>0$ 时,上面第三式右边取"+"号;而 $\Delta<0$ 时,则取"-"号.由于上述过程是用不共面的连续向量 $\boldsymbol{\alpha}(t)$, $\boldsymbol{\beta}(t)$, $\boldsymbol{\gamma}(t)$来描述的,而它们的行列式(按(10)的形式)对任何 $t\in[0,1]$都不等于零,因此 $\Delta(0)=\Delta$ 与 $\Delta(1)$符号相同的情况,只可能是 $\Delta>0$ 且 $\boldsymbol{\gamma}(1)=\boldsymbol{i}_3$ 以及当 $\Delta<0$ 且 $\boldsymbol{\gamma}(1)=-\boldsymbol{i}_3$ 这两种情况. □

八 一般的斯托克斯公式

在这节中将统一描述斯托克斯公式、高斯公式、格林公式、牛顿-莱布尼茨公式.

设 S 是三维空间中的曲面,L 是 S 的边界曲线,若三元函数 P,Q,R 在 S 上满足定理 22.4 的条件,则成立斯托克斯公式:

$$\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z. \tag{11}$$

应用(6)中结果,(11)可写成

$$\int_S \mathrm{d}\overset{1}{w}=\int_L\overset{1}{w}. \tag{12}$$

若 P,Q,R 在三维区域 V 及其边界 S 上满定理 22.3 的条件时,成立高斯公式

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{13}$$

按照(7)式的结果,(13)可改写成

$$\int_V \mathrm{d}\overset{2}{w}=\int_S\overset{2}{w}. \tag{14}$$

格林公式是在二维空间中平面区域 D 上讨论的,二维空间的一次微分形式是

$$\overset{1}{w}=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

它的外微分是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\overset{1}{w}&=\mathrm{d}P\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}Q\wedge\mathrm{d}y\\&=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge\mathrm{d}y\\&=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{15}$$

设两元函数 P,Q 在 D 上满足定理 21.11 条件,则成立格林公式

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

按照(15),它可写作

$$\int_D \mathrm{d}\overset{1}{w}=\int_L \overset{1}{w}. \tag{16}$$

牛顿－莱布尼茨公式是在一维空间的一维区域(即区间)$[a,b]$上讨论,区间$[a,b]$的边界是它的两个端点 a 与 b.

由于 $$\overset{0}{w}=F(x),\quad \mathrm{d}\overset{0}{w}=\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x,$$

因此牛顿－莱布尼茨公式为

$$\int_{[a,b]}\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a), \tag{17}$$

或写作

$$\int_{[a,b]}\mathrm{d}\overset{0}{w}=\int_{a,b}\overset{0}{w}. \tag{18}$$

以上结果,可以推广到 n 维空间上去.

一般地,在 n 维空间上基本 p 次微分形式是 $p(\leqslant n)$个基本一次微分形式的连乘外积,即

$$\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\quad(i_1<i_2<\cdots<i_p),$$

如果依次外积的下标不是按上述顺序排列,则可按需要变更顺序并根据反交换律决定它的符号,若在 p 个基本一次微分形式中有两个相同则其值为零,当 $p>n$ 时,其连乘外积为零.

设 $a_{i_1\cdots i_p}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的函数,则 n 维空间中 p 次微分形式为

$$\overset{p}{w}=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p}a_{i_1\cdots i_p}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}. \tag{19}$$

一般斯托克斯公式为

$$\int_S\mathrm{d}\overset{k}{w}=\int_{\partial S}\overset{k}{w}, \tag{20}$$

这里 k 是小于 n 的正整数,S 是 n 维空间中 $k+1$ 维区域,∂S 是 S 的边界,是 n 维空间中 k 维区域.

习　题

1. 设 $w_1=P_1\mathrm{d}x+Q_1\mathrm{d}y+R_1\mathrm{d}z,$

   $w_2=P_2\mathrm{d}x+Q_2\mathrm{d}y+R_2\mathrm{d}z,$

试求 $w_1 \wedge w_2$.

2. 设 $w_1 = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$,

$w_2 = A\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + C\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$,

试求 $w_1 \wedge w_2$.

3. 设 λ, μ, ν 是三个微分形式,证明

(i) $\lambda \wedge (\mu \wedge \nu) = (\lambda \wedge \mu) \wedge \nu$;

(ii) 当 μ 和 ν 是次数相同的微分形式时,证明

$$\lambda \wedge (\mu + \nu) = \lambda \wedge \mu + \lambda \wedge \nu.$$

4. 设 λ 是 p 次微分形式, μ 是 q 次微分形式,证明

(i) $\lambda \wedge \mu = (-1)^{pq} \mu \wedge \lambda$;

(ii) 当 $p+q>3$ 时,便有 $\lambda \wedge \mu = 0$.

5. 设曲面 S 由一般参量方程给出:

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases} \qquad (u,v) \in D,$$

那么,第一型曲面积分计算公式为

$$\iint_S \Phi(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_D \Phi(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中 $A = \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$, $B = \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$, $C = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

试以外积为工具证明上述公式.

---

6. (庞加莱引理)设 w 是三维空间中任一微分形式,其系数有二阶连续偏导数,则

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}w) = 0.$$

(提示:三维空间中微分形式只有下列四种情况:

$$w = F,$$
$$\lambda = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z,$$
$$\mu = A\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + C\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$
$$\nu = H\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,$$

分四种情况验证,即有结论.)

总 练 习 题

1. 证明:若 $D \subset \mathbf{R}^n$ 为任何闭集, $\boldsymbol{f}: D \to D$,且存在正实数 $q \in (0,1)$,使得对任何 $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in D$,满足

$$\| \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}') - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'') \| \leqslant q \| \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}'' \|,$$

则在 D 中存在 $\boldsymbol{f}$ 的惟一不动点 $\boldsymbol{x}^*$，即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{x}^*$.（本命题称为**不动点原理或压缩映射定理**.）

2. 设 $B=\{\boldsymbol{x}\mid\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)\leqslant r\}\subset\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{f}:B\to\mathbf{R}^n$，且存在正实数 $q\in(0,1)$，对一切 $\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in B$ 满足

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')\|\leqslant q\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''\| \quad 与 \quad \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0\|\leqslant(1-q)r.$$

利用不动点定理证明：$\boldsymbol{f}$ 在 B 中有惟一的不动点.

3. 应用定理 23.11 证明：设 $D\subset\mathbf{R}^n$，$f,g:D\to\mathbf{R}$，若 f 在 $x_0\in D$ 可微，$f(\boldsymbol{x}_0)=0$，g 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续，则 $f\cdot g$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微.

4. 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是开集，$\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^n$ 为可微函数，且对任何 $\boldsymbol{x}\in D$，$\det\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\neq0$. 试证：若 $\boldsymbol{y}\overline{\in}\boldsymbol{f}(D)$，$\varphi(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|^2$，则对一切 $\boldsymbol{x}\in D$，$\varphi'(\boldsymbol{x})\neq\boldsymbol{0}$.

5. 证明：若 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是凸开集，$\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$ 是 D 上的可微函数，则对任意两点 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in D$，以及每一常向量 $\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^m$，必存在点 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\theta(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\in D$，$0<\theta<1$，满足

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})]=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

（本命题也称为向量函数的微分中值定理.）

6. 利用上题结果导出微分中值不等式

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\|\leqslant\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c})\|\cdot\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|,$$
$$c=\boldsymbol{a}+\theta(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),0<\theta<1.$$

7. 设 $\boldsymbol{f}(t)=[\cos t,\sin t]^{\mathrm{T}}$，$a=0$，$b=2\pi$.

(1) 是否存在 $c\in(0,2\pi)$，满足

$$\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a)=\boldsymbol{f}'(c)(b-a).$$

(2) 按题 5 所示的中值定理，对每一 $\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^2$，应该存在 $c\in(0,2\pi)$，使得 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a)]=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}'(c)(b-a)$，试求用 $\boldsymbol{\beta}$ 表示这里的中值点 c.

8. 设 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 可微，且 $\boldsymbol{f}'$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续. 若存在常数 $c>0$，使对一切 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\mathbf{R}^n$，均有

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)\|\geqslant c\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|.$$

试证明：

(1) $\boldsymbol{f}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一一映射；

(2) 对一切 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，$\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\|\neq0$.

9. 设 $A\subset\mathbf{R}^n$ 是有界闭集，$\boldsymbol{f}:A\to A$，如果 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in A$，$\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{x}_2$，都满足

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)\|<\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|,$$

则 A 中有且仅有一点 $\boldsymbol{x}$，使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$.

10. 设 λ 是三维空间中 p 次微分形式（$p\geqslant1$），其系数具有一阶连续偏导数，且 $\mathrm{d}\lambda=0$. 证明存在一个 $p-1$ 次微分形式 w 使得

$$\lambda=\mathrm{d}w.$$

（提示：分别对一次、二次、三次微分形式 λ，由 $\mathrm{d}\lambda=0$ 的条件，得出其系数之间的关系，然后构造 w 使得 $\lambda=\mathrm{d}w$.）

习 题 答 案

第十二章　数项级数

§1　级数的收敛性

1. (1) $\frac{1}{5}$; (2) $\frac{3}{2}$; (3) $\frac{1}{4}$; (4) $1-\sqrt{2}$; (5) 3.

6. (1) $\frac{1}{a}$; (2) 1; (3) $\frac{1}{2}$.

7. (1) 收敛; (2) 发散; (3) 收敛; (4) 发散.

10. 提示:任意 n,必有某 k,使 $n_k<n\leqslant n_{k+1}$,则 $S_{n_k}<S_n\leqslant S_{n_{k+1}}$ 和 $S_{n_k}>S_n\geqslant S_{n_{k+1}}$ 必有其中之一成立.

§2　正项级数

1. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 发散; (4) 收敛;
   (5) 收敛; (6) 发散; (7) 发散; (8) 收敛;
   (9) 收敛.

2. (1) 发散; (2) 发散; (3) 收敛; (4) 收敛;
   (5) 收敛; (6) 发散; (7) $a>b$,收敛; $a<b$,发散.

9. (1) 收敛; (2) 发散; (3) 发散; (4) $p>1$,收敛; $p=1,q>1$,收敛; $p=1,q\leqslant 1$,发散; $p<1$,发散.

11. (1) 收敛; (2) $x>1$ 时,收敛; $x\leqslant 1$,发散.

13. (1) 0; (2) 0.

§3　一般项级数

1. (1) 绝对收敛; (2) 发散; (3) 当 $p>1$ 时绝对收敛,当 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛,当 $p\leqslant 0$ 时发散; (4) 条件收敛; (5) 发散; (6) 条件收敛; (7) 绝对收敛; (8) $|x|<\mathrm{e}$ 时绝对收敛,$|x|\geqslant\mathrm{e}$ 时发散.

2. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 收敛.

5. (1) $1+2x^2+\cdots+nx^{2n-2}+\cdots$; (2) 1.

8. 提示:先证 $\sum(-1)^m\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^2+1}+\cdots+\frac{1}{m^2+2m}\right)$ 收敛.

总 练 习 题

6. 提示:用§2 习题 14 结论.

第十三章　函数列与函数项级数

§1　一致收敛性

1. (1) 一致收敛; (2) 一致收敛; (3) 不一致收敛; (4)(i) 不一致收敛;(ii) 一致收敛; (5)(i) 一致收敛;(ii) 不一致收敛.

3. (1) 一致收敛; (2) 一致收敛; (3) $r>1$ 时一致收敛, $r=1$ 时不一致收敛;(4) 一致收敛;(5) 一致收敛; (6) 不一致收敛.

8. (1) 一致收敛;(2) 不一致收敛;(3) 不一致收敛;(4) 一致收敛;(5) 不一致收敛;(6) 不一致收敛.

§2　一致收敛函数列与函数项级数的性质

1. (1) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)=1, f_n'(x) \rightrightarrows g(x)=0$,三定理条件皆满足;(2) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)=x$, $\{f_n'\}$不一致收敛,定理 13.9 和 13.10 条件满足;(3) $\{f_n\}$与$\{f_n'\}$都不一致收敛,三定理条件均不满足,但定理 13.10 结论仍成立.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2\sqrt{n}}$.

6. $\frac{1}{2}$.

9. (1) $f_n \rightrightarrows f(x)=0$; (2)(i) $\{f_n\}$ 不一致收敛,极限函数不连续、不可微但可积;(ii) $f_n \rightrightarrows f(x)=1$.

总练习题

1. (1) $k<1$ 时一致收敛; (2) $k<1$ 时一致收敛.

第十四章　幂　级　数

§1　幂　级　数

1. (1) $R=1,(-1,1)$;(2) $R=2,[-2,2]$;(3) $R=4,(-4,4)$; (4) $R=+\infty,(-\infty,+\infty)$; (5) $R=+\infty,(-\infty,+\infty)$; (6) $R=\frac{1}{3},\left[-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$; (7) $R=1,(-1,1)$; (8) $R=1,[-1,1]$.

2. (1) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, x\in(-1,1)$; (2) $\frac{x}{(1-x)^2}, x\in(-1,1)$; (3) $\frac{2x}{(1-x)^3}, x\in(-1,1)$.

6. (1) $(-R,R), R=\max\{a,b\}$;(2) $\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$.

7. (1) $R=\frac{1}{4}$;(2) $R=1$.

8. (1) $S(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)+1, & x\in(-1,0)\cup(0,1),\\ 0, & x=0,\\ 1, & x=1;\end{cases}$

(2) $S(x)=-\dfrac{(1-x)^2}{2x^2}\ln(1-x)+\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2x}, |x|<1, x=1$ 时 $S(x)=\dfrac{1}{4}$；$x=0$ 时 $S(x)=0$.

9. (1) $R=1$；(2) $2a_0+2d$（d 为公差）.

§2　函数的幂级数展开

2. (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n!}, x\in(-\infty,\infty)$；　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n+10}, x\in(-1,1)$；

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}, x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}, x\in(-\infty,+\infty)$；

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}\right)x^n, x\in(-1,1)$；

(6) $\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-(-1)^n2^n)x^n, x\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$；

(7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, x\in(-\infty,+\infty)$；

(8) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(1-n)}{n!}x^{n+1}, x\in(-\infty,+\infty)$；

(9) $x+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!!}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n+1)}x^{2n+1}, x\in(-\infty,+\infty)$.

3. (1) $8+15(x-1)+17(x-1)^2+7(x-1)^3$；(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$.

4. (1) $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(n+1-\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right)x^n, x\in(-1,1)$；

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}, x\in[-1,1]$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{2n-1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}, x\in(0,+\infty)$.

总练习题

2. (1) $x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n(n-1)}x^n, x\in(-1,1]$；(2) $\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3^{2n-1}-3}{(2n-1)!}x^{2n-1}$, $x\in(-\infty,+\infty)$；(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}, x\in(-\infty,+\infty)$.

3. (1) $\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$, $x\in(-1,1)$；(2) $\dfrac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$, $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$；(3) $\dfrac{1}{(2-x)^2}$,

$x \in (0,2)$; (4) $\frac{x^2}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\arctan x - x, x \in (-1,1)$.

4. (1) 1; (2) $\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

6. (1) $\frac{1}{2}$; (2) $-\frac{1}{6}$.

第十五章　傅里叶级数

§1　傅里叶级数

1. (1)(i) $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$;　(ii) $\pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$;

(2)(i) $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos nx$; (ii) $\frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi\sin nx}{n}\right)$;

(3) $\frac{b-a}{4}\pi + \frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + (a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$.

7. (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, x \in (0,2\pi)$; (2) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{4n^2-1}\right), x \in (-\pi,\pi)$;

(3)(i) $\frac{4}{3}a\pi^2 + b\pi + c + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4a}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi a + 2b}{n}\sin nx$;

(ii) $\frac{a}{3}\pi + c + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n 4a}{n^2}\cos nx - \frac{(-1)^n 2b}{n}\sin nx\right)$;

(4) $\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\pi}{1+n^2}(-1)^n\cos nx$; (5) $\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}\sin nx$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.

§2　以 $2l$ 为周期的函数的展开式

1. (1) $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx$;　(2) $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n}$;

(3) $\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$;　(4) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}\right]$;

2. $\frac{2}{3} + \frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\cos\frac{n\pi}{3} - 1\right)\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}$.

3. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

4. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin nx$.

5. $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}$.

6. $\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi x}{n^2}$.

7. (1) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x$;(2) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

总练习题

5. (1) $\alpha_n=a_n,\beta_n=-b_n$;(2) $\alpha_n=-a_n,\beta_n=b_n$.

第十六章 多元函数的极限和连续

§1 平面点集与多元函数

6. (1) $\frac{9}{16}$;(2) $\frac{2xy}{x^2+y^2}$;(3) $t^2(x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y})$.

8. (1) $y\neq\pm x$;(2) $(x,y)\neq(0,0)$;(3) $xy\geqslant0$;(4) $\{(x,y)\mid |x|\leqslant1,|y|\geqslant1\}$;(5) $\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$;(6) $\{(x,y)\mid 2n\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2n+1)\pi,n=0,1,2,\cdots\}$;(7) $\{(x,y)\mid y>x\}$;(8) 全平面;(9) 整个三维空间;(10) $\{(x,y,z)\mid r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$.

§2 二元函数的极限

1. (1) 0;(2) $+\infty$;(3) 2;(4) $+\infty$;(5) ∞;(6) 0;(7) 0.

2. (1) 重极限不存在,$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=0,\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=1$;(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$,两个累次极限均不存在;(3) 重极限不存在,$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=0$;(4) 重极限不存在,$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=0$;(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0,\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=0$,另一累次极限不存在;(6) 与(4)相同;(7) 重极限与累次极限均不存在.

7. (1) 0;(2) 0;(3) 1;(4) e.

§3 二元函数的连续性

1. (1) 间断曲线为圆族 $x^2+y^2=(2n+1)\frac{\pi}{2},n=0,1,2,\cdots$;(2) 间断曲线为直线族 $x+y=n,n=0,\pm1,\pm2,\cdots$;(3) 不连续点集合$\{(x,y)\mid x\neq0,y=0\}$;(4) 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续;(5) 仅在直线 $y=0$ 上连续;(6) 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续;(7) 在定义域上连续;(8) 在定义域上连续.

总练习题

2. (1) 存在;(2) 不存在.

第十七章 多元函数微分学

§1 可微性

1. (1) $z_x=2xy,z_y=x^2$;(2) $z_x=-y\sin x,z_y=\cos x$;(3) $z_x=\frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}},z_y=\frac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$;(4) $z_x=\frac{1}{x+y^2},z_y=\frac{2y}{x+y^2}$;(5) $z_x=ye^{xy},z_y=xe^{xy}$;(6) $z_x=-\frac{y}{x^2+y^2},z_y=$

$\frac{x}{x^2+y^2}$;(7) $z_x=y(1+xy\cos(xy))\cdot e^{\sin(xy)}$, $z_y=x(1+xy\cos(xy))e^{\sin(xy)}$;(8) $u_x=-\frac{y}{x^2}-\frac{1}{z}$, $u_y=\frac{1}{x}-\frac{z}{y^2}$, $u_z=\frac{1}{y}+\frac{x}{z^2}$;(9) $u_x=yz(xy)^{z-1}$, $u_y=xz(xy)^{z-1}$, $u_z=(xy)^z\ln(xy)$;(10) $u_x=y^z x^{y^z-1}$, $u_y=zy^{z-1}x^{y^z}\ln x$, $u_z=y^z x^{y^z}\ln x\ln y$.

2. $f_x(x,1)=1$.

3. $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)$不存在.

8. (1) $dz|_{(0,0)}=0$, $dz|_{(1,1)}=-4dx-4dy$;(2) $dz|_{(1,0)}=0$, $dz|_{(0,1)}=dx$.

9. (1) $dz=y\cos(x+y)dx+(\sin(x+y)+y\cos(x+y))dy$;(2) $du=e^{yz}dx+(xze^{yz}+1)dy+(xye^{yz}-e^{-z})dz$.

10. $x-y+2z=\frac{\pi}{2}$, $2(1-x)=2(y-1)=(\frac{\pi}{4}-z)$.

11. $9x+y-z-27=0$, $x-3=9(y-1)=9(1-z)$.

12. $(-3,-1,3)$; $x+3y+z+3=0$; $3(x+3)=y+1=3(x-3)$.

13. (1) 108.972;(2) 0.502 3.

14. 2 576 cm^2.

18. $\frac{\pi}{4}$.

20. 0.26%;0.02.

§2 复合函数微分法

1. (1) $\frac{dz}{dx}=\frac{(1+x)e^x}{1+x^2e^{2x}}$;(2) $z_x=(1+\frac{x^2+y^2}{xy})\frac{x^2-y^2}{x^2y}e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$, $z_y=(1+\frac{x^2+y^2}{xy})\frac{y^2-x^2}{xy^2}\cdot e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$;(3) $\frac{dz}{dt}=4t^3+3t^2+2t$;(4) $z_u=\frac{u}{v^2}(2\ln(3u-2v)+\frac{3u}{3u-2v})$, $z_v=-\frac{2u^2}{v^2}(\frac{1}{v}\ln(3u-2v)+\frac{1}{3u-2v})$;(5) $u_x=f_1+yf_2$, $u_y=f_1+xf_2$;(6) $u_x=\frac{1}{y}f_1$, $u_y=-\frac{x}{y^2}f_1+\frac{1}{z}f_2$, $u_z=-\frac{y}{z^2}f_2$.

5. $F_x(0,0)=4f'(0)$; $F_t(0,0)=0$.

§3 方向导数与梯度

1. 5.

2. $\frac{98}{13}$.

3. $(-4,2,-4)$, 6; $(3,-5,0)$, $\sqrt{34}$.

4. $-\frac{1}{r^2}(x-a,y-b,z-c)$, $r=1$.

5. $-2\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$.

7. (1) $\frac{1}{r}(x,y,z)$;(2) $-\frac{1}{r^3}(x,y,z)$.

8. (1) $z^2=xy$;(2) $x^2=yz, y^2=zx$;(3) $x=y=z$.

§4 泰勒公式与极值问题

1. (1) $z_{xx}=12x^2-8y^2, z_{xy}=-16xy, z_{yy}=12y^2-8x^2$;(2) $z_{x^2}=e^x(\cos y+x\sin y+2\sin y)$, $z_{xy}=e^x(x\cos y+\cos y-\sin y)$, $z_{y^2}=-e^x(\cos y+x\sin y)$;(3) $z_{x^2y}=0, z_{xy^2}=-\frac{1}{y^2}$;(4) $u_{x^py^qz^r}=(x+p)(y+q)(z+r)e^{x+y+z}$;(5) $z_{x^2}=y^4f_{11}+4xy^3f_{12}+4x^2y^2f_{22}+2yf_2, z_{xy}=2xy^3f_{11}+5x^2y^2f_{12}+2x^3yf_{22}+2yf_1+2xf_2, z_{y^2}=4x^2y^2f_{11}+4x^3yf_{12}+x^4f_{22}+2xf_1$;(6) $u_{x^2}=2f'+4x^2f'', u_{y^2}=2f'+4y^2f'', u_{z^2}=2f'+4z^2f'', u_{xy}=4xyf'', u_{yz}=4yzf'', u_{xz}=4xzf''$;(7) $z_x=f_1+yf_2+\frac{1}{y}f_3, z_{xx}=f_{11}+2yf_{12}+\frac{2}{y}f_{13}+y^2f_{22}+2f_{23}+\frac{1}{y^2}f_{33}, z_{xy}=f_{11}+(x+y)f_{12}+\frac{1}{y}(1-\frac{x}{y})f_{13}+xyf_{22}-\frac{x}{y^3}f_{33}+f_2-\frac{1}{y^2}f_3$.

7. (1) $x^2+y^2+R_2, R_2=-\frac{2}{3}[3\theta(x^2+y^2)^2\sin(\theta^2x^2+\theta^2y^2)+2\theta^3(x^2+y^2)^3\cos(\theta^2x^2+\theta^2y^2)]$; (2) $f(x,y)=f(1+h,1+k)=1+h-k-hk+k^2+hk^2-k^3+\left(-\frac{hk^3}{(1+\theta k)^4}+\frac{1+\theta h}{(1+\theta k)^5}k^4\right)$;(3) $\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\frac{(x+y)^p}{p}+(-1)^n\frac{(x+y)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\theta x+\theta y)^{n+1}}$; (4) $5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2$.

8. (1) (a,a)为极大点;(2) $(3,-1)$为极小点;(3) $(\frac{1}{2},-1)$为极小点.

9. (1) 最大值 $f(2,0)=f(-2,0)=4$,最小值 $f(0,2)=f(0,-2)=-4$;(2) 最大值 $f(1,0)=f(-1,0)=f(0,-1)=f(0,1)=1$,最小值 $f(0,0)=0$;(3) 最大值$\frac{3}{2}\sqrt{3}$,最小值 0.

10. 等边三角形.

11. $\left(\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)$.

12. $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n},\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}\right)$.

19. (1) 0;(2) $3(z-y)(x-y)(x-z)$或$3[z^2(y-x)+x^2(z-y)+y^2(x-z)]$;(3) 0.

20. $f(x,y,z)+(2Ax+Dy+Fz)h+(2By+Dx+Ez)k+(2Cz+Ey+Fx)l+f(h,k,l)$.

总练习题

2. $f_x(0,0)=1, f_y(0,0)=-1$,不可微.

5. $f_{x^2}=6x+2(a+e+k)$.

6. $\Phi_{xyz}=\begin{vmatrix} f_1' & f_2' & f_3' \\ g_1' & g_2' & g_3' \\ h_1' & h_2' & h_3' \end{vmatrix}$.

第十八章　隐函数定理及其应用

§1　隐函数

3. (1) $\frac{dy}{dx}=-\frac{2y+12x^2y^3}{x+9x^3y^2}$; (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}(x\neq y)$; (3) $z_x=\frac{ye^{-xy}}{e^x-2}, z_y=\frac{xe^{-xy}}{e^x-2}$;

(4) $y'=-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}, y''=\frac{a^2y}{(a^2-y^2)^2}$; (5) $z_x=\frac{1-x}{z-2}, z_y=-\frac{1+y}{z-2}$;

(6) $z_x=\frac{f_1+yzf_2}{1-f_1-xyf_2}, x_y=-\frac{f_1+xzf_2}{f_1+yzf_2}, y_z=\frac{1-(f_1+xyf_2)}{f_1+xzf_2}$.

4. $\frac{dz}{dx}=\frac{2(x^2-y^2)}{x-2y}, \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{4x-2y}{x-2y}+\frac{6x}{(x-2y)^3}$.

5. $u_x=2(x+\frac{zx^2-yz^2}{xy-z^2}), u_{xx}=\frac{2xz(y^3-3xyz+x^3+z^3)}{(xy-z^2)^3}$.

6. (1) $z_x=z_y=-1, z_{xx}=z_{xy}=z_{yy}=0$; (2) $z_x=-\left(1+\frac{F_1+F_2}{F_3}\right), z_y=-\left(1+\frac{F_2}{F_3}\right), z_{x^2}$ $=-F_3^{-3}[F_3^2(F_{11}+2F_{12}+F_{22})-2(F_1+F_2)F_3(F_{13}+F_{23})+(F_1+F_2)^2F_{33}]$.

8. f 在 1 的某邻域内具有连续的导函数，且 $f'(1)\neq 0$.

§2　隐函数组

2. (1) $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x-a}{2y}, \frac{dz}{dx}=-\frac{a}{2z}$;

(2) $u_x=\frac{2v+uy}{4uv-xy}, v_x=\frac{-x-2u^2}{4uv-xy}, u_y=\frac{-y-2v^2}{4uv-xy}, v_y=\frac{2u+xv}{4uv-xy}$;

(3) $u_x=\frac{-u(2vyg_2-1)f_1-f_2g_1}{(1-xf_1)(1-2vyg_2)-f_2g_1}, v_x=\frac{uf_1g_2+xf_1g_1-g_1}{(1-xf_1)(1-2vyg_2)-f_2g_1}$.

3. (1) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}, \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\cos v-e^u}{ue^u(\sin v-\cos v)+u}, \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}, \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{e^u+\sin v}{ue^u(\sin v-\cos v)+u}$; (2) $z_x=-3uv$.

4. $dz=0$.

5. (1) $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial v}$; (2) $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}$.

6. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\left(\frac{\partial(h,f)}{\partial(z,t)}\Big/\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right)\frac{\partial g}{\partial y}$.

10. (1) $x=\frac{u}{u^2+v^2+w^2}, y=\frac{v}{u^2+v^2+w^2}, z=\frac{w}{u^2+v^2+w^2}$; (2) $-\frac{1}{r^6}$.

§3 几何应用

1. $\frac{y}{y_0^{1/3}}+\frac{x}{x_0^{1/3}}=a^{2/3}$.

2. (1) $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1, y=\frac{b}{2}, ax-cz=\frac{1}{2}(a^2-c^2)$;

(2) $\frac{x-1}{8}=\frac{y+1}{10}=\frac{z-2}{7}, 8(x-1)+10(y+1)+7(z-2)=0$.

3. (1) $-2(x-1)+(y-1)+(z-2)=0, \frac{x-1}{-2}=y-1=z-2$;

(2) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}, a(x-\frac{a}{\sqrt{3}})=b(y-\frac{b}{\sqrt{3}})=c(z-\frac{c}{\sqrt{3}})$.

5. $x+4y+6z=\pm 21$.

6. $(-1,1,-1),(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27})$.

7. $\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{16}{243}$.

9. $\lambda=\pm\frac{abc}{3\sqrt{3}}$.

10. $x+y=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{2})$.

§4 条件极值

1. (1) 极小值 $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$, (2) 极小值 $f(c,c,c,c)=4c$, (3) 极小值 $f(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})=f(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})=f(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})=-\frac{1}{3\sqrt{6}}$；极大值 $f(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})=f(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}})=f(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}})=\frac{1}{3\sqrt{6}}$.

2. (1) 立方体;(2) 立方体.

3. (1) $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$;

(2) $\left[\frac{(a_1d_2-a_2d_1)^2+(b_1d_2-b_2d_1)^2+(c_1d_2-c_2d_1)^2}{(a_1b_2-a_2b_1)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2}\right]^{1/2}$.

5. 当 $x_i=\frac{a_i}{(\sum a_k^2)^{1/2}}, i=1,2,\cdots,n$ 时, f 取得最大值 $\sqrt{\sum a_k^2}$.

6. 当 $x_i=\frac{a_i}{\sum a_k^2}, i=1,2,\cdots,n$ 时, f 取得最小值 $\frac{1}{\sum a_k^2}$.

总练习题

3. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{f_x+f_zg_x}{f_y+f_zg_y}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{g_xf_y-g_yf_x}{f_y-f_zg_y}$.

5. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(g,h)}{\partial(v,w)}\Big/J,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial(h,f)}{\partial(v,w)}\Big/J,\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial(f,g)}{\partial(v,w)}\Big/J$,其中 $J=\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)}$.

6. (1) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{f_x+g_x-2x}{2u-f_u-g_u},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{g_y}{2u-g_u-f_u}$;(2) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{f_1}{1-f_1-yf_2},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{uf_2}{1-f_1-yf_2}$.

9. (1) 极大值 1,极小值 -1;(2) 极大值$\sqrt{\frac{1}{8}}a$,极小值 $-\sqrt{\frac{1}{8}}a$.

10. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(\psi_u+\psi_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u})/(\varphi_u+\varphi_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u})$;$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left\{\left[\psi_{uu}+\psi_{uv}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}+(\psi_{vu}+\psi_{vv}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u})\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right](\varphi_u+\varphi_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u})-(\psi_u+\psi_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u})\left[\varphi_{uu}+\varphi_{uv}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}+(\varphi_{vu}+\varphi_{vv}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u})\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}+\varphi_v\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2}\right]\right\}\Big/(\varphi_u+\varphi_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u})^3$.

13. $\frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

第十九章　含参量积分

§1　含参量正常积分

1. $F(y)=\begin{cases}1, & -\infty<y<0,\\ 1-2y, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ -1, & 1<y<+\infty.\end{cases}$

2. (1) 1;　(2) $\frac{8}{3}$.

3. $\int_x^{x^2}-y^2\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}y+2x\mathrm{e}^{-x^5}-\mathrm{e}^{-x^3}$.

4. (1) $\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$;　(2) $\begin{cases}0, & |a|\leqslant 1,\\ 2\pi\ln|a|, & |a|>1.\end{cases}$

5. (1) $\arctan(1+b)-\arctan(1+a)$;　(2) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}\right)$.

6. (1) $\frac{\pi}{4}$;　(2) $-\frac{\pi}{4}$.

9. $x(2-3y^2)f(xy)+\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right)+x^2y(1-y^2)f'(xy)$.

10. (1) $E'(k)=\frac{1}{k}[E(k)-F(k)],F'(k)=\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{F(k)}{k}$.

§2　含参量反常积分

2. $\ln\frac{b}{a}$.

4. (1)$\sqrt{\pi}(b-a)$;　(2) $\arctan x$;　(3) $y\arctan y-\frac{1}{2}\ln(1+y^2)(y\geqslant 0)$.

7. $\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}a^{-2n-1}$.

§3 欧拉积分

1. $\frac{3}{4}\sqrt{\pi}, -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}, \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \frac{(-1)^n 2^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}$.

2. $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

6. (1) $\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right), m>-1, n>-1$;

   (2) $\Gamma(p+1), p>-1$.

总练习题

1. $a=-\frac{11}{3}, b=4$.

3. $F(a)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(1-a^2)$, $a=\pm 1$.

第二十章　曲线积分

§1 第一型曲线积分

1. (1) $1+\sqrt{2}$; (2) πR^2; (3) $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$; (4) 4;

   (5) $\sqrt{a^2+b^2}\left(2a^2\pi+\frac{8\pi^3 b^2}{3}\right)$; (6) $\frac{16\sqrt{2}}{143}$; (7) $2\pi a^2$.

2. $\frac{a}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

3. $\frac{4}{3}a$.

4. (1) $\frac{\pi}{4}ae^a$; (2) $\frac{4ka^2\sqrt{k^2+1}}{4k^2+1}$.

§2 第二型曲线积分

1. (1) $\frac{2}{3}, 0, 2$; (2) $a^2\pi$; (3) 0; (4) 2; (5) 13.

2. $\frac{k}{2}(b^2-a^2)$, k 为比例系数.

3. $\frac{-k\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c}\ln 2$.

5. (1) $\frac{\sqrt{2}}{16}\pi$; (2) -4.

总练习题

1. (1) $\frac{1}{12}[5\sqrt{5}-17\sqrt{17}]-\frac{3}{2}\sqrt{2}$; (2) $4a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

   (3) $\frac{1}{3}[(2+t_0)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}]$; (4) $-\frac{a^4}{4}\pi$; (5) $\ln 2$;

(6) $-\frac{\pi}{4}a^3$.

2. (1) $\int_a^b f(x,a)\mathrm{d}x, \int_a^b f(x,a)\mathrm{d}x, 0$;

(2) $\int_a^b f(x,a)\mathrm{d}x + \int_a^b f(b,y)\mathrm{d}y + \int_a^b \sqrt{2}f(t,t)\mathrm{d}t$,

$\int_a^b f(x,a)\mathrm{d}x + \int_b^a f(t,t)\mathrm{d}t, \int_a^b f(b,y)\mathrm{d}y + \int_b^a f(t,t)\mathrm{d}t$.

第二十一章 重 积 分

§1 二重积分概念

1. $\frac{1}{4}$.

8. $\frac{200}{102} \leqslant I \leqslant 2$.

§2 直角坐标系下二重积分的计算

1. (1) $\int_a^b \mathrm{d}y \int_y^b f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_a^x f(x,y)\mathrm{d}y$;

(2) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}x \int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$;

(3) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$;

(4) $\int_{-1}^0 \mathrm{d}x \int_{-1-x}^{x+1} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x-1}^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y$

$= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y-1}^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_{-1}^0 \mathrm{d}y \int_{-1-y}^{y+1} f(x,y)\mathrm{d}x$.

2. (1) $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_2^4 \mathrm{d}y \int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_{-1}^0 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^a \mathrm{d}y \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_0^a \mathrm{d}y \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_a^{2a} \mathrm{d}y \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\mathrm{d}x$

(4) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\mathrm{d}x$.

3. (1) $\frac{p^5}{21}$; (2) $\frac{128}{105}$; (3) $\left(2\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)a^{\frac{3}{2}}$; (4) $\frac{8}{15}$.

4. $9\frac{1}{6}$.

§3 格林公式·曲线积分与路线的无关性

1. (1) $-46\frac{2}{3}$; (2) $\frac{ma^2\pi}{8}$.

2. (1) $\frac{3}{8}a^2\pi$; (2) a^2.

4. 2σ, σ 为由 L 所围的面积.

5. (1)0; (2) $x^2\cos x + y^2\cos y$; (3) $-\frac{3}{2}$; (4) 9;

   (5) $\int_2^1 \varphi(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 \psi(y)\mathrm{d}y$.

6. (1) $\frac{1}{3}x^3 + x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3 + c$;

   (2) $\mathrm{e}^{xy}(x-y+1) + y\mathrm{e}^x + c$;

   (3) $\frac{1}{2}\int f(\sqrt{u})\mathrm{d}u$, $u = x^2 + y^2$.

7. $yF_y(x,y) = xF_x(x,y)$.

8. $\pm mS + \varphi(y_2)\mathrm{e}^{x_2} - \varphi(y_1)\mathrm{e}^{x_1} - \frac{m}{2}(x_2 - x_1)(y_1 + y_2) - m(y_2 - y_1)$

§4 二重积分的变量变换

1. (1) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}r = \int_a^b \mathrm{d}r\int_0^{\pi} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta$;

   (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}r = \int_0^1 \mathrm{d}r\int_{\arcsin r}^{\frac{\pi}{2}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta$;

   (3) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}r + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}r$

   $= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta +$

   $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\mathrm{d}r\int_{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}}^{\frac{\pi}{2}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta + \int_1^2\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\arccos\frac{1}{r}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta$。

2. (1) $-6\pi^2$; (2) $\frac{\pi}{2}$; (3) $\frac{a^4}{2}$; (4) $\pi[f(R^2) - f(0)]$.

3. (1) $\int_1^2\mathrm{d}u\int_{-u}^{4-u}\frac{1}{2}f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)\mathrm{d}v$;

   (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}v\int_0^a f(u\cos^4 v, u\sin^4 v)4u\sin^3 v\cos^3 v\,\mathrm{d}u$;

   (3) $\int_0^a\mathrm{d}u\int_0^1 f(u(1-v), uv)u\,\mathrm{d}v$.

4. (1) $u = x + y$, $v = x - y$, $\frac{\pi^2}{2}$;

   (2) $u = x + y$, $v = y$, $\frac{\mathrm{e}-1}{2}$.

5. (1) $\frac{\pi}{8}$; (2) 8π.

6. (1) $\frac{b^2-a^2}{2}\left(\frac{1}{1+\alpha}-\frac{1}{1+\beta}\right)$; (2) $\frac{ab(a^2+b^2)\pi}{2}$;

(3) $\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)a^2$

8. (1) 极坐标变换, $2\pi\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r$;

(2) 极坐标变换, $\pi\int_0^{\sqrt{2}} f(r)\mathrm{d}r-4\int_1^{\sqrt{2}} r\arccos\frac{1}{r}\cdot f(r)\mathrm{d}r$;

(3) $u=x+y, v=x-y$, $\int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u$;

(4) $u=xy, v=\frac{y}{x}$, $\ln 2\cdot\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u$.

§5 三重积分

1. (1) 14; (2) 1; (3) $\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$; (4) $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$.

2. (1)
$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}\mathrm{d}x\int_0^{x+y} f(x,y,z)\mathrm{d}z\\
&= \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}z\int_0^{1-x} f(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}z\int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\mathrm{d}y\\
&= \int_0^1\mathrm{d}z\int_z^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y,z)\mathrm{d}y\\
&= \int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{d}z\int_0^{1-y} f(x,y,z)\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\mathrm{d}z\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1\mathrm{d}z\int_z^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y} f(x,y,z)\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^z\mathrm{d}y\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\mathrm{d}x;
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z\\
&= \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\mathrm{d}z\int_0^1 f(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x^2+1}\mathrm{d}z\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}y\\
&= \int_0^1\mathrm{d}z\int_{\sqrt{z}}^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{z}}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}y\\
&\quad+\int_1^2\mathrm{d}z\int_{\sqrt{z-1}}^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}y\\
&= \int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{y^2}\mathrm{d}z\int_0^1 f(x,y,z)\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y^2+1}\mathrm{d}z\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1\mathrm{d}z\int_{\sqrt{z}}^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y,z)\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{z}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_1^2\mathrm{d}z\int_{\sqrt{z-1}}^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

3. (1) $\frac{59}{480}\pi r^5$; (2) $\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$.

4. (1) 柱坐标变换,$\frac{3}{35}$;

(2) $x=ar\sin\varphi\cos^2\theta, y=br\sin\varphi\sin^2\theta, z=cr\cos\varphi, \frac{1}{3}abc$.

5. $\frac{8}{5}\pi$.

7. (1) $\frac{1}{4}abc\pi^2$;(2) $4\pi abc(e-2)$.

§6 重积分的应用

1. $\frac{2\pi a^2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

2. $\sqrt{2}\pi$.

3. (1) $\bar{x}=0, \bar{y}=\frac{46}{3\pi}$; (2) $\bar{x}=0, \bar{y}=\frac{(2b+a)}{3(a+b)}h$.

4. (1) $\bar{x}=\bar{y}=0, \bar{z}=\frac{1}{3}$; (2) $\bar{x}=\frac{1}{4}, \bar{y}=\frac{1}{8}, \bar{z}=-\frac{1}{4}$.

5. (1) $\frac{5\pi}{4}\rho R^2$; (2) $\frac{1}{3}\rho a^3 b\sin^3\varphi$.

6. (1) $(0,0,2k\pi\rho(1-\frac{c}{R^2+c}))$;

(2) $(0,0,2k\pi\rho(h-\sqrt{a^2+(h-c)^2}+\sqrt{a^2+c^2}))$;

(3) $(0,0,\frac{2k\pi\rho mh(\sqrt{R^2+h^2}-h)}{\sqrt{R^2+h^2}})$.

7. $4ab\pi^2$.

8. $\pi[a\sqrt{a^2+b^2}+b^2\ln(a+\sqrt{a^2+b^2})-b^2\ln b]$.

9. $\frac{2}{3}\rho a^5$.

§7 n 重积分

1. $\frac{8}{15}\pi^2 r^5$.

2. $\pi(1-\frac{\pi}{4})$.

3. $\frac{1}{n!}a_1a_2\cdots a_n$.

4. $\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^R r^{n-1}f(r)\mathrm{d}r$.

§8 反常二重积分

1. (1) $m>1$ 收敛; (2) $p>1, q>1$ 收敛;

(3) $p>\frac{1}{2}$收敛.

2. $\frac{\pi}{2}$.

3. (1) $m<1$ 收敛;(2) $m<1$ 收敛.

总练习题

1. (1) $\frac{1}{4}$;(2) $\frac{6}{5}$.

2. (1) 6;(2) $4[\frac{\pi}{3}+\ln(2+\sqrt{3})]$.

3. $\frac{\pi}{4}a^4$.

4. $f(0,0)$.

5. (1) $\frac{2}{t}F(t)$; (2) $4\pi t^2 f(t^2)$;

(3) $\frac{3}{t}\left[F(t)+\iiint\limits_{\substack{0\leq x\leq t\\0\leq y\leq t\\0\leq z\leq t}} xyzf'(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]$,其中 $t>0$.

6. $\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{-1}-1)$.

8. 柱面坐标系:$\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}rf(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\mathrm{d}r+$

$$\int_0^1\mathrm{d}z\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}rf(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\mathrm{d}r;$$

球面坐标系:$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\operatorname{arccot}\cos\theta}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}kf(u,v,w)\mathrm{d}r+$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\operatorname{arccot}\cos\theta}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\sin\varphi\cos\theta}}kf(u,v,w)\mathrm{d}r+$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\operatorname{arccot}\sin\theta}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}kf(u,v,w)\mathrm{d}r+$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\operatorname{arccot}\sin\theta}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\sin\varphi\sin\theta}}kf(u,v,w)\mathrm{d}r,$$

其中,$k=r^2\sin\varphi,u=r\sin\varphi\cos\theta,v=r\sin\varphi\sin\theta,w=r\cos\varphi$.

10. 2π.

11. $\frac{\pi}{|a_1b_2-a_2b_1|}$.

12. $V=\frac{8}{|\Delta|}h_1h_2h_3,|\Delta|=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$.

13. $\left(-\frac{2amk}{r},\frac{ma\pi k}{r}\right)$,$k$ 为引力常数.

14. $2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}$.

15. $\overline{x}=\frac{4}{3}a,\overline{y}=\frac{4}{3}a$.

17. $\lambda=1,\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}+c$.

第二十二章　曲面积分

§1　第一型曲面积分

1. (1) πa^3;(2) $\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}+1)$;(3) $\frac{2\pi H}{R}$;(4) $\frac{\sqrt{3}}{120}$.

2. $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$.

3. $\frac{4}{3}\pi\rho a^4$.

4. $\frac{\pi a^4}{2}\sin\theta\cos^2\theta$.

§2　第二型曲面积分

1. (1) a^4;(2) 24;(3) $\frac{1}{8}$;(4) $\frac{\pi}{4}$;

   (5) $\frac{3}{8}\pi R^3(a+b+c)$.

2. $\frac{32}{3}\pi$.

3. $I=bc[f(a)-f(0)]+ac[g(b)-g(0)]+ab[h(c)-h(0)]$.

4. $2\pi a^3$.

§3　高斯公式与斯托克斯公式

1. (1) 0;(2) $3a^4$;(3) $\frac{\pi}{2}h^4$;(4) $\frac{12}{5}\pi$;(5) $2\pi a^3$.

2. $\frac{11}{24}$.

3. (1) 0;(2) 0;(3) $3a^2$.

4. (1) $xyz+c$;(2) $\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+c$.

5. (1) $-53\frac{7}{12}$;(2) 0.

9. $2S$.

§4　场论初步

1. $\frac{1}{r}(x,y,z),2(x,y,z),-\frac{1}{r^3}(x,y,z),f'(r)\frac{1}{r}(x,y,z),nr^{n-2}(x,y,z)$.

2. $(-4,2,-4),(0,8,2),(-8,-4,-10)$, $\nabla u(5,-3,\frac{2}{3})=0$.

4. (1) $0,2(y-z,z-x,x-y)$;(2) $6xyz,(x(z^2-y^2),y(x^2-z^2),z(y^2-x^2))$;

(3) $\frac{x+y+z}{xyz},\frac{1}{xyz}\left(\frac{y^2}{z}-\frac{z^2}{y},\frac{z^2}{x}-\frac{x^2}{z},\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}\right)$.

8. $\frac{3}{8}\pi$.

9. (1) 2π;(2) 2π.

总练习题

1. (1) $\pi a^2(1-\lambda)(5-3\pi c)-8\pi^2c^2$;(2) $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=(2(1-\lambda)x,(1-\lambda)y,(1-\lambda)(5-3z))$;(3) $\lambda=1$,势函数为$\frac{1}{3}x^3+5xy-2y+3xyz-2z^2+C$.

5. 2.

第二十三章　流形上微积分学初阶

§2　向量函数的微分

2. (1) $\boldsymbol{f}'(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}\sin x_2 & x_1\cos x_2\\ 2(x_1-x_2) & -2(x_1-x_2)\\ 0 & 4x_2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{f}'\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\pi & \pi\\ 0 & 2\pi\end{bmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{f}'(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix}2x_1 & 1 & 0\\ x_2e^{x_1+x_3} & e^{x_1+x_3} & x_2e^{x_1+x_3}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{f}'(1,0,1)=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & e^2 & 0\end{bmatrix}$.

4. (1) $\cos x+\sin x$;　(2) $\begin{bmatrix}\cos(x_1-x_2) & -\cos(x_1-x_2)\\ -\sin(x_1-x_2) & \sin(x_1-x_2)\end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix}x_2^2-2x_1x_2 & 2x_1x_2-x_1^2\\ -1-x_2 & 1-x_1\end{bmatrix}$;　(4) $\begin{bmatrix}2x_1x_2^2 & 2x_1^2x_2\\ -2 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$;

(5) $\begin{bmatrix}4x_1x_2^2+16x_1x_2 & 4x_1^2x_2+8x_1^2\\ 2x_1 & 3\end{bmatrix}$;　(6) $\begin{bmatrix}2x_1x_2^2x_3^2 & 2x_1^2x_2x_3^2 & 2x_1^2x_2^2x_3\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

5. $[h_x+h_uf_x+h_v(g_x+g_uf_x),h_uf_y+h_v(g_y+g_uf_y)]$.

7. (1) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$; (2) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\left[\int\varphi_1(x_1)dx_1,\cdots,\int\varphi_n(x_n)dx_n\right]^{\mathrm{T}}$.

8. (1) 极小值点 $\boldsymbol{x}_0=\left(-\frac{17}{6},-\frac{7}{3},-\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$; (2) 稳定点 $\boldsymbol{x}_0=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$,非极值点.

9. (1) $(f\circ\boldsymbol{h})'=[x_2+1,x_1-1]$, $(f\circ\boldsymbol{t})'=[x_2x_3-1,x_1x_3-1,x_1x_2-1]$,

$(\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{g})'=(\cos x+\sin x)\begin{bmatrix}\cos x-\sin x\\ -1\end{bmatrix}$,

$(\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{t})'=\begin{bmatrix}2x_1x_2x_3+x_2^2x_3+x_2x_3^2 & x_1^2x_3+2x_1x_2x_3+x_1x_3^2 & x_1^2x_2+x_1x_2^2+2x_1x_2x_3\\ -x_2x_3+1 & -x_1x_3+1 & -x_1x_2+1\end{bmatrix}$,

$$(s\circ g)'=\begin{bmatrix}\sin 2x\\-2\sin x\\\sin x\end{bmatrix};\quad (2)\ (g\circ f\circ h)'=\begin{bmatrix}(x_2+1)\cos w & (x_1-1)\cos w\\-(x_2+1)\sin w & -(x_1-1)\sin w\end{bmatrix},$$

其中 $w=x_1x_2-x_2+x_1$,

$$(s\circ t\circ s)'=\begin{bmatrix}16x_1^3x_2^2(x_2+4)^2 & 8x_1^4x_2(x_2+4)(2x_2+4)\\4x_1 & 6\\2x_1 & 3\end{bmatrix}.$$

12. (1) 凡使 $a^{T}x=t_0$(t_0 为 φ 的稳定点)的解 x_0 均为 f 的稳定点.

§3 隐函数定理与反函数定理

2. $z_{xx}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $z_{xy}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $z_{yy}=-\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

3. (3) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{\Delta}(f_1'g_3'-f_3'g_1')$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{\Delta}(f_2'g_3'-f_3'g_2')$, $\dfrac{\partial u}{\partial v}=-\dfrac{u}{\Delta}g_3'(f_1'+f_2'+f_3')$,其中 $\Delta=g_1'[1+v(f_1'+f_2'+f_3')]$.

5. (1) $\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}=\dfrac{1}{w}\begin{bmatrix}u & v\\ u\arctan\dfrac{v}{u}-v & v\arctan\dfrac{v}{u}+u\end{bmatrix}$,其中 $w=\sqrt{u^2+v^2}$;

(2) $\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}=\dfrac{1}{x(e^x\sin y-e^x\cos y+1)}\begin{bmatrix}x\sin y & -x\cos y\\ \cos y-e^x & \sin y+e^x\end{bmatrix}$.

§4 外积、微分形式与一般斯托克斯公式

1. $w_1\wedge w_2=(Q_1R_2-R_1Q_2)dy\wedge dz+(R_1P_2-P_1R_2)dz\wedge dx+(P_1Q_2-Q_1P_2)dx\wedge dy$.

2. $w_1\wedge w_2=(PA+QB+RC)dx\wedge dy\wedge dz$.

总练习题

7. (2) $\beta_1\neq0$ 时, $c=\arctan\dfrac{\beta_2}{\beta_1}\in(0,2\pi)$, $\beta_2\neq0$ 时, $c=\arctan\dfrac{\beta_1}{\beta_2}\in(0,2\pi)$.

索 引

六 画

七 画

八 画

九　画

十　画

十　一　画

十 二 画

十三画以上

人 名 索 引

（上册正文中出现过的人名不再重复）

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学分析　（下册）　（第三版）
作者＝华东师范大学数学系编
页数＝３６５
ＳＳ号＝１０６５５７８１
出版日期＝１９８１年０６月第１版